ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГЕОМЕТРИЯ НА ВОЛЬНОМ ВОЗДУХЕ

Природа говорит языком
математики: буквы этого
языка — круги, треугольники и иные
математические фигуры.

Галилей

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ГЕОМЕТРИЯ В ЛЕСУ

ПО ДЛИНЕ ТЕНИ

Еще сейчас памятно мне то изумление, с каким смотрел я в первый раз на седого лесничего, который, стоя возле огромной сосны, измерял ее высоту маленьким карманным прибором. Когда он нацелился своей квадратной дощечкой в вершину дерева, я ожидал, что старик сейчас начнет взбираться туда с мерной цепью. Вместо этого он положил прибор обратно в карман и объявил, что измерение окончено. А я думал, еще не начиналось...

Я был тогда очень молод, и такой способ измерения, когда человек определяет высоту дерева, не срубая его и не взбираясь на верхушку, являлся в моих глазах чем-то вроде маленького чуда. Лишь позднее, когда меня посвятили в начатки геометрии, понял я, до чего просто выполняются такого рода чудеса. Существует множество различных способов производить подобные измерения при помощи весьма незамысловатых приборов и даже без всяких приспособлений.

Самый легкий и самый древний способ — без сомнения, тот, которым греческий мудрец Фалес за шесть веков до нашей эры определил в Египте высоту пирамиды. Он воспользовался ее тенью. Фараон и жрецы, собравшиеся у подножия высочайшей пирамиды, озадаченно смотрели на северного пришельца, отгадывавшего по тени высоту огромного сооружения. Фалес, говорит предание, избрал день и час, когда длина собственной его тени равнялась его росту; в этот момент высота пирамиды должна также равняться длине отбрасываемой ею тени[1]. Вот, пожалуй, единственный случай, когда человек извлекает пользу из своей тени...

Задача греческого мудреца представляется нам теперь детски простой, но не будем забывать, что смотрим мы на нее с высоты грандиозного здания геометрии, воздвигнутого уже после Фалеса. За 300 лет до нашей эры греческий математик Евклид написал замечательную книгу, по которой обучались геометрии в течение двух тысячелетий после его смерти. Заключенные в ней истины, известные теперь каждому школьнику, не были еще открыты в эпоху Фалеса. А чтобы воспользоваться тенью для решения задачи о высоте пирамиды, надо было знать уже некоторые геометрические свойства треугольника, — именно следующие два (первое из которых открыл сам Фалес):

1) что углы при основании равнобедренного треугольника равны и обратно — что стороны, лежащие против равных углов треугольника, равны между собою;

2) что сумма углов всякого треугольника (или по крайней мере прямоугольного) равна двум прямым углам.

Только вооруженный этим знанием Фалес вправе был заключить, что, когда его собственная тень равна его росту, солнечные лучи встречают ровную почву под углом в половину прямого, и, следовательно, вершина пирамиды, центр ее основания и конец ее тени должны обозначить равнобедренный треугольник.

Этим простым способом очень удобно, казалось бы, пользоваться в ясный солнечный день для измерения одиноко стоящих деревьев, тень которых не сливается с тенью соседних. Но в наших широтах не так легко, как в Египте, подстеречь нужный для этого момент: Солнце у нас низко стоит над горизонтом, и тени бывают равны высоте отбрасывающих их предметов лишь в околополу-

---

[1] Конечно, длину тени надо было считать от средней точки квадратного основания пирамиды; ширину этого основания Фалес мог измерить непосредственно.

денные часы летних месяцев. Поэтому способ Фалеса в указанном виде применим не всегда.

Нетрудно, однако, изменить этот способ так, чтобы в солнечный день можно было пользоваться любой тенью, какой бы длины она ни была. Измерив, кроме того, и свою тень или тень какого-нибудь шеста, вы можете вычислить искомую высоту из пропорции (рис. 1)

$$AB : ab = BC : bc,$$

так как высота дерева во столько же раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз тень дерева длиннее вашей тени (или тени шеста). Это вытекает, конечно, из геометрического подобия треугольников ABC и abc (по двум углам).

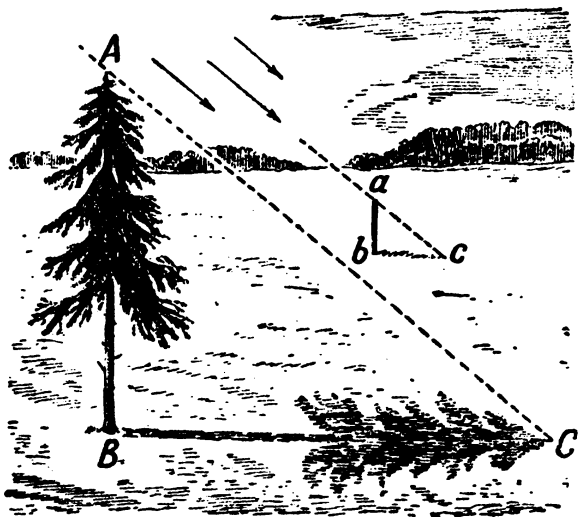

Рис. 1. Измерение высоты дерева по тени.

Иные читатели возразят, пожалуй, что столь элементарный прием не нуждается вовсе в геометрическом обосновании: неужели и без геометрии не ясно, что во сколько раз дерево выше, во столько раз и тень его длиннее? Дело, однако, не так просто, как кажется. Попробуйте применить это правило к теням, отбрасываемым при свете уличного фонаря или лампы, — оно не оправдается. На рис. 2 вы видите, что столбик AB выше тумбы ab примерно втрое, а тень столбика больше тени тумбы ($BC : bc$) раз в восемь. Объяснить, почему в данном случае способ применим, а в другом нет, — невозможно без геометрии.

Задача

Рассмотрим поближе, в чем тут разница. Суть дела сводится к тому, что солнечные лучи между собой параллельны, лучи же фонаря — непараллельны. Последнее очевидно; но почему мы вправе считать лучи Солнца параллельными, хотя они безусловно пересекаются в том месте, откуда исходят?

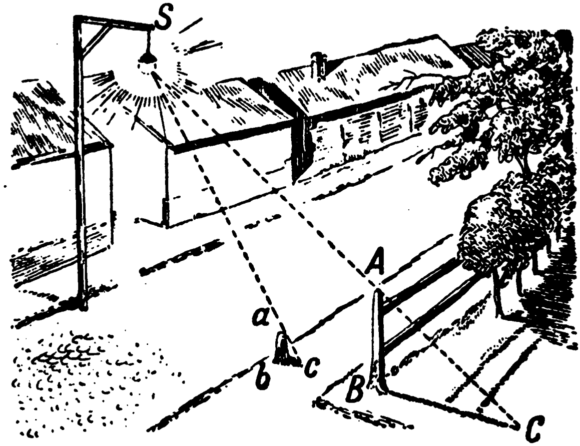

Рис. 2. Когда такое измерение невыполнимо?

Решение

Лучи Солнца, падающие на Землю, мы можем считать параллельными потому, что угол между ними чрезвычайно мал, практически неуловим. Несложный геометрический расчет убедит вас в этом. Вообразите два луча, исходящих из какой-нибудь точки Солнца и падающих на Землю на расстоянии, скажем, одного километра друг от друга. Значит, если бы мы поставили одну ножку циркуля в эту точку Солнца, а другой описали окружность радиусом, равным расстоянию от Солнца до Земли (т.е. радиусом в 150 000 000 км), то между нашими двумя лучами-радиусами оказалась бы дуга в один километр длиной. Полная длина этой исполинской окружности была бы равна $2\pi \times 150\ 000\ 000$ км = 940 000 000 км. Один градус ее, конечно, в 360 раз меньше, т.е. около 2600 000 км; одна дуговая минута в 60 раз меньше градуса, т.е. равна 43000 км, а одна дуговая секунда еще в 60 раз меньше, т.е. равна 720 км. Но наша дуга имеет в длину всего только 1 км; значит, она соответствует углу в $\frac{1}{720}$ секунды. Такой ничтожный угол неуловим даже для точнейших астрономических инструментов; следовательно, на практике мы можем считать лучи Солнца, падающие на Землю, за параллельные прямые[1].

Если бы эти геометрические соображения не были нам известны, мы не могли бы обосновать рассматриваемый способ определения высоты по тени.

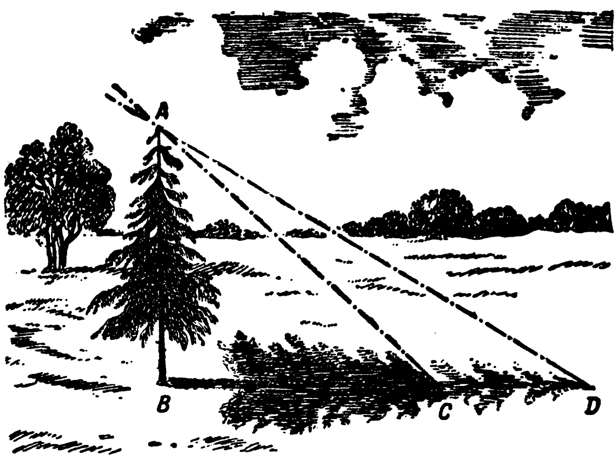

Рис. 3. Как образуется полутень.

Пробуя применить способ теней на практике, вы сразу же убедитесь, однако, в его ненадежности. Тени не отграничены так отчетливо, чтобы измерение их длины можно было выполнить вполне

[1] Другое дело — лучи, направленные от какой-нибудь точки Солнца к концам земного диаметра; угол между ними достаточно велик для измерения (около 17"); определение этого угла дало в руки астрономов одно из средств установить, как велико расстояние от Земли до Солнца.

точно. Каждая тень, отбрасываемая при свете Солнца, имеет неясно очерченную серую кайму полутени, которая и придает границе тени неопределенность. Происходит это оттого, что Солнце — не точка, а большое светящееся тело, испускающее лучи из многих точек. На рис. 3 показано, почему вследствие этого тень *BC* дерева имеет еще придаток в виде полутени *CD*, постепенно сходящей на нет.

Угол *CAD* между крайними границами полутени равен тому углу, под которым мы всегда видим солнечный диск, т.е. половине градуса. Ошибка, происходящая оттого, что обе тени измеряются не вполне точно, может при не слишком даже низком стоянии Солнца достигать 5 % и более. Эта ошибка прибавляется к другим неизбежным ошибкам — от неровности почвы и т.д. — и делает окончательный результат мало надежным. В местности гористой, например, способ этот совершенно неприменим.

ЕЩЕ ДВА СПОСОБА

Вполне возможно обойтись при измерении высоты и без помощи теней. Таких способов много; начнем с двух простейших.

Прежде всего мы можем воспользоваться свойством равнобедренного прямоугольного треугольника, обратившись к услугам весьма простого прибора, который легко изготовить из дощечки и трех булавок. На дощечке любой формы, даже на куске коры, если у него есть плоская сторона, намечают три точки — вершины равнобедренного прямоугольного треугольника — и в них втыкают торчком по булавке (рис. 4). Пусть у вас нет под рукой чертежного треугольника для построения прямого угла, нет и циркуля для откладывания равных сторон. Перегните тогда любой лоскут бумаги один раз, а затем поперек первого сгиба еще раз так, чтобы обе части первого сгиба совпали, — и получите прямой угол. Та же бумажка пригодится и вместо циркуля, чтобы отмерить равные расстояния.

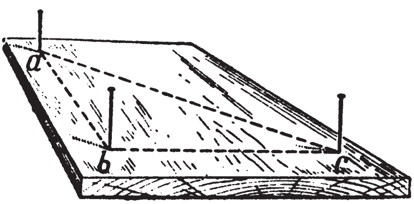

Рис. 4. Булавочный прибор для измерения высот.

Как видите, прибор может быть целиком изготовлен в бивуачной обстановке.

Обращение с ним не сложнее изготовления. Отойдя от измеряемого дерева, держите прибор так, чтобы один из катетов треугольника был направлен отвесно, для чего можете пользоваться ниточкой с грузиком, привязанной к верхней булавке. Приближаясь к дереву или удаляясь от него, вы всегда найдете такое место A (рис. 5), из которого, глядя на булавки a и c, увидите, что они покрывают верхушку C дерева: это значит, что продолжение гипотенузы ac проходит через точку C. Тогда, очевидно, расстояние aB равно CB, так как угол $a = 45°$.

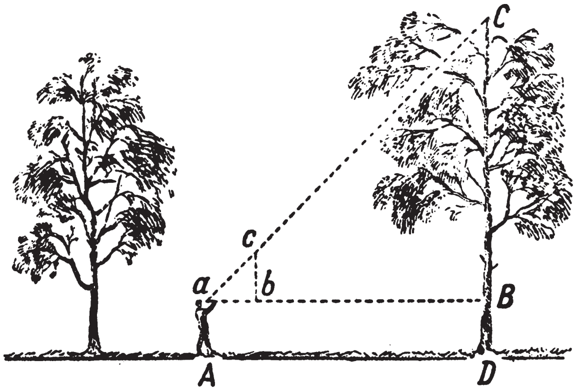

Рис. 5. Схема применения булавочного прибора.

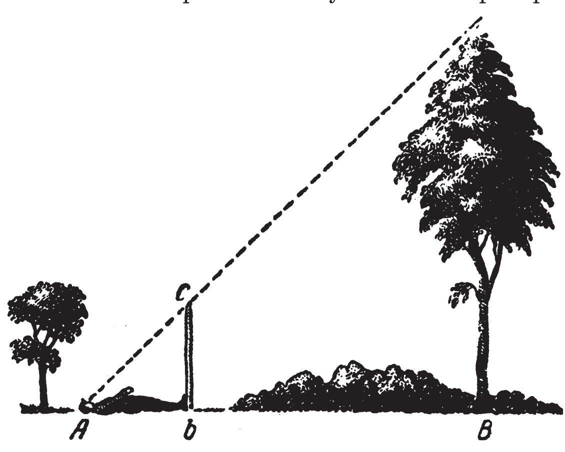

Рис. 6. Еще одни способ определения высоты.

Следовательно, измерив расстояние aB (или, на ровном месте, одинаковое с ним расстояние AD) и прибавив BD, т.е. возвышение aA глаза над землей, получите искомую высоту дерева.

По другому способу можно обойтись даже и без булавочного прибора.

Здесь нужен шест, который вам придется воткнуть отвесно в землю так, чтобы выступающая часть как раз равнялась вашему росту. Место для шеста надо выбрать так, чтобы лежа, как показано на рис. 6, вы видели верхушку дерева на одной прямой линии с верхней точкой шеста. Так как треугольник Abc — равнобедренный и прямоугольный, то угол $A = 45°$ и, следовательно, AB равно BC, т.е. искомой высоте дерева.

ПО СПОСОБУ ЖЮЛЯ ВЕРНА

Следующий — тоже весьма несложный — способ измерения высоких предметов картинно описан у Жюля Верна в известном романе «Таинственный остров».

«— Сегодня нам надо измерить высоту площадки Далекого Вида, — сказал инженер.

— Вам понадобится для этого инструмент? — спросил Герберт.

— Нет, не понадобится. Мы будем действовать несколько иначе, обратившись к не менее простому и точному способу.

Юноша, стараясь научиться возможно большему, последовал за инженером, который спустился с гранитной стены до окраины берега.

Взяв прямой шест, футов 12 длиною, инженер измерил его возможно точнее, сравнивая со своим ростом, который был ему хорошо известен. Герберт же нес за ним отвес, врученный ему инженером: просто камень, привязанный к концу веревки.

Не доходя футов 500 до гранитной стены, поднимавшейся отвесно, инженер воткнул шест фута на два в песок и, прочно укрепив его, поставил вертикально с помощью отвеса.

Затем он отошел от шеста на такое расстояние, чтобы, лежа на песке, можно было на одной прямой линии видеть и конец шеста, и край гребня (рис. 7). Эту точку он тщательно пометил колышком.

— Тебе знакомы начатки геометрии? — спросил он Герберта, поднимаясь с земли.

— Да.

— Помнишь свойства подобных треугольников?

— Их сходственные стороны пропорциональны.

— Правильно. Так вот: сейчас я построю два подобных прямоугольных треугольника. У меньшего одним катетом будет отвесный шест, другим — расстояние от колышка до основания шеста; гипотенуза же — мой луч зрения. У другого треугольника катетами будут: отвесная стена, высоту которой мы хотим определить, и расстояние от колышка до основания этой стены; гипотенуза же — мой луч зрения, совпадающий с направлением гипотенузы первого треугольника.

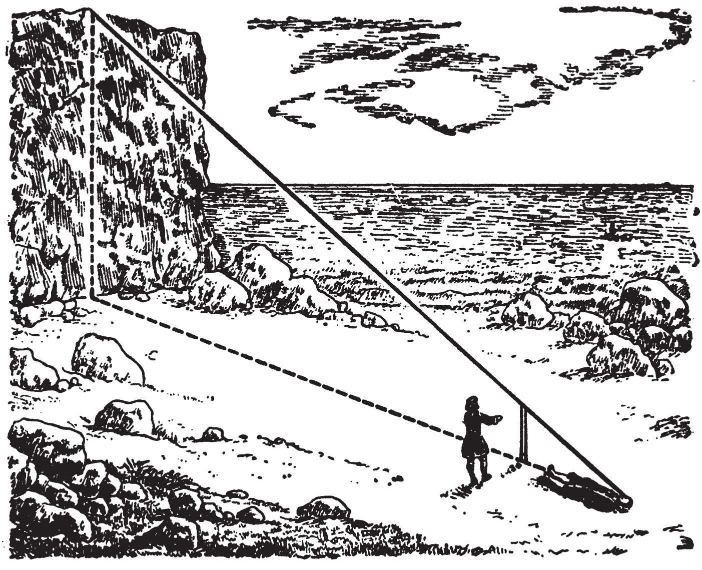

Рис. 7. Как измерили высоту скалы герои Жюля Верна.

— Понял! — воскликнул юноша. — Расстояние от колышка до шеста так относится к расстоянию от колышка до основания стены, как высота шеста к высоте стены.

— Да. И следовательно, если мы измерим два первых расстояния, то, зная высоту шеста, сможем вычислить четвертый, неизвестный член пропорции, т.е. высоту стены. Мы обойдемся, таким образом, без непосредственного измерения этой высоты.

Оба горизонтальных расстояния были измерены: меньшее равнялось 15 футам, большее — 500 футам.

По окончании измерений инженер составил следующую запись:

$$15 : 500 = 10 : x,$$
$$500 \times 10 = 5000,$$
$$5000 : 15 = 333{,}3.$$

Значит, высота гранитной стены равнялась 333 футам».

Как поступил сержант

Некоторые из только что описанных способов измерения высоты неудобны тем, что вызывают необходимость ложиться на землю. Можно, разумеется, избежать такого неудобства.

Вот как однажды было на одном из фронтов Великой Отечественной войны. Подразделению лейтенанта Иванюка было приказано построить мост через горную реку. На противоположном берегу засели фашисты. Для разведки места постройки моста лейтенант выделил разведывательную группу во главе со старшим сержантом Поповым... В ближайшем лесном массиве они измерили диаметр и высоту наиболее типичных деревьев и подсчитали количество деревьев, которые можно было использовать для постройки.

Высоту деревьев определяли при помощи вешки (шеста) так, как показано на рис. 8.

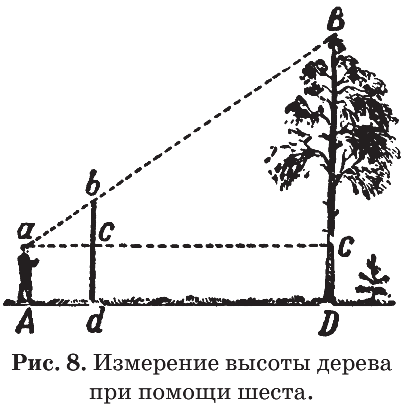

Рис. 8. Измерение высоты дерева при помощи шеста.

Этот способ состоит в следующем.

Запасшись шестом выше своего роста, воткните его в землю отвесно на некотором расстоянии от измеряемого дерева (рис. 8). Отойдите от шеста назад, по продолжению Dd до того места A, с которого, глядя на вершину дерева, вы увидите на одной линии с ней верхнюю точку b шеста. Затем, не меняя положения головы, смотрите по направлению горизонтальной прямой aC, замечая точки c и C, в которых луч зрения встречает шест и ствол. Попросите помощника сделать в этих местах пометки, и наблюдение окончено. Остается только на основании подобия треугольников abc и aBC вычислить BC из пропорции

$$BC : bc = aC : ac,$$

откуда

$$BC = bc \cdot \frac{aC}{ac}.$$

Расстояния bc, aC и ac легко измерить непосредственно. К полученной величине BC нужно прибавить расстояние CD (которое также измеряется непосредственно), чтобы узнать искомую высоту дерева.

Для определения количества деревьев старший сержант приказал солдатам измерить площадь лесного массива. Затем он подсчитал количество деревьев на небольшом участке размером 50×50 кв. м и произвел соответствующее умножение.

На основании всех данных, собранных разведчиками, командир подразделения установил, где и какой мост нужно строить. Мост построили к сроку, боевое задание было выполнено успешно[1].

ПРИ ПОМОЩИ ЗАПИСНОЙ КНИЖКИ

В качестве прибора для приблизительной оценки недоступной высоты вы можете использовать и свою карманную записную книжку, если она снабжена карандашом, всунутым в чехолик или петельку при книжке. Она поможет вам построить в пространстве те два подобных треугольника, из которых получается искомая высота. Книжку надо держать возле глаз так, как показано на упрощенном рис. 9. Она должна находиться в отвесной плоскости, а карандаш выдвигается над верхним обрезом книжки настолько, чтобы, глядя из точки a, видеть вершину B дерева покрытой кончиком

---

[1] Изложенные здесь и далее эпизоды Великой Отечественной войны описаны А. Демидовым в журнале «Военные знания» № 8, 1949, «Разведка реки».

b карандаша. Тогда, вследствие подобия треугольников abc и aBC, высота BC определится из пропорции

$$BC : bc = aC : ac.$$

Расстояния bc, ac и aC измеряются непосредственно. К полученной величине BC надо прибавить еще длину CD, т.е. — на ровном месте — высоту глаза над почвой.

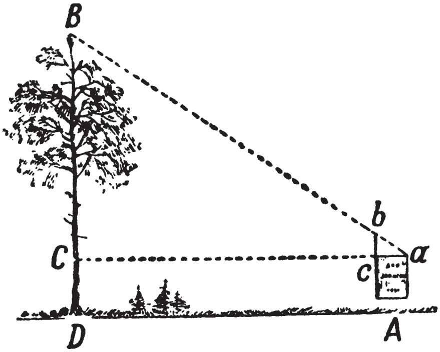

Рис. 9. Измерение высоты дерева при помощи записной книжки.

Так как ширина ac книжки неизменна, то если вы будете всегда становиться на одном и том же расстоянии от измеряемого дерева (например, в 10 м), высота дерева будет зависеть только от выдвинутой части bc карандаша. Поэтому вы можете заранее вычислить, какая высота соответствует тому или иному выдвижению, и нанести эти числа на карандаш. Ваша записная книжка превратится тогда в упрощенный высотомер, так как вы сможете при ее помощи определять высоты сразу, без вычислений.

НЕ ПРИБЛИЖАЯСЬ К ДЕРЕВУ

Случается, что почему-либо неудобно подойти вплотную к основанию измеряемого дерева. Возможно ли в таком случае определить его высоту?

Вполне возможно. Для этого придуман остроумный прибор, который, как и предыдущие, легко изготовить самому. Две планки ab

и *cd* (рис. 10 вверху) скрепляются под прямым углом так, чтобы *ab* равнялось *bc,* а *bd* составляло половину *ab.* Вот и весь прибор. Чтобы измерить высоту, держат прибор в руках, направив планку *cd* вертикально (для чего при ней имеется отвес — шнурок с грузиком), и становятся последовательно в двух местах: сначала (рис. 10) в точке *A,* где располагают прибор концом *c* вверх, а затем в точке *A'*, подальше, где прибор держат вверх концом *d.* Точка *A* избирается так, чтобы, глядя из *a* на конец *c*, видеть его на одной прямой с верхушкой дерева.

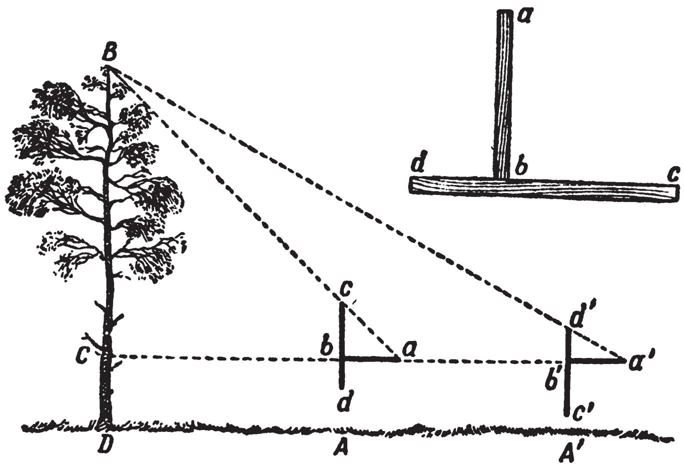

Рис. 10. Применение простейшего высотомера, состоящего из двух планок.

Точку же *A'* отыскивают так, чтобы, глядя из *a'* на точку *d'*, видеть ее совпадающей с *B*. В отыскании этих двух точек *A* и *A'*[1] заключается все измерение, потому что искомая часть высоты дерева *BC* равна расстоянию *AA'*. Равенство вытекает, как легко сообразить, из того, что $aC = BC$, а $a'C = 2BC$, значит,

$$a'C - aC = BC.$$

Вы видите, что, пользуясь этим простым прибором, мы измеряем дерево, не подходя к его основанию ближе его высоты. Само собой разумеется, что если подойти к стволу возможно, то достаточно найти только одну из точек — *A* или *A'*, чтобы узнать его высоту.

[1] Точки эти непременно должны лежать на одной прямой с основанием дерева.