

УДК 373.167.1:51
ББК 22.141я721
М52

Мерзляк А.Г.

М52 Алгебра : дидактические материалы : 8 класс : пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, Е.М. Рабинович и др. — 3-е изд., стереотип. — М. : Вентана-Граф, 2020. — 96 с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-360-11565-6

Дидактические материалы содержат упражнения для самостоятельных и контрольных работ. Они используются в комплекте с учебником «Алгебра. 8 класс» (авт. А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир).

Соответствуют Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.141я721

ISBN 978-5-360-11565-6

© Мерзляк А.Г., Полонский В.Б.,
Рабинович Е.М., Якир М.С., 2014
© Издательский центр «Вентана-Граф»,
2014

Упражнения

Вариант 1

Повторение

- Представьте в виде степени с основанием x выражение:
1) $(x^6)^2$; 3) x^4x^3 ; 5) $(x^{10})^3 \cdot (x^5)^4$;
2) $(-x^5)^4$; 4) $((x^3)^2)^5$; 6) $(-x^6)^7 \cdot (-x^3)^3 : x^{15}$.
- Упростите выражение:
1) $(x - 2)(x - 11) - 2x(4 - 3x)$;
2) $(a + 6)(a - 3) + (a - 4)(a + 5)$;
3) $(y - 8)(2y - 1) - (3y + 1)(5y - 2)$;
4) $(x + 2)^2 - (x - 3)(x + 3)$;
5) $(7a - 5b)(7a + 5b) - (4a + 7b)^2$;
6) $(y - 2)(y + 3) - (y - 1)^2 + (5 - y)(y + 5)$.
- Разложите на множители:
1) $8a - 12b$; 6) $12x^2y - 3xy$;
2) $3a - ab$; 7) $21a^2b + 28ab^2$;
3) $6ax + 6ay$; 8) $-3x^6 + 12x^{12}$;
4) $4a^2 + 8ac$; 9) $4a^2 - 8a^3 + 12a^4$;
5) $a^5 + a^2$; 10) $6m^3n^2 + 9m^2n - 18mn^2$.
- Разложите на множители:
1) $5a + 5b - am - bm$; 4) $10a^2b - 2a^2 + 5ab^2 - ab$;
2) $6m - mn - 6 + n$; 5) $2x^3 - 3x^2y - 4x + 6y$;
3) $a^6 + a^4 - 3a^2 - 3$; 6) $x^2y - x + xy^2 - y$.
- Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена:
1) $a^2 + 8a + 16$; 4) $24ab + 36a^2 + 4b^2$;
2) $9x^2 - 6x + 1$; 5) $a^6 - 4a^3b + 4b^2$;
3) $121m^2 - 88mn + 16n^2$; 6) $25p^{10} + q^8 + 10p^5q^4$.
- Разложите на множители:
1) $x^2 - 4$; 5) $x^2y^2 - \frac{4}{9}$;
2) $25 - 9a^2$; 6) $a^4 - b^6$;
3) $36m^2 - 100n^2$; 7) $0,01c^2 - d^8$;
4) $0,04p^2 - 1,69q^2$; 8) $-1 + a^4b^8$.
- Разложите на множители:
1) $c^3 + 8$; 3) $125 + a^3b^3$;
2) $27a^3 - b^3$; 4) $x^6 - y^9$.

8. Разложите на множители:

1) $6a^3 - 6a$;

5) $-8a^5 + 8a^3 - 2a$;

2) $5x^3 - 5xy^2$;

6) $5a^3 - 40b^6$;

3) $8a^2b^2 - 72a^2c^8$;

7) $a - 3b + a^2 - 9b^2$;

4) $3x^2 - 48xy + 192y^2$;

8) $ac^4 - c^4 - ac^2 + c^2$.

Рациональные дроби

9. Найдите значение выражения:

1) $\frac{2a + b}{3a - 4b}$, если $a = -6$, $b = 3$;

2) $\frac{x^2 - 3x}{8x - 3}$, если $x = 0,6$.

10. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

1) $3x + 4$;

5) $\frac{3}{x^2 - 1}$;

9) $\frac{x - 2}{x^2 + 6x + 9}$;

2) $\frac{b - 9}{8}$;

6) $\frac{2}{x^2 + 1}$;

10) $\frac{4}{x - 1} + \frac{7x}{x - 4}$;

3) $\frac{8}{b - 9}$;

7) $\frac{4}{|x| - 1}$;

11) $\frac{7}{x(x - 1)}$;

4) $\frac{5 + x}{3 + x}$;

8) $\frac{x}{|x| + 2}$;

12) $\frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$?

11. Запишите рациональную дробь, содержащую переменную x , допустимыми значениями которой являются:

1) все числа, кроме 6;

2) все числа, кроме -4 и 0 ;3) все числа, кроме -10 , -8 и 1 ;

4) все числа.

12. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной a значение дроби:

1) $\frac{a^2 + 6a + 10}{a^2 - 10a + 25}$ положительное;

2) $\frac{4a - 4 - a^2}{a^4 + 1}$ неположительное.

Основное свойство рациональной дроби

13. Сократите дробь:

- 1) $\frac{4a}{12b}$; 3) $\frac{10m^2}{15m^3}$; 5) $\frac{36m^3n^4}{24m^2n^6}$;
 2) $\frac{8xy}{2xz}$; 4) $\frac{3a^2bc}{18abc^3}$; 6) $\frac{39p^5q^8}{65p^8q^5}$.

14. Сократите дробь:

- 1) $\frac{4a + 8b}{4a}$; 6) $\frac{b^5 - b^3}{b^2 - b^4}$;
 2) $\frac{5x - 10y}{3x - 6y}$; 7) $\frac{a^3 - 27}{8a - 24}$;
 3) $\frac{x^2 - 25}{2x - 10}$; 8) $\frac{6a^2 + 6a + 6}{18a^3 - 18}$;
 4) $\frac{6x^2 - 3x}{4 - 8x}$; 9) $\frac{ax - ay - 3x + 3y}{9 - a^2}$.
 5) $\frac{m^2 - 16}{m^2 + 8m + 16}$;

15. Найдите значение выражения:

- 1) $\frac{a^8b^3 + a^6b^5}{a^6b^3}$, если $a = 0,3$, $b = -0,4$;
 2) $\frac{7c^3 - 28c}{12c + 12c^2 + 3c^3}$, если $c = 5$;
 3) $\frac{(2x - 2y)^2}{2x^2 - 2y^2}$, если $x = 0,2$, $y = -0,4$;
 4) $\frac{4x^2 - 40xy + 100y^2}{15y - 3x}$, если $x - 5y = 0,6$.

16. Приведите дробь:

- 1) $\frac{a}{b^2}$ к знаменателю b^6 ;
 2) $\frac{m}{3n}$ к знаменателю $15n^2p$;
 3) $\frac{6}{7x^2y}$ к знаменателю $28x^3y^2$;
 4) $\frac{5}{a-3}$ к знаменателю $2a - 6$;

5) $\frac{7}{a+2}$ к знаменателю $a^2 + 2a$;

6) $\frac{b+1}{b-4}$ к знаменателю $b^2 - 16$.

17. Постройте график функции:

1) $y = \frac{x}{x}$;

5) $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$;

2) $y = \frac{x-2}{x-2}$;

6) $y = \frac{(x-2)^4}{(2-x)^3}$;

3) $y = x + \frac{x+1}{x+1}$;

7) $y = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+2}$;

4) $y = \frac{x-1}{x-1} - 2x$;

8) $y = \frac{4x^2 + 12x + 9}{2x + 3} - \frac{x^2 + 5x}{x}$.

18. Решите уравнение:

1) $\frac{x+5}{x+5} = 1$;

2) $\frac{x^2-4}{x-2} = 4$;

3) $\frac{x-8}{|x|-8} = 0$.

19. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $(a-5)x = 1$;

3) $(a-7)x = a^2 - 14a + 49$;

2) $(a+4)x = a+4$;

4) $(a^2-1)x = a+1$.

Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями

20. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{3a}{10} + \frac{2a}{10}$;

4) $\frac{2a+5b}{ab} - \frac{2a-3b}{ab}$;

2) $\frac{6x}{5y} - \frac{x}{5y}$;

5) $\frac{5y}{y^2-9} - \frac{15}{y^2-9}$;

3) $\frac{2m-4n}{21c} + \frac{5m+18n}{21c}$;

6) $\frac{y^2+8y}{4-y^2} - \frac{4y-4}{4-y^2}$.

21. Упростите выражение:

1) $\frac{x-4}{x-2} - \frac{x}{2-x}$;

3) $\frac{(2a-1)^2}{6a-6} + \frac{(a-2)^2}{6-6a}$;

2) $\frac{5x+6}{5-x} + \frac{3x+16}{x-5}$;

4) $\frac{16-7x}{(x-4)^2} - \frac{x-x^2}{(4-x)^2}$.

22. Запишите дробь в виде суммы целого выражения и дроби:

1) $\frac{y+4}{y}$; 2) $\frac{a^2-3a+4}{a-3}$; 3) $\frac{x^2+4x-8}{x-4}$.

23. Найдите все натуральные значения n , при которых является целым числом значение выражения:

1) $\frac{6n^2+4n+10}{n}$; 2) $\frac{n^3-5n^2+32}{n^2}$; 3) $\frac{6n+2}{2n-3}$.

Сложение и вычитание рациональных дробей
с разными знаменателями

24. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{4}{a} + \frac{7}{b}$; 4) $\frac{5m}{3ab} + \frac{2n}{5a^2b} - \frac{7p}{2ab^2}$;
2) $\frac{9}{m} - \frac{5}{mn}$; 5) $\frac{3a-4b}{a} + \frac{8a^2+4b^2}{ab}$;
3) $\frac{4}{12xy} - \frac{11}{18xy}$; 6) $\frac{3c^2-2c+4}{bc^2} - \frac{2c-9}{bc}$.

25. Выполните действия:

1) $\frac{x-3}{3x+6} - \frac{x-6}{x+2}$; 4) $\frac{3x}{4x-4} + \frac{5x}{7-7x}$;
2) $\frac{m+4}{5m-10} + \frac{3-m}{4m-8}$; 5) $\frac{2b}{2b+c} - \frac{4b^2}{4b^2+4bc+c^2}$;
3) $\frac{y+6}{y-6} - \frac{y+2}{y+6}$; 6) $\frac{2}{a^2-9} - \frac{1}{a^2+3a}$.

26. Представьте в виде дроби выражение:

1) $\frac{a}{b} - 1$; 4) $\frac{4c+3}{c-1} - 3$;
2) $\frac{8}{x^2} - \frac{3}{x} + 2$; 5) $\frac{a^2+b^2}{2a-b} + 2a+b$;
3) $5 - \frac{4m+5n}{n}$; 6) $m - \frac{25}{m-5} - 5$.

27. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b-a}$; 2) $\frac{x+7}{3x+12} - \frac{2}{x} + \frac{7x+40}{3x^2+12x}$;

- 3) $\frac{a-1}{3a^2+6a+3} - \frac{1}{2a+2}$;
 4) $\frac{y+6}{4y+8} - \frac{y+2}{4y-8} + \frac{5}{y^2-4}$;
 5) $\frac{a+3}{a^2+3a+9} - \frac{1}{a-3} + \frac{a^3+3a-9}{a^3-27}$.

Умножение и деление рациональных дробей.
Возведение рациональной дроби в степень

28. Выполните умножение:

- 1) $\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{12x}$; 4) $18y^3 \cdot \frac{4x^2}{9y^5}$;
 2) $\frac{a^3b}{15c} \cdot \left(-\frac{3c}{a^2b^2}\right)$; 5) $\frac{28m^5}{23n^4} \cdot 46n^6$;
 3) $\frac{24p^6}{35q^4} \cdot \frac{49q}{16p^4}$; 6) $\frac{2a^4b}{9c^2d} \cdot \frac{15a^2d^5}{16b^3c} \cdot \frac{12c^3b^2}{35a^5d^4}$.

29. Упростите выражение:

- 1) $\frac{ab-b^2}{8} \cdot \frac{32a}{b^3}$;
 2) $\frac{m^2-mn}{m^2+mn} \cdot \frac{m^2n+mn^2}{m^3-m^2n}$;
 3) $\frac{x^2-16}{x^3-3x^2} \cdot \frac{x^2-9}{x^2+4x}$;
 4) $\frac{5y^2-20y+20}{y^3-1} \cdot \frac{3y^2+3y+3}{10y-20}$.

30. Выполните возведение в степень:

- 1) $\left(\frac{m^6}{n^3}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{3a}{2b^2}\right)^4$; 3) $\left(-\frac{5a^3b^4}{3c^5d^7}\right)^3$.

31. Выполните деление:

- 1) $\frac{16x^3}{9y^4} : \frac{8x^8}{27y^6}$; 4) $\frac{48x^4y^3}{49z^9} : (16x^7y^8)$;
 2) $\frac{18m^3n^4}{25p^6q^{10}} : \left(-\frac{4m^2n^9}{75p^5q^{12}}\right)$; 5) $\frac{11a^5b^{12}}{12cd^6} : \frac{55a^3b^2}{18c^7d^4} : \frac{21b^6d^2}{20a^7c^3}$;
 3) $28a^{18}b^{19} : \frac{14a^{20}b^{15}}{15c^4}$; 6) $\left(-\frac{2p^4q^2}{5m^8}\right)^3 : \left(-\frac{2p^5q^3}{5m^6}\right)^4$.

32. Выполните деление:

$$1) \frac{x+1}{3x} : \frac{x^2+2x+1}{9x^2}; \quad 3) (n-7) : \frac{n^2-14n+49}{n^2-49};$$

$$2) \frac{x^2-2x}{3x+3} : \frac{5x-10}{x+1}; \quad 4) \frac{a^2-4b^2}{9a^2-b^2} : \frac{a^2+4ab+4b^2}{9a^2-6ab+b^2}.$$

33. Известно, что $x - \frac{1}{x} = 5$. Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

34. Известно, что $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$. Найдите значение выражения $x + \frac{1}{x}$.

Тождественные преобразования
рациональных выражений

35. Упростите выражение:

$$1) \left(\frac{a-2}{a+2} - \frac{a+2}{a-2} \right) : \frac{12a^2}{4-a^2};$$

$$2) \left(\frac{8x}{x-2} + 2x \right) : \frac{4x+8}{7x-14};$$

$$3) \frac{5a}{a+3} + \frac{a-6}{3a+9} \cdot \frac{135}{6a-a^2};$$

$$4) \left(\frac{3m}{m+5} - \frac{8m}{m^2+10m+25} \right) : \frac{3m+7}{m^2-25} + \frac{5m-25}{m+5};$$

$$5) \left(\frac{y^2}{x^3-xy^2} + \frac{1}{x+y} \right) : \left(\frac{x-y}{x^2+xy} - \frac{x}{xy+y^2} \right);$$

$$6) \left(\frac{a}{a-4} - \frac{a}{a+4} - \frac{a^2+16}{16-a^2} \right) : \frac{4a+a^2}{(4-a)^2}.$$

36. Докажите тождество:

$$1) \frac{b+2}{b^2-2b+1} : \frac{b^2-4}{3b-3} - \frac{3}{b-2} = \frac{3}{1-b};$$

$$2) \left(\frac{1}{(a-2)^2} + \frac{2}{a^2-4} + \frac{1}{(a+2)^2} \right) : \frac{2a}{(a^2-4)^2} = 2a.$$

37. Докажите, что при всех допустимых значениях a значение выражения

$$\left(\frac{1}{a+3} - \frac{27}{a^3+27} + \frac{9}{a^2-3a+9} \right) \cdot \left(a - \frac{6a-9}{a+3} \right)$$

не зависит от значения a .

38. Упростите выражение:

$$1) \frac{m - \frac{14m-49}{m}}{\frac{7}{m} - 1}; \quad 2) \frac{\frac{b}{b-1} - \frac{b+1}{b}}{\frac{b}{b+1} - \frac{b-1}{b}}.$$

Равносильные уравнения.

Рациональные уравнения

39. Равносильны ли уравнения:

1) $x - 3 = 5$ и $7x = 56$;
 2) $x + 2 = 0$ и $x(x + 2) = 0$;
 3) $x^2 = -1$ и $|x| = -2$;
 4) $x + 3 = 3 + x$ и $\frac{x+3}{x+3} = 1$?

40. Составьте уравнение, равносильное данному:

1) $3x - 2 = 7$; 2) $|x| = 2$; 3) $x - 1 = x + 3$.

41. Решите уравнение:

1) $\frac{x+4}{x-1} = 0$; 5) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{2x-1}{2x+1}$;
 2) $\frac{x^2-9}{x-3} = 0$; 6) $\frac{3x-5}{x-1} - \frac{2x-5}{x-2} = 1$;
 3) $\frac{x+5}{x^2-25} = 0$; 7) $\frac{x^2+9}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1} - \frac{5}{1-x}$;
 4) $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+4} = 0$; 8) $\frac{1}{x^2-6x} + \frac{1}{x^2+6x} = \frac{2x}{x^2-36}$.

42. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $\frac{x-3}{x-a} = 0$; 3) $\frac{a(x-a)}{x-2} = 0$;
 2) $\frac{x-a}{x-2} = 0$; 4) $\frac{(x-5)(x+6)}{x-a} = 0$.

Степень с целым отрицательным показателем

43. Вычислите:

- 1) 12^{-2} ; 4) $(-5)^{-3}$; 7) $\left(-\frac{7}{9}\right)^{-2}$; 10) $1,6^{-2}$.
 2) 3^{-4} ; 5) $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-1}$; 8) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-1}$;
 3) $(-2)^{-6}$; 6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; 9) $0,3^{-2}$;

44. Найдите значение выражения:

- 1) $10^{-1} + 5^{-2}$; 3) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 2^{-3}$.
 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} + (-1,7)^0 - 2^{-3}$;

45. Преобразуйте выражение так, чтобы оно не содержало степеней с отрицательными и нулевыми показателями:

- 1) $\frac{2a^{-5}c^{-3}d^{10}}{5xy^{-20}z^4}$; 2) $\frac{3^{-1}a^3b^{-5}c^{-7}}{2,6^0x^{-5}y^0z^{-30}}$.

46. Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

- 1) 28 000; 4) 0,00007; 7) $39 \cdot 10^7$;
 2) 12; 5) 0,21; 8) $45 \cdot 10^{-4}$.
 3) 0,0034; 6) $320 \cdot 10^3$;

47. Число, представленное в стандартном виде, запишите в виде натурального числа или десятичной дроби:

- 1) $3,5 \cdot 10^3$; 2) $1,6 \cdot 10^{-3}$.

48. Сравните:

- 1) $8,6 \cdot 10^{10}$ и $2,3 \cdot 10^{11}$; 3) $1,23 \cdot 10^6$ и $0,12 \cdot 10^7$;
 2) $4,7 \cdot 10^{-6}$ и $5,9 \cdot 10^{-7}$; 4) $31,6 \cdot 10^{-8}$ и $0,061 \cdot 10^{-6}$.

49. Порядок некоторого натурального числа равен 5. Сколько цифр содержит десятичная запись этого числа?

50. Десятичная запись некоторого натурального числа состоит из шести цифр. Чему равен порядок этого числа?

Свойства степени с целым показателем

51. Представьте выражение в виде степени с основанием a или произведения степеней с разными основаниями: