

АЛГЕБРА

Раздел I

ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

1. Запись натуральных чисел. Числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., используемые для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называются *натуральными*. Любое натуральное число в десятичной системе счисления записывается с помощью *цифр* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например, запись 2457 означает, что 2 — цифра тысяч, 4 — цифра сотен, 5 — цифра десятков и 7 — цифра единиц, т. е.

$$2457 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7.$$

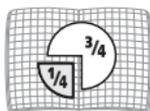
Вообще, если a — цифра тысяч, b — цифра сотен, c — цифра десятков и d — цифра единиц, то имеем

$$a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d.$$

Используется также сокращенная запись \overline{abcd} (написать $abcd$ нельзя, поскольку такая запись означает произведение чисел a, b, c, d).

В общей форме для m -значного числа a_m справедлива запись

$$a_m = c_1 \cdot 10^{m-1} + c_2 \cdot 10^{m-2} + \dots + c_{m-1} \cdot 10 + c_m,$$



или

$$a_m = \overline{c_1 c_2 \dots c_{m-1} c_m},$$

где

$c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m$ — цифры.

2. Арифметические действия над натуральными числами. Результатом сложения или умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число: если m, n — натуральные числа, то $p = m + n$ также натуральное число, m и n — *слагаемые*, p — *сумма*; $p = mn$ также натуральное число, m, n — *множители*, p — *произведение*.

Справедливы следующие свойства:

1⁰. $a + b = b + a$ (*переместительное свойство сложения*);

2⁰. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (*сочетательное свойство сложения*);

3⁰. $ab = ba$ (*переместительное свойство умножения*);

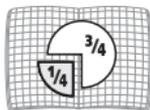
4⁰. $(ab)c = a(bc)$ (*сочетательное свойство умножения*);

5⁰. $a(b + c) = ab + ac$ (*распределительное свойство умножения относительно сложения*).

В результате вычитания или деления натуральных чисел не всегда получается натуральное число.

Если m, n, k — натуральные числа, то при $m - n = k$ говорят, что m — *уменьшаемое*, n — *вычитаемое*, k — *разность*; при $m : n = k$ говорят, что m — *делимое*, n — *делитель*, k — *частное*; число m называют также *кратным* числа n , а число n — *делителем* числа m . Если m — кратное числа n , то существует натуральное число k такое, что $m = kn$.

Из чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок составляют *числовые выражения*. Если в числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая принятый порядок, то получится число, которое называется *значением выражения*.



Итак, частное 1456, а остаток 21. Воспользовавшись равенством (1), можем записать:

$$36\ 421 = 25 \cdot 1456 + 21.$$

Заметим, что этот пример можно решить и по-другому, не используя деление «углом», а непосредственно используя формулу (1). Имеем $36\ 421 = 36\ 400 + 21 = 25 \cdot 1456 + 21$. Значит, 1456 — частное, а 21 — остаток. ■

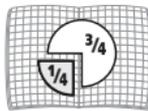
4. Разложение натурального числа на простые множители. Если число имеет только два делителя — само себя и единицу, то оно называется *простым*; если число имеет более двух делителей, то оно называется *составным*; число 1 не относят ни к простым, ни к составным. Так, число 37 простое, оно имеет только два делителя: 1 и 37; число 36 составное, оно имеет более двух делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Простое число 37 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только одним способом (если не учитывать порядок множителей): $37 = 1 \cdot 37$; составное число 36 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел более чем одним способом: $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12$ и т. д. Однако в виде произведения простых множителей составное число 36 можно представить только одним способом: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Т.1.1. Любое составное число можно разложить на простые множители, причем только одним способом.

Если в разложении числа на простые множители один и тот же множитель a встречается n раз, то записывают кратко: a^n , т. е.

$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$. Выраже-

n



§ 1. Натуральные числа

ние a^n называют *степенью*, a — *основанием степени*, n — *показателем степени*.

Поэтому можно записать:

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

5. Наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 72 и 96. Выпишем все делители числа 72:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.$$

Выпишем все делители числа 96:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.$$

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.$$

Все эти числа называют *общими делителями* чисел 72 и 96, а наибольшее из них — *наибольшим общим делителем*.

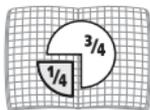
Для любых заданных натуральных чисел a и b можно найти наибольший общий делитель. Он обозначается $D(a, b)$ (читается: «D от a, b »). Если числа a и b таковы, что $D(a, b) = 1$, то они называются *взаимно простыми*.

Например, взаимно простыми являются числа 72 и 35 (хотя каждое из них — составное число).

Чтобы найти наибольший общий делитель нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение общих простых множителей, взяв каждый из них с наименьшим (из имеющихся) показателем.

П р и м е р. Найти $D(3780, 7056)$.

□ Имеем $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$, $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Тогда $D(3780, 7056) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$; взяты те простые множители, которые входят и в разложение числа 3780, и в разложение числа 7056. ■



6. Наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел. Пусть даны числа 12 и 18. Выпишем несколько чисел, кратных числу 12:

12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

Выпишем числа, кратные 18:

18, 36, 54, 72, ...

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

36, 72, ...

Такие числа называют *общими кратными* чисел 12 и 18, а наименьшее из них (число 36) — *наименьшим общим кратным*.

Аналогично определяется наименьшее общее кратное произвольных чисел a и b , оно обозначается $K(a, b)$ (читается: « K от a , b »). Любое общее кратное чисел a и b делится на $K(a, b)$.

Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение всех полученных простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим (из имеющихся) показателем.

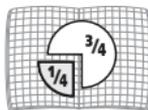
Пример. Найти $K(3780, 7056)$.

□ Имеем $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$; $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ (см. п. 5). Тогда $K(3780, 7056) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$, т. е. взяты все простые множители, которые входят в разложение хотя бы одного из чисел 3780 и 7056. Итак, $K(3780, 7056) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 105\,840$. ■

Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство

$$D(a, b) \cdot K(a, b) = ab.$$

Если, в частности, числа a и b взаимно простые, т. е. $D(a, b) = 1$, то $K(a, b) = ab$. Это значит, что *наименьшее общее кратное двух взаимно простых*



§ 1. Натуральные числа

чисел равно произведению этих чисел. Например, $K(15, 16) = 15 \cdot 16 = 240$.

7. Признаки делимости. В некоторых случаях, не выполняя деления натурального числа n на натуральное число a , можно ответить на вопрос, делится ли n на a без остатка или нет. Это достигается с помощью различных признаков делимости.

Иногда удобно пользоваться сокращенной записью $n : a$, означающей, что натуральное число n делится на натуральное число a (без остатка).

Т.1.2. Если в сумме натуральных чисел каждое слагаемое делится на натуральное число a , то и вся сумма делится на число a (теорема о делимости суммы).

Кратко это можно записать так:

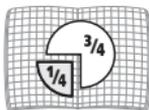
если $m : a$, $n : a$, $k : a$, то и $(m + n + k) : a$.

Однако не следует считать, что если каждое слагаемое суммы не делится на какое-то число, то и сумма не делится на это число. Например, сумма $37 + 19$ делится на 4, хотя ни 37, ни 19 не являются кратными числа 4. Вместе с тем, заметим, что если все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число.

Т.1.3. Если в произведении хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число (теорема о делимости произведения).

Например, не выполняя умножения, можно утверждать, что произведение $105 \cdot 48 \cdot 93 \cdot 54$ делится на 5, так как 105 делится на 5.

Т.1.4. Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2 (признак делимости на 2).



Т.1.5. *Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5 (признак делимости на 5).*

Т.1.6. *Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 (признак делимости на 10).*

Т.1.7. *Натуральное число, содержащее не менее трех цифр, делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа (признак делимости на 4).*

Например, 4724 делится на 4, так как двузначное число 24 делится на 4; 4318 не делится на 4, поскольку двузначное число 18 не делится на 4.

Т.1.8. *Натуральное число, содержащее не менее трех цифр, делится на 25 тогда и только тогда, когда делится на 25 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа (признак делимости на 25).*

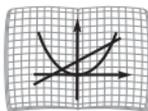
Т.1.9. *Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (признак делимости на 3).*

Например, 27 426 делится на 3, поскольку сумма его цифр, т. е. число 21, делится на 3. В то же время 17 945 не делится на 3, так как сумма его цифр, т. е. число 26, не делится на 3.

Т.1.10. *Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9 (признак делимости на 9).*

Т.1.11. *Если натуральное число n имеет своими делителями числа a и b , то оно делится и на их наименьшее кратное.*

П р и м е р. Не выполняя деления, установить, делится ли 26 775 на 225.



§ 12. Виды функций

□ Функция $y = 2x - 1$ возрастает на всей числовой прямой, значит, у нее есть обратная функция. Чтобы найти эту обратную функцию, надо решить уравнение $2x - 1 = y$ относительно x . Имеем $x = 0,5(y + 1)$. Поменяв x и y местами, получим $y = 0,5(x + 1)$. Это и есть искомая обратная функция. ■

Если точка $(x; y)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, то точка $(y; x)$ принадлежит графику обратной функции. Поэтому график обратной функции получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования плоскости xOy , переводящего точку $(x; y)$ в точку $(y; x)$. Этим преобразованием является симметрия относительно прямой $y = x$.

Таким образом, чтобы построить график функции, обратной функции $y = f(x)$, надо график функции $y = f(x)$ преобразовать симметрично относительно прямой $y = x$ (рис. 40, а).

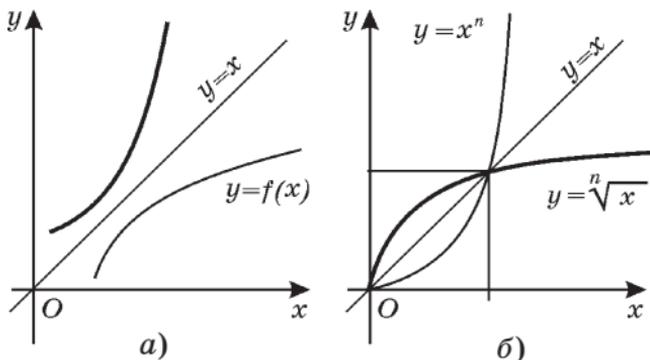
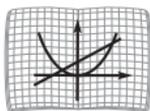


Рис. 40



Например, если $y = x^n$, где $x \geq 0$, n — натуральное, $n > 1$, то $x = \sqrt[n]{y}$. Поменяв x и y местами, получим $y = \sqrt[n]{x}$. Графики двух взаимно обратных функций $y = x^n$ и $y = \sqrt[n]{x}$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 40, б).

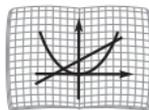
116. Логарифмическая функция. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, обладает всеми свойствами, которые гарантируют существование обратной функции (см. теорему 3.4): 1) область определения — вся числовая прямая; 2) множество значений — промежуток $(0, +\infty)$; 3) функция $y = a^x$ возрастает при $a > 0$ и убывает при $0 < a < 1$.

Указанные свойства обеспечивают существование функции, обратной показательной, определенной на $(0, +\infty)$ и имеющей в качестве множества своих значений всю числовую прямую.

Эта обратная функция обозначается так: $y = \log_a x$ (читается: «логарифм числа x по основанию a »). Итак, **логарифмическая функция** $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, — это функция, обратная показательной функции $y = a^x$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ обладает следующими свойствами (они вытекают из теоремы 3.4):

- 1⁰. Область определения — луч $(0, +\infty)$.
- 2⁰. Множество значений — вся числовая прямая.
- 3⁰. Функция ни четная, ни нечетная.



4°. Функция возрастает на промежутке $(0, +\infty)$ при $a > 1$, убывает на $(0, +\infty)$ при $0 < a < 1$.

5°. Ось Oy является вертикальной асимптотой графика (если $a > 1$, то $y \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow 0$, а если $0 < a < 1$, то $y \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 0$).

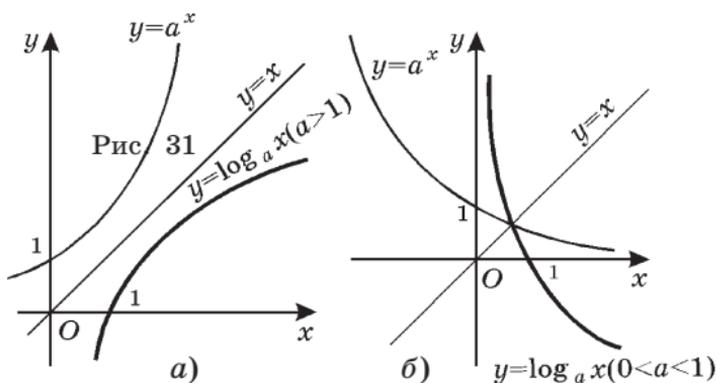
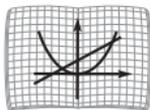


Рис. 41

График функции $y = \log_a x$ можно получить из графика функции $y = a^x$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой $y = x$. На рис. 41, а построен график логарифмической функции для $a > 1$, а на рис. 41, б — для $0 < a < 1$.

117. Число e . Функция $y = e^x$. Функция $y = \ln x$. Среди показательных функций $y = a^x$, где $a > 1$, особый интерес для математики и ее приложений представляет функция, обладающая следующим свойством: касательная к графику функции



(см. п. 224) в точке $(0; 1)$ образует с осью Ox угол 45° (рис. 42). Основание a такой функции $y = a^x$ принято обозначать буквой e , т. е. $y = e^x$. Подсчитано, что $e = 2,7182818284590\dots$, и установлено, что e — иррациональное число, которое можно представить как следующую сумму:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} + \dots$$

Именно с помощью этого равенства и находят значение числа e с любой точностью.

Функцию $y = e^x$ иногда называют *экспонентой*.

Логарифмическую функцию, обратную экспоненте $y = e^x$, т. е. функцию $y = \log_e x$, принято обозначать $y = \ln x$ (где \ln читается: «*натуральный логарифм*»). Графики функций $y = e^x$ и $y = \ln x$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 43).

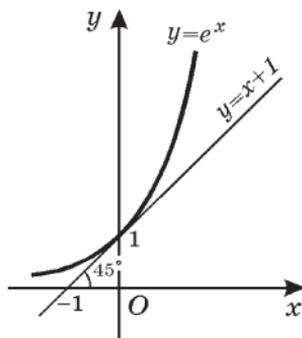


Рис. 42

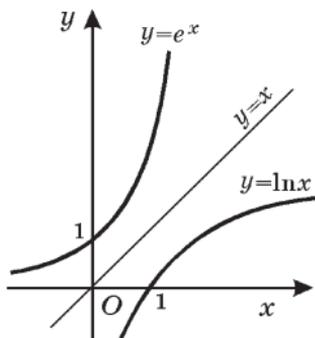


Рис. 43

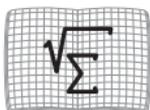
СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
-------------------	---

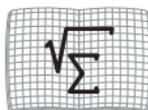
АЛГЕБРА

Раздел I. Числа

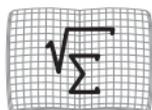
§ 1. Натуральные числа	5
1. Запись натуральных чисел	5
2. Арифметические действия над натуральными числами	6
3. Деление с остатком	7
4. Разложение натурального числа на простые множители	8
5. Наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел	9
6. Наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел	10
7. Признаки делимости	11



8. Употребление букв в алгебре. Переменные	13
§ 2. Рациональные числа	13
9. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Смешанные числа ...	13
10. Равенство дробей. Основное свойство дроби. Сокращение дробей	15
11. Приведение дробей к общему знаменателю	16
12. Арифметические действия над обыкновенными дробями	18
13. Десятичные дроби	21
14. Арифметические действия над десятичными дробями	22
15. Проценты	25
16. Обращение обыкновенной дроби в бесконечную десятичную периодическую дробь	26
17. Обращение бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь	28
18. Координатная прямая	29
19. Множество рациональных чисел	30
§ 3. Действительные числа	31
20. Иррациональные числа	31
21. Множество действительных чисел. Числовая прямая	32
22. Числовая плоскость. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве	33



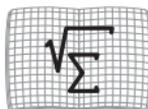
23. Полярная система координат	35
24. Обозначения некоторых числовых множеств. Основные понятия, связанные с множествами	37
25. Сравнение действительных чисел	38
26. Свойства числовых неравенств	39
27. Числовые промежутки	40
28. Модуль действительного числа	42
29. Формула расстояния между двумя точками координатной прямой	42
30. Правила действий над действительными числами	44
31. Свойства арифметических действий над действительными числами	44
32. Пропорции	45
33. Целая часть числа. Дробная часть числа	46
34. Степень с натуральным показателем	46
35. Степень с нулевым показателем. Степень с отрицательным показателем	47
36. Стандартный вид положительного действительного числа	47
37. Определение арифметического корня. Свойства арифметических корней	48
38. Корень нечетной степени из отрицательного числа	50
39. Степень с дробным показателем	50
40. Свойства степеней с рациональными показателями	51
41. Приближенные значения чисел. Абсолютная и относительная погрешности	52



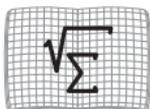
42. Десятичные приближения действительного числа по недостатку и по избытку	54
43. Понятие о степени с иррациональным показателем	55
44. Свойства степеней с действительными показателями	55
§ 4. Комплексные числа	56
45. Понятие о комплексном числе	56
46. Арифметические операции над комплексными числами	57
47. Алгебраическая форма комплексного числа	58
48. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме	59
49. Геометрическое изображение комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа	61
50. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме	63

Раздел II. Выражения

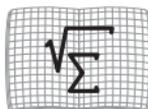
§ 5. Основные понятия	68
51. Виды алгебраических выражений	68
52. Допустимые значения переменных. Область определения алгебраического выражения	69
53. Понятие тождественного преобразования выражения. Тождество	70



§ 6. Целые рациональные выражения	71
54. Одночлены и операции над ними	71
55. Многочлены. Приведение многочленов к стандартному виду	73
56. Формулы сокращенного умножения	75
57. Разложение многочленов на множители	76
58. Многочлены от одной переменной	79
59. Деление многочленов. Схема Горнера. Теорема Безу	80
60. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители	84
61. Разложение на множители двучлена $x^n - a^n$	85
62. Возведение двучлена в натуральную степень (формула бинома Ньютона)	85
§ 7. Дробные рациональные выражения	86
63. Рациональная дробь и ее основное свойство	86
64. Сокращение рациональных дробей	88
65. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю	89
66. Сложение и вычитание рациональных дробей	90
67. Умножение и деление рациональных дробей	91
68. Возведение рациональной дроби в целую степень	93
69. Преобразование рациональных выражений	94



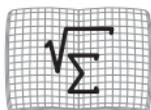
§ 8. Иррациональные выражения	96
70. Простейшие преобразования арифметических корней (радикалов)	96
71. Тождество $\sqrt{a^2} = a $	98
72. Преобразование иррациональных выражений	99
§ 9. Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком логарифма	100
73. Понятие трансцендентного выражения.	100
74. Определение логарифма положительного числа по данному основанию	101
75. Свойства логарифмов	101
76. Логарифмирование и потенцирование	103
77. Десятичный логарифм. Характеристика и мантисса десятичного логарифма	104
§ 10. Формулы тригонометрии и их использование для преобразования тригонометрических выражений	106
78. Тригонометрические выражения	106
79. Формулы сложения и вычитания аргументов	106
80. Формулы приведения	108
81. Соотношения между тригонометричес- кими функциями одного и того же аргумента	109
82. Формулы двойного угла	111
83. Формулы понижения степени	112



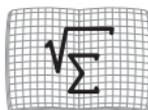
84. Выражение $\sin t$, $\cos t$ и $\operatorname{tg} t$ через $\operatorname{tg} \frac{t}{2}$	114
85. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение	115
86. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму	116
87. Преобразование выражения $a \cos t + b \sin t$ к виду $A \sin(t + \alpha)$	117
88. Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции	118

Раздел III. Функции и графики

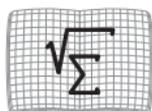
§ 11. Свойства функций	120
89. Определение функции	120
90. Аналитическое задание функции	121
91. Табличное задание функции	122
92. Графическое задание функции	122
93. График функции, заданной аналитически	124
94. Четные и нечетные функции	125
95. Графики четной и нечетной функций	126
96. Периодические функции	128
97. Возрастающие и убывающие функции	129
§ 12. Виды функций	130
98. Постоянная функция	130
99. Прямая пропорциональность	131



100. Линейная функция	131
101. Взаимное расположение графиков линейных функций	133
102. Обратная пропорциональность	134
103. Функция $y = x^2$	136
104. Функция $y = x^3$	136
105. Степенная функция с натуральным показателем	137
106. Степенная функция с целым отрицательным показателем	139
107. Функция $y = \sqrt{x}$	140
108. Функция $\sqrt[3]{x}$	141
109. Функция $\sqrt[n]{x}$	142
110. Степенная функция с положительным дробным показателем	142
111. Степенная функция с отрицательным дробным показателем	143
112. Функция $y = [x]$	144
113. Функция $y = \{x\}$	144
114. Показательная функция	145
115. Обратная функция. График обратной функции	146
116. Логарифмическая функция	150
117. Число e . Функция $y = e^x$. Функция $y = \ln x$	151



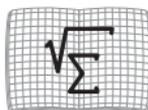
118. Определение тригонометрических функций	153
119. Знаки тригонометрических функций по четвертям	155
120. Исследование тригонометрических функций на четность, нечетность	155
121. Периодичность тригонометрических функций	156
122. Свойства и график функции $y = \sin x$	157
123. Свойства и график функции $y = \cos x$	158
124. Свойства и график функции $y = \operatorname{tg} x$	159
125. Свойства и график функции $y = \operatorname{ctg} x$	161
126. Функция $y = \arcsin x$	161
127. Функция $y = \arccos x$	163
128. Функции $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$	164
129. Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс	165
§ 13. Преобразования графиков	168
130. Построение графика функции $y = mf(x)$	168
131. Графики функций $y = ax^2$, $y = ax^3$	169
132. Построение графика функции $y = f(x - a) + b$	171
133. График квадратичной функции	172
134. Способы построения графика квадратичной функции	174
135. Построение графика функции $y = f(kx)$	177



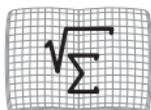
136. Сжатие и растяжение графиков
тригонометрических функций 179
137. График гармонического колебания
 $y = A \sin(\omega x + \alpha)$ 180

Раздел IV. Уравнения и системы уравнений

- § 14. Уравнения с одной переменной** 182
138. Определение уравнения.
Корни уравнения 182
139. Равносильность уравнений 182
140. Линейные уравнения 183
141. Квадратные уравнения 184
142. Неполные квадратные уравнения 186
143. Теорема Виета 187
144. Системы и совокупности уравнений 188
145. Уравнения, содержащие переменную
под знаком модуля 189
146. Понятие следствия уравнения.
Посторонние корни 190
147. Уравнения с переменной в знаменателе 191
148. Область определения уравнения 192
149. Рациональные уравнения 194
150. Решение уравнения $p(x) = 0$ методом
разложения его левой части
на множители 195
151. Решение уравнений методом введения
новой переменной 196
152. Биквадратные уравнения 197
153. Уравнения высших степеней 197



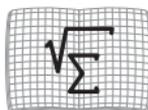
154. Решение задач с помощью уравнений	199
155. Иррациональные уравнения	202
156. Показательные уравнения	204
157. Логарифмические уравнения	205
158. Показательно-логарифмические уравнения	207
159. Простейшие тригонометрические уравнения	207
160. Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители	210
161. Решение тригонометрических уравнений методом введения новой переменной	212
162. Однородные тригонометрические уравнения	213
163. Универсальная подстановка	216
164. Метод введения вспомогательного аргумента	218
165. Графическое решение уравнений	219
166. Уравнения с параметром	221
§ 15. Уравнения с двумя переменными	223
167. Решение уравнения с двумя переменными	223
168. График уравнения с двумя переменными	224
169. Линейное уравнение с двумя переменными и его график	224
§ 16. Системы уравнений	225
170. Системы двух уравнений с двумя переменными. Равносильные системы	225



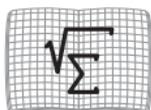
171. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом подстановки	226
172. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом сложения	227
173. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом введения новых переменных	228
174. Определители второго порядка. Исследование систем двух линейных уравнений с двумя переменными	230
175. Симметрические системы	233
176. Графическое решение систем двух уравнений с двумя переменными	234
177. Системы трех уравнений с тремя переменными	235
178. Определители третьего порядка. Исследование систем трех линейных уравнений с тремя переменными	238
179. Системы показательных и логарифмических уравнений	242
180. Системы тригонометрических уравнений	243

Раздел V. Неравенства

§ 17. Решение неравенств	245
181. Основные понятия, связанные с решением неравенств	245



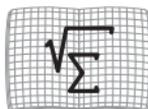
182. Графическое решение неравенств с одной переменной	246
183. Линейные неравенства с одной переменной	247
184. Системы неравенств с одной переменной	248
185. Совокупности неравенств с одной переменной	249
186. Дробно-линейные неравенства	250
187. Неравенства второй степени	250
188. Графическое решение неравенств второй степени	252
189. Неравенства с модулями	254
190. Решение рациональных неравенств методом промежутков	257
191. Показательные неравенства	260
192. Логарифмические неравенства	261
193. Иррациональные неравенства	263
194. Тригонометрические неравенства	264
195. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными	265
§ 18. Доказательство неравенств	266
196. Метод оценки знака разности	266
197. Синтетический метод доказательства неравенств	268
198. Доказательство неравенств методом от противного	269
199. Использование неравенств при решении уравнений	270

**Раздел VI. Элементы комбинаторики**

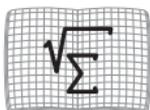
§ 19. Размещения, перестановки, сочетания ...	272
200. Размещения	272
201. Перестановки	273
202. Сочетания и их свойства.	
Треугольник Паскаля	275
§ 20. Формула бинома Ньютона	278
203. Бином Ньютона	278
204. Свойства формулы бинома Ньютона	280

Раздел VII. Элементы математического анализа

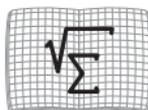
§ 21. Числовые последовательности	283
205. Определение последовательности	283
206. Способы задания последовательности	283
207. Возрастающие и убывающие последовательности	284
208. Определение арифметической прогрессии	285
209. Свойства арифметической прогрессии	286
210. Определение геометрической прогрессии	287
211. Свойства геометрической прогрессии	288
212. Понятие о пределе последовательности ...	291
213. Вычисление пределов последовательностей	292
214. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $ q < 1$	294



§ 22. Предел функции	296
215. Предел функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Горизонтальная асимптота	296
216. Вычисление пределов функций при $x \rightarrow \infty$	298
217. Предел функции в точке. Непрерывные функции	299
218. Вертикальная асимптота	301
219. Вычисление предела функции в точке.....	302
§ 23. Производная	305
220. Приращение аргумента. Приращение функции	305
221. Определение производной	306
222. Формулы дифференцирования. Таблица производных	309
223. Дифференцирование суммы, произведения, частного	310
224. Сложная функция и ее дифференцирование	312
225. Физический смысл производной	314
226. Вторая производная и ее физический смысл	315
227. Касательная к графику функции	316
228. Формула Лагранжа	319
§ 24 Применения производной	319
229. Приближенные вычисления с помощью производной	319
230. Дифференциал	321



231. Применение производной к исследованию функций на возрастание (убывание)	322
232. Применение производной к исследованию функций на экстремум	324
233. Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке	328
234. Отыскание наибольшего или наименьшего значения непрерывной функции на незамкнутом промежутке	330
235. Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений величин	331
236. Применение производной для доказательства тождеств	333
237. Применение производной для доказательства неравенств	334
238. Общая схема построения графика функции	334
§ 25. Первообразная и интеграл	338
239. Первообразная	338
240. Таблица первообразных	339
241. Правила вычисления первообразных	340
242. Интеграл	341
243. Связь между интегралом и первообразной (формула Ньютона — Лейбница)	344
244. Правила вычисления интегралов	345
245. Использование интеграла для вычисления площадей плоских фигур	346



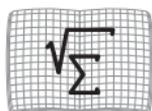
246. Вычисление объемов тел с помощью интеграла	351
247. Физические приложения интеграла	353
§ 26. Понятие о дифференциальном уравнении	353
248. Определение дифференциального уравнения и его решения	353
249. Дифференциальные уравнения показательного роста и показательного убывания	355
250. Уравнение гармонических колебаний	357

ГЕОМЕТРИЯ

Раздел VIII.

Основные понятия геометрии

§ 27. Точка, прямая, плоскость.	
Фигуры и тела	359
251. Точка, прямая, луч, отрезок.	
Уравнение прямой на плоскости	359
252. Плоскость. Уравнение плоскости в пространстве. Фигуры и тела	362
253. Угол	365
254. Градусная и радианная меры углов	367



255. Ломаная. Многоугольник	370
256. Геометрическое место точек	374
257. Симметрия	375

§ 28. Перпендикулярные

и параллельные прямые	378
258. Перпендикуляр и наклонная	378
259. Параллельные прямые	380
260. Признаки параллельности прямых	381
261. Углы с параллельными и перпендикулярными сторонами	382

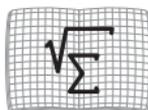
§ 29 Простейшие задачи на построение

262. Деление отрезка пополам	384
263. Построение перпендикуляров	384
264. Построение углов	385
265. Построение прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку	386
266. Построение пропорциональных отрезков	387
267. Построение касательной к окружности	388
268. Построение вписанной и описанной окружностей для треугольника	389

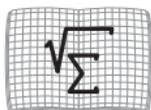
Раздел IX.

Геометрические фигуры на плоскости

§ 30. Треугольник	390
269. Стороны и углы треугольника	390
270. Биссектриса треугольника. Окружность, вписанная в треугольник	392



271. Медиана треугольника. Средняя линия треугольника	395
272. Высота треугольника	396
273. Окружность, описанная около треугольника. Замечательные точки треугольника	398
274. Равенство треугольников	399
275. Свойства прямоугольного треугольника	401
276. Теорема косинусов. Теорема синусов	403
277. Площадь треугольника	405
278. Признаки подобия треугольников	409
§ 31. Четырехугольники	413
279. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат	413
280. Трапеция	417
281. Площади четырехугольников	420
§ 32. Окружность	428
282. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная и секущая	428
283. Хорда и диаметр. Сектор и сегмент	429
284. Уравнение окружности	431
285. Взаимное расположение двух окружностей	431
§ 33. Углы и пропорциональные отрезки в круге	433
286. Углы с вершиной на окружности	433
287. Углы с вершиной внутри и вне круга	436

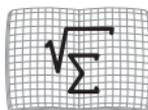


288. Четырехугольники, вписанные в окружность и описанные около нее	438
289. Пропорциональные отрезки в круге	441
290. Длина окружности	443
291. Площадь круга и его частей	444
§ 34. Правильные многоугольники	447
292. Основные определения и свойства	447
293. Соотношения между стороной, радиусом и апофемой в правильном многоугольнике	448
294. Периметр и площадь правильного n -угольника	452

Раздел X. Векторы.

Прямые и плоскости в пространстве

§ 35. Понятие вектора	454
295. Вектор. Длина вектора. Координаты вектора	454
296. Равенство векторов. Угол между векторами	457
§ 36. Операции над векторами	458
297. Сложение векторов	458
298. Умножение вектора на число	460
299. Коллинеарность и компланарность векторов	464
300. Скалярное произведение векторов	467
301. Векторное произведение векторов	471
302. Смешанное произведение векторов	475



§ 37. Взаимное расположение прямых и плоскостей	480
303. Параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые	480
304. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью	483
305. Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельных прямых и плоскостей	488
§ 38. Двугранные и многогранные углы	492
306. Двугранный угол	492
307. Трехгранный угол	494

Раздел XI.

Многогранники и тела вращения

§ 39. Многогранники	498
308. Общие понятия	498
309. Правильные многогранники	499
310. Призма, параллелепипед, куб	502
311. Пирамида, усеченная пирамида	508
§ 40. Тела вращения	516
312. Цилиндр	516
313. Конус, усеченный конус	520
314. Шар, сфера	526
315. Цилиндр, конус и шар как тела вращения	532
Основные формулы	535
Основные обозначения	608
Предметный указатель	614