ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга представляет собой повторение шестого издания «Сборника задач по математике для поступающих во втузы» (М.: Высшая школа, 1992; Столетие, 1997–1999) с дополнительной корректировкой условий всех задач и ответов к ним, а также с исправлением замеченных неточностей. Кроме того, существенно расширен справочный материал в гл. 5, 9 и 13. При этом, учитывая, что данное издание «Сборника» используется учащимися и преподавателями в течение многих лет, авторы практически полностью сохранили весь массив его задач и их нумерацию.

«Сборник» написан в соответствии с программой по математике для поступающих во втузы. В каждой главе приведены теоретические сведения справочного характера и примеры решения задач с объяснением применяемых методов. При этом начало и конец решения примера отмечаются соответственно знаками □ и ■.

«Сборник» состоит из двух частей: «Арифметика, алгебра, геометрия» (часть I); «Алгебра, геометрия (дополнительные задачи). Начала анализа. Координаты и векторы» (часть II).

Задачи части I разделены на три группы (А, Б, В) по их нарастающей сложности. Хотя такое деление имеет более или менее условный характер, авторы полагают, что умение решать задачи из группы А должно определять минимально необходимый уровень подготовки учащихся к вступительным экзаменам в вузы. Успешное решение задач из группы Б определяет более высокое качество усвоения школьной программы. К группе В отнесены задачи повышенной трудности. Однако практика решения таких задач полезна для развития и укрепления способности к самостоятельному логическому мышлению, для обогащения математической культуры и может быть использована в школе и на факультативных занятиях.

В части II помещены не разделенные на группы по степени трудности дополнительные задачи по алгебре и геометрии, задачи по началам математического анализа, задачи на применение координат и векторов, а также задачи по теме «Комплексные числа» (гл. 18). Эта тема не входит в ныне действующую программу для поступающих во втузы, но является весьма полезной для учащихся школ, лицеев и гимназий, изучающих математику по расширенной программе и готовящихся к вступительным экзаменам во втузы. По этим же соображениям к части II следовало бы отнести и тему «Комбинаторика и бином Ньютона», однако ее пришлось оставить в части I (гл. 5), чтобы сохранить нумерацию всех глав и задач «Сборника» для удобства тех, кто использует в своей работе именно шестое его издание.

Вместе с тем в интересах учащихся и преподавателей, использующих в своей работе как шестое, так и десятое издание «Сборника», в конце книги указаны номера всех задач настоящего издания, для которых эти же задачи (под другими номерами) решены в десятом издании.

В соответствии со школьной программой обучения математике всюду (за исключением гл. 18) рассматриваются только области действительных чисел: действительные корни функций, уравнений, систем уравнений.

Начиная с третьего издания работа над «Сборником» выполнялась коллективом авторов без участия самого активного соавтора и научного редактора его первого и второго изданий М. И. Сканави, умершего в 1972 г. Специальное редактирование третьего и последующих изданий осуществлял Б. А. Кордемский. Он проделал большую работу и в процессе подготовки настоящего издания, но, к сожалению, книга вышла в свет уже без него. Мы сохраним светлую память о нем и о других наших коллегах, ушедших из жизни за последние годы, — И. Ф. Орловской, Р. И. Позойском, В. К. Егереве, В. В. Зайцеве.

Авторы сердечно благодарят учащихся и преподавателей школ, подготовительных курсов и факультетов вузов, рецензентов «Сборника», высказавших критические замечания и добрые советы, предложивших поправки. В особенности авторы признательны Р. И. Борковскому (г. Челябинск), приславшему наибольшее количество пожеланий и замечаний, учтенных при работе над книгой.

Авторы

ЧАСТЬ I

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА 1

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Пример. Вычислить

$$\left(\frac{928\cdot 10^{-2}}{0,8}-0,6\right):\left(\frac{\left(42\cdot 3\frac{5}{6}+3,3:0,03\right):\frac{1}{15}}{\left(3\frac{3}{4}:0,625-0,84:0,8\right):0,03}\right)^{-1}.$$

☐ Обозначим выражение в первых скобках через A, а выражение во вторых скобках — через B. Последовательно находим:

1) $A=\frac{928}{80}-0,6=11,6-0,6=11;$

2) числитель дроби B:

а) $42\cdot 3\frac{5}{6}=42\cdot 3+\frac{42\cdot 5}{6}=161;$

б) $3,3:0,03=110;$

в) $(161+110)\cdot 15=271\cdot 15;$

3) знаменатель дроби B:

а) $\frac{15}{4}:\frac{5}{8}=6;$

б) $\frac{84}{80}=\frac{21}{20};$

в) $\left(6-\frac{21}{20}\right)\cdot\frac{100}{3}=200-35=165;$

4) $B=271\cdot\frac{15}{165}=\frac{271}{11}.$

Окончательно получим $A:B^{-1}=AB=11\cdot\frac{271}{11}=271.$ ■

В задачах этой главы надо выполнить указанные действия, не пользуясь микрокалькулятором, не делая округлений и приближенных вычислений, так как предполагается, что все заданные числа являются точными.

Вычислить (1.001–1.040):

1.001. $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\dfrac{5}{16}\right):\dfrac{169}{24}}.$

1.002. $\left(\left(\dfrac{7}{9}-\dfrac{47}{72}\right):1{,}25+\dfrac{7}{40}\right):(0{,}358-0{,}108)\cdot 1{,}6-\dfrac{19}{25}.$

1.003. $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}.$

1.004. $\left(\dfrac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\dfrac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\dfrac{3}{70}}+0{,}125\right):2\dfrac{1}{2}+0{,}43.$

1.005. $\dfrac{2\dfrac{3}{4}:1{,}1+3\dfrac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\dfrac{1}{3}}:\dfrac{5}{7}-\dfrac{\left(2\dfrac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\dfrac{1}{2}}.$

1.006. $\dfrac{\left(13{,}75+9\dfrac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\dfrac{3}{5}\right)\cdot 5\dfrac{5}{6}}{\left(3\dfrac{2}{3}-3\dfrac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\dfrac{1}{6}.$

1.007. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{6}+0{,}1+\dfrac{1}{15}\right):\left(\dfrac{1}{6}+0{,}1-\dfrac{1}{15}\right)\cdot 2{,}52}{\left(0{,}5-\dfrac{1}{3}+0{,}25-\dfrac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\dfrac{1}{6}\right)\cdot\dfrac{7}{13}}.$

1.008. $\left(\dfrac{3\dfrac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\dfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{4{,}6-2\dfrac{1}{3}}{4{,}6+2\dfrac{1}{3}}\cdot 5{,}2\right):\left(\dfrac{0{,}05}{\dfrac{1}{7}-0{,}125}+5{,}7\right).$

1.009. $\dfrac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\dfrac{5}{8}\right)-5:2\dfrac{1}{2}}{\left(1\dfrac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\dfrac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\dfrac{2}{5}}\cdot 90.$

1.010. $\dfrac{\left(5\dfrac{4}{45}-4\dfrac{1}{6}\right):5\dfrac{8}{15}}{\left(4\dfrac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\dfrac{9}{13}}\cdot 34\dfrac{2}{7}+\dfrac{0{,}3:0{,}01}{70}+\dfrac{2}{7}.$

1.011. $\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}+0{,}425-0{,}005\right):0{,}1}{30{,}5+\dfrac{1}{6}+3\dfrac{1}{3}}+\dfrac{6\dfrac{3}{4}+5\dfrac{1}{2}}{26:3\dfrac{5}{7}}-0{,}05.$

1.012. $\dfrac{3\dfrac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\dfrac{1}{2}}{\dfrac{62}{75}-0{,}16}:\dfrac{3{,}5+4\dfrac{2}{3}+2\dfrac{2}{15}}{0{,}5\left(1\dfrac{1}{20}+4{,}1\right)}.$

1.013. $\dfrac{\left(1\dfrac{1}{5}:\left(\dfrac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot 1{,}7}{\dfrac{5}{6}+1\dfrac{1}{3}-1\dfrac{23}{30}}+\dfrac{4{,}75+7\dfrac{1}{2}}{33:4\dfrac{5}{7}}:0{,}25.$

1.014. $\dfrac{\left(4{,}5\cdot 1\dfrac{2}{3}-6{,}75\right)\cdot\dfrac{2}{3}}{\left(3\dfrac{1}{3}\cdot 0{,}3+5\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{8}\right):2\dfrac{2}{3}}+\dfrac{1\dfrac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}3-0{,}96}{\left(0{,}2-\dfrac{3}{40}\right)\cdot 1{,}6}.$

1.015. $\dfrac{\left(1{,}88+2\dfrac{3}{25}\right)\cdot\dfrac{3}{16}}{0{,}625-\dfrac{13}{18}:\dfrac{26}{9}}+\dfrac{\left(\dfrac{0{,}216}{0{,}15}+0{,}56\right):0{,}5}{\left(7{,}7:24\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{15}\right)\cdot 4{,}5}.$

1.016. $\left(16\dfrac{1}{2}-13\dfrac{7}{9}\right)\cdot\dfrac{18}{33}+2{,}2\left(\dfrac{8}{33}-\dfrac{1}{11}\right)+\dfrac{2}{11}.$

1.017. $\dfrac{0{,}128:3{,}2+0{,}86}{\dfrac{5}{6}\cdot 1{,}2+0{,}8}\cdot\dfrac{\left(1\dfrac{32}{63}-\dfrac{13}{21}\right)\cdot 3{,}6}{0{,}505\cdot\dfrac{2}{5}-0{,}002}.$

1.018. $\dfrac{3\dfrac{1}{3}:10+0{,}175:0{,}35}{1{,}75-1\dfrac{11}{17}\cdot\dfrac{51}{56}}-\dfrac{\left(\dfrac{11}{18}-\dfrac{1}{15}\right):1{,}4}{\left(0{,}5-\dfrac{1}{9}\right)\cdot 3}.$

1.019. $\dfrac{0{,}125:0{,}25+1\dfrac{9}{16}:2{,}5}{(10-22:2{,}3)\cdot 0{,}46+1{,}6}+\left(\dfrac{17}{20}+1{,}9\right)\cdot 0{,}5.$

1.020. $\left(\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}-\left(0{,}6:3\frac{3}{4}\right)2\frac{1}{2}+3{,}75:1\frac{1}{2}\right):2{,}2.$

1.021. $\left(2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}+\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}\right)\cdot\frac{1}{3}.$

1.022. $\dfrac{0{,}5+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+0{,}125}{\frac{1}{3}+0{,}4+\frac{14}{15}}+\dfrac{(3{,}75-0{,}625)\cdot\frac{48}{125}}{12{,}8\cdot 0{,}25}.$

1.023. $\left(26\frac{2}{3}:6{,}4\right)\cdot\left(19{,}2:3\frac{5}{9}\right)-\dfrac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0{,}5:18\frac{2}{3}\cdot 11}-\frac{1}{18}.$

1.024. $\dfrac{0{,}725+0{,}6+\frac{7}{40}+\frac{11}{20}}{0{,}128\cdot 6\frac{1}{4}-0{,}0345:\frac{3}{25}}\cdot 0{,}25.$

1.025. $\left((520\cdot 0{,}43):0{,}26-217\cdot 2\frac{3}{7}\right)-\left(31{,}5:12\frac{3}{5}+114\cdot 2\frac{1}{3}+61\frac{1}{2}\right).$

1.026. $\dfrac{(3{,}4-1{,}275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\left(1\frac{7}{85}+6\frac{2}{17}\right)}+0{,}5\cdot\left(2+\dfrac{12{,}5}{5{,}75+\frac{1}{2}}\right).$

1.027. $\left(\dfrac{3{,}75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1{,}875}-\dfrac{2\frac{3}{4}+1{,}5}{2{,}75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{10}{11}.$

1.028. $((21{,}85:43{,}7+8{,}5:3{,}4):4{,}5):1\frac{2}{5}+1\frac{11}{21}.$

1.029. $\left(1\frac{2}{5}+3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3{,}4:2\frac{1}{8}-0{,}35.$

1.030. $\dfrac{\left(0{,}3275-\left(2\frac{15}{88}+\frac{4}{33}\right):12\frac{2}{9}\right):0{,}07}{(13-0{,}416):6{,}05+1{,}92}.$

1.031. $\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{21}{45}}{1\frac{5}{6}}\cdot\dfrac{1{,}125+1\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{0{,}59}.$

1.032. $$\frac{\left(3^{-1}-\sqrt{1\frac{7}{9}}\right)^{-2}:0{,}25}{\frac{37}{300}:0{,}0925}+12{,}5\cdot 0{,}64.$$

1.033. $$\frac{\left(\frac{5}{8}+2\frac{17}{24}\right):2{,}5}{\left(1{,}3+\frac{23}{30}+\frac{4}{11}\right)\cdot\frac{110}{401}}\cdot 0{,}5.$$

1.034. $$\frac{((7-6{,}35):6{,}5+9{,}9)\cdot\frac{1}{12{,}8}}{\left(1{,}2:36+1\frac{1}{5}:0{,}25-1\frac{5}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{4}}:0{,}125.$$

1.035. $$\frac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(18\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot 0{,}5.$$

1.036. $$\frac{3{,}75:1\frac{1}{2}+\left(1{,}5:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}.$$

1.037. $$\frac{\left(\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):\frac{9}{4}+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right):1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}.$$

1.038. $$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}.$$

1.039. $$\left(\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}+1{,}364:0{,}124.$$

1.040. $$5\frac{4}{7}:\left(8{,}4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left(6-\frac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right)-20{,}384:1{,}3\right).$$

Найти X из пропорции (1.041–1.045):

1.041. $\dfrac{\left(4-3{,}5\cdot\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{X}=\dfrac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}.$

1.042. $\dfrac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0{,}8}=\dfrac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{X}.$

1.043. $\dfrac{0{,}125X}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\dfrac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}.$

1.044. $\dfrac{X}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\dfrac{9\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}.$

1.045. $\dfrac{15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51:14{,}7}{X}=\dfrac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\left(5\frac{1}{2}-3{,}25\right)}.$

Вычислить наиболее рациональным способом (1.046–1.048):

1.046. $\dfrac{\sqrt{6{,}3\cdot 1{,}7}\left(\sqrt{\frac{6{,}3}{1{,}7}}-\sqrt{\frac{1{,}7}{6{,}3}}\right)}{\sqrt{(6{,}3+1{,}7)^2-4\cdot 6{,}3\cdot 1{,}7}}.$

1.047. $\left(\dfrac{\sqrt{561^2-459^2}}{4\frac{2}{7}\cdot 0{,}15+4\frac{2}{7}:\frac{20}{3}}+4\sqrt{10}\right):\dfrac{1}{3}\sqrt{40}.$

1.048. $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3}\right)^2.$

Вычислить (1.049–1.050):

1.049. $\dfrac{2^{-2}+5^0}{(0{,}5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4{,}75.$

1.050. $\dfrac{(0{,}6)^0-(0{,}1)^{-1}}{(3:2^3)^{-1}\cdot(1{,}5)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}.$

ГЛАВА 2

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Свойства степеней

Для любых x и y и любых положительных a и b верны следующие равенства:

$$a^0 = 1; \tag{2.1}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \tag{2.2}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \tag{2.3}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \tag{2.4}$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \tag{2.6}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{2.7}$$

Формулы преобразования многочленов

Для любых a, b и c верны следующие равенства:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \tag{2.8}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \tag{2.9}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \tag{2.10}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{или}\ \ (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b); \tag{2.11}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{или}\ \ (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b); \tag{2.12}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \tag{2.13}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2); \tag{2.14}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \tag{2.15}$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных n и k, больших 1, и любых неотрицательных a и b верны следующие равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad (2.16)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b \neq 0); \qquad (2.17)$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \qquad (2.18)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a}; \qquad (2.19)$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \qquad (2.20)$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \ (a \geq 0); \qquad (2.21)$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b; \qquad (2.22)$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geq 0, \\ -a \text{ при } a < 0; \end{cases} \qquad (2.23)$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \qquad (2.24)$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \ (a \geq 0). \qquad (2.25)$$

Пример 1. Упростить выражение

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + \sqrt{3x} + 1} + 2\left(\sqrt[6]{27x^3} - \frac{1}{2}\right).$$

☐ Обозначим дробь через A, а выражение в скобках – через B; тогда заданное выражение примет вид $A + 2B$. Заметим, что для $\sqrt{3x}$ и $\sqrt[6]{27x^3}$ допустимыми являются только значения $x \geq 0$, при которых знаменатель дроби A не равен нулю. Поэтому и для заданного выражения допустимыми являются только значения $x \geq 0$.

Используя формулу (2.9), выделяем в числителе дроби A полный квадрат:

$$x^4 + 2x^2 + 1 - 3x = (x^2 + 1)^2 - 3x.$$

Так как $x \geq 0$, то в силу равенства (2.21) имеем $3x = (\sqrt{3x})^2$. Тогда полученное выражение с помощью формулы (2.8) можно разложить на множители как разность квадратов:

$$(x^2 + 1)^2 - (\sqrt{3x})^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{3x})(x^2 + 1 + \sqrt{3x}).$$

Следовательно,

$$A=\frac{(x^2-\sqrt{3x}+1)(x^2+\sqrt{3x}+1)}{x^2+\sqrt{3x}+1}=x^2-\sqrt{3x}+1.$$

Далее на основании формулы (2.20) имеем $\sqrt[6]{27x^3}=\sqrt[6]{(3x)^3}=\sqrt{3x}$, откуда $B=\sqrt{3x}-\frac{1}{2}$. Итак, $A+2B=x^2-\sqrt{3x}+1+2\sqrt{3x}-1=x^2+\sqrt{3x}$. ■

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b},\ 0<a<2b.$$

□ Имеем $\sqrt{a^2-4ab+4b^2}=\sqrt{(a-2b)^2}=|a-2b|=2b-a$, аналогично, $\sqrt{a^2+4ab+4b^2}=|a+2b|=a+2b$; здесь были использованы формулы (2.9), (2.10) и (2.23). Следовательно, $\frac{\sqrt{a^2-4ab+4b^2}}{\sqrt{a^2+4ab+4b^2}}=\frac{2b-a}{2b+a}$. Теперь находим

$$\frac{2b-a}{2b+a}-\frac{8ab}{a^2-4b^2}+\frac{2b}{a-2b}=\frac{(2b-a)\,(a-2b)-8ab+2b(a+2b)}{a^2-4b^2}=\frac{a}{2b-a}.$$ ■

Пример 3. Упростить выражение

$$f(x)=\frac{x^2+4x-5+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{x^2-4x-5+(x+5)\sqrt{x^2-1}},\ x>1.$$

□ Используя формулу (2.15), разложим на множители квадратные трехлены в числителе и знаменателе дроби:

$$f(x)=\frac{(x+5)(x-1)+(x-5)\sqrt{x^2-1}}{(x-5)(x+1)+(x+5)\sqrt{x^2-1}}.$$

Так как $x>1$, то в силу соотношения (2.21) имеем $x-1=\sqrt{(x-1)^2}$ и $x+1=\sqrt{(x+1)^2}$. Значит,

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}\,((x+5)\sqrt{x-1}+(x-5)\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}((x-5)\sqrt{x+1}+(x+5)\sqrt{x-1})},$$

откуда после сокращения получим $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. ■

Пример 4. Не прибегая к приближенным вычислениям, упростить числовое выражение

$$A = \left(4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}} - \sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}\right)\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{3}-1}{11}}.$$

□ Используя формулы (2.16), (2.8), (2.20) и (2.10), находим:

1) $4\sqrt[3]{1+2\sqrt{3}}\,\sqrt[3]{\dfrac{2\sqrt{3}-1}{11}} = 4\sqrt[3]{\dfrac{12-1}{11}} = 4;$

2) $\sqrt[6]{13+4\sqrt{3}}\,\sqrt[6]{\left(\dfrac{2\sqrt{3}-1}{11}\right)^2} = \sqrt[6]{(13+4\sqrt{3})\dfrac{12-4\sqrt{3}+1}{11^2}} =$

$= \sqrt[6]{\dfrac{(13+4\sqrt{3})(13-4\sqrt{3})}{11^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{169-48}{11^2}} = 1.$

Окончательно получим $A = 4 - 1 = 3$. ■

Пример 5. Проверить справедливость равенства

$$\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38-\sqrt{1445}} = 4.$$

□ Положим $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38-\sqrt{1445}} = x$. Возведем в куб обе части этого равенства. Используя формулу (2.11), получаем

$$38+\sqrt{1445}+38-\sqrt{1445}+3\sqrt[3]{(38+\sqrt{1445})(38-\sqrt{1445})}\;x = x^3,$$

или $x^3 + 3x - 76 = 0$. Подстановкой $x = 4$ убеждаемся в том, что $x = 4$ является одним из корней полученного кубического уравнения: $64 + 12 - 76 = 0$.

Преобразуем это кубическое уравнение:

$x^3 - 64 = 3\,(4 - x);\ (x - 4)\,(x^2 + 4x + 16) + 3\,(x - 4) = 0;\ (x - 4)\,(x^2 + 4x + 19) = 0.$

Но множитель $x^2 + 4x + 19$ не имеет действительных корней. Значит, 4 — единственное возможное действительное значение для x, чем и доказано требуемое равенство (поскольку очевидно, что $\sqrt[3]{38+\sqrt{1445}} + \sqrt[3]{38-\sqrt{1445}}$ — действительное число). ■

Пример 6. Проверить справедливость равенства

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}} - \sqrt{3} = 2.$$

□ Рассмотрим равенство

$$\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

Очевидно, что если оно верно, то верно и заданное равенство. Пусть $a=\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}$, $b=2+\sqrt{3}$. Легко установить, что $a>0$ и $b>0$. Если при этом выполняется равенство $a^2=b^2$, то $a=b$. Находим

$$a^2=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})^2}=\frac{(7+4\sqrt{3})\,(19-8\sqrt{3})}{19-8\sqrt{3}}=7+4\sqrt{3};$$

$$b^2=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}.$$

Так как $a^2=b^2$, то $a=b$, т.е. заданное равенство справедливо.

Этот пример можно решить быстрее, если догадаться, что оба подкоренных выражения в условии являются квадратами положительных чисел, а именно: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ и $19-8\sqrt{3}=(4-\sqrt{3})^2$. Тогда левая часть заданного равенства есть $\frac{(2+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$ и $2=2$. ■

Пример 7. Чему равна сумма выражений $\sqrt{24-t^2}$ и $\sqrt{8-t^2}$, если известно, что их разность равна 2 (значение переменной t находить не нужно)?

□ Согласно условию, $\sqrt{24-t^2}-\sqrt{8-t^2}=2$. Используя формулу $a+b=\frac{a^2-b^2}{a-b}$, получим $\sqrt{24-t^2}+\sqrt{8-t^2}=\frac{24-8}{2}=8$. ■

Группа А

Упростить выражения и вычислить их, если даны числовые значения параметров (2.001–2.124):

2.001. $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$

2.002. $((\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q})^{-2}+(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q})^{-2}):\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}.$

2.003. $\frac{(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}})^2}{2\sqrt{a^3b}}:\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right);\ a>b>0.$