

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА</b> .....	3
<b>НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА</b> .....	4
Натуральные числа.....	4
Множество натуральных чисел .....	4
Классы и разряды.....	5
Таблица классов и разрядов .....	6
Выражения. Равенства .....	6
Неравенства. Уравнения.....	7
Сравнение натуральных чисел.....	7
Сложение натуральных чисел.....	8
Вычитание натуральных чисел.....	8
Умножение натуральных чисел .....	9
Деление натуральных чисел.....	10
Деление с остатком.....	11
Делители и кратные .....	11
Натуральная степень числа .....	11
Простые и составные числа .....	12
Разложение числа на простые множители .....	12
Схема разложения на простые множители.....	13
Четные и нечетные числа.....	13
Признаки делимости натуральных чисел.....	14
Наибольший общий делитель .....	15
Взаимно простые числа .....	16
Схема нахождения НОД ( $a, b$ ) .....	16
Наименьшее общее кратное .....	17
Схема нахождения НОК ( $a, b$ ) .....	17

Схема нахождения НОК ( $a, b, c, \dots$ ) .....	18
Порядок действий над числами.....	18
<b>ДРОБНЫЕ ЧИСЛА</b> .....	20
Обыкновенные дроби .....	20
Правильные и неправильные дроби.....	22
Основное свойство дроби. Сокращение дробей.....	23
Приведение дробей к общему знаменателю .....	24
Сравнение дробей.....	25
Целая часть неправильной дроби .....	26
Сравнение смешанных чисел .....	27
Сложение дробей .....	27
Представление смешанного числа в виде неправильной дроби .....	28
Вычитание дробей .....	28
Умножение дробей .....	29
Обратная дробь. Деление дробей .....	30
Десятичные дроби .....	31
Приведение десятичной дроби к обыкновенной дроби.....	32
Сравнение десятичных дробей.....	32
Сложение и вычитание десятичных дробей .....	33
Умножение десятичных дробей .....	34
Деление десятичных дробей.....	35
Округление чисел.....	36
Дробные выражения.....	37
Среднее арифметическое.....	38
Нахождение дроби от числа.....	38
Проценты.....	39
Отношения .....	40
Пропорции.....	40

Прямо пропорциональная зависимость.....	42
Обратно пропорциональная зависимость .....	43
<b>РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ .....</b>	<b>44</b>
Линия. Прямая. Луч. Отрезок .....	44
Координатная прямая .....	45
Противоположные числа .....	46
Целые числа.....	46
Рациональные числа .....	46
Модуль числа .....	47
Сравнение чисел.....	48
Сложение рациональных чисел .....	49
Вычитание рациональных чисел .....	50
Умножение рациональных чисел.....	51
Деление рациональных чисел.....	52
Обратные числа .....	52
Бесконечные десятичные дроби .....	53
Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь .....	54
<b>ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА .....</b>	<b>56</b>
Квадратный корень. Арифметический квадратный корень .....	56
Свойства арифметического квадратного корня и их применение.....	57
Иррациональные числа.....	58
Действительные числа .....	58
Отрезки и интервалы на действительной оси .....	59
Связь между числовыми множествами $N, Z, Q, R$ .....	60
Свойства модуля действительного числа .....	61



<b>ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ</b> .....	62
Раскрытие скобок в алгебраической сумме.....	62
Вынесение общего множителя за скобки .....	62
Приведение подобных.....	63
Тождества. Тождественные преобразования .....	64
Уравнения .....	65
Тождественные преобразования уравнений.....	66
Линейное уравнение.....	67
Решение текстовых задач с помощью уравнений .....	68
<b>АЛГЕБРА</b> .....	69
<b>МНОГОЧЛЕНЫ</b> .....	70
Степень с натуральным показателем.....	70
Свойства степени с натуральным показателем.....	71
Одночлен .....	72
Многочлен .....	73
Действия над многочленами .....	74
Формулы сокращенного умножения.....	76
Разложение многочленов на множители .....	78
<b>РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ</b> .....	79
Целые и дробные выражения.....	79
Рациональные дроби.....	80
Основное свойство дроби. Сокращение дробей.....	81
Сложение и вычитание дробей.....	82
Умножение дробей .....	83
Возведение дроби в степень .....	84
Деление дробей.....	84
<b>НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЕЙШИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ</b> .....	85
Прямоугольная система координат на плоскости .....	85
Функция .....	86

Функция $y = kx$ .....	87
Функция $y = \frac{k}{x}$ .....	88
Линейная функция .....	89
<b>КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ</b> .....	90
Квадратное уравнение.....	90
Виды неполных квадратных уравнений и их корни.....	91
Формула корней квадратного уравнения.....	92
Корни квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом.....	93
Приведенное квадратное уравнение и его корни .....	94
Теорема Виета.....	95
Разложение квадратного трехчлена на множители .....	96
Биквадратные уравнения .....	97
Рациональные уравнения.....	97
Дробно-рациональные уравнения.....	98
<b>КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ</b> .....	99
Определение квадратичной функции .....	99
Функция $y = x^2$ , ее график, свойства.....	100
Функция $y = ax^2$ .....	101
График функции $y = ax^2 + y_0$ .....	102
График функции $y = a(x - x_0)^2$ .....	103
График квадратичной функции.....	104
<b>НЕРАВЕНСТВА</b> .....	106
Числовые неравенства.....	106
Свойства числовых неравенств.....	107
Действия над неравенствами .....	108
Неравенства с одной переменной.....	109
Числовые промежутки.....	110

Линейные неравенства с одной переменной .....	111
Системы линейных неравенств с одной переменной.....	112
Простейшие неравенства с модулем .....	113
Квадратные неравенства с одной переменной .....	114
Решение квадратных неравенств .....	114
Метод интервалов.....	116
Обобщенный метод интервалов .....	117
<b>СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ И КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ .....</b>	<b>118</b>
Система двух линейных уравнений.....	118
Способы решения линейных систем .....	119
Системы уравнений второй степени .....	121
<b>СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ .....</b>	<b>123</b>
Степень с целым показателем, ее свойства.....	123
Стандартный вид числа .....	124
Корень $n$ -й степени.....	125
Обозначения корней .....	126
Уравнение $x^n = a$ .....	127
Свойства арифметического корня $n$ -й степени .....	127
Степень с дробным показателем, ее свойства.....	128
<b>АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ .....</b>	<b>129</b>
Числовая последовательность .....	129
Способы задания числовых последовательностей.....	130
Арифметическая прогрессия.....	131
Геометрическая прогрессия .....	132
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия .....	133



<b>ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА</b> .....	134
Преобразование иррациональных выражений .....	134
Избавление от иррациональности в числителе или знаменателе .....	135
Иррациональные уравнения .....	136
Иррациональные неравенства .....	138
<b>ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ И ИХ ГРАФИКИ</b> .....	140
Функция. Область определения. Область значений .....	140
Возрастание и убывание функций .....	141
Четность и нечетность функции .....	142
Периодичность функций .....	143
Нули функции .....	143
Экстремумы функции .....	144
Преобразования графиков функций .....	145
<b>ТРИГОНОМЕТРИЯ</b> .....	147
<b>ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ</b> .....	148
Градусная и радианная мера угла .....	148
Тригонометрические функции любого угла .....	149
Свойства тригонометрических функций .....	150
Секанс и косеканс .....	151
Значения тригонометрических функций некоторых углов ..	152
<b>ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ</b> .....	153
Тригонометрические тождества .....	153
Формулы приведения .....	154
Формулы сложения .....	155
Формулы кратных углов .....	155
Формулы половинного угла .....	156
Формулы суммы и разности функций .....	157

Формулы произведения функций .....	158
Формулы понижения четной степени.....	158
Формулы степеней функций.....	159
Формулы универсальной тригонометрической подстановки.....	159
<b>ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ</b> .....	160
Некоторые специальные точки и промежутки .....	160
Графики основных тригонометрических функций .....	162
График функции $y = A \sin (\omega x + \varphi)$ . Гармонические колебания.....	163
<b>ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ</b> .....	164
Функция, обратная данной .....	164
Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс.....	165
Основные свойства обратных тригонометрических функций и их графики .....	166
Основные тождества для обратных тригонометрических функций.....	167
Связь между обратными тригонометрическими функциями .....	168
<b>ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА</b> .....	170
Простейшие тригонометрические уравнения.....	170
Однородные уравнения .....	171
Метод дополнительного угла .....	172
Простейшие тригонометрические неравенства .....	173
Простейшие неравенства с обратными тригонометрическими функциями.....	175
<b>РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ</b> .....	177
Основные тригонометрические соотношения между элементами треугольника.....	177



Решение прямоугольных треугольников .....	179
Решение косоугольных треугольников .....	179
<b>ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ</b> .....	<b>181</b>
<b>ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ</b> .....	<b>182</b>
Степень с действительным показателем.....	182
Свойства степеней .....	183
Свойства показательной функции и ее график.....	184
<b>ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ</b> .....	<b>185</b>
Логарифм числа .....	185
Свойства логарифмов.....	186
Свойства логарифмической функции и ее график .....	187
<b>ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА</b> .....	<b>188</b>
Простейшее показательное уравнение .....	188
Простейшее логарифмическое уравнение.....	188
Простейшие показательные неравенства .....	189
Простейшие логарифмические неравенства.....	190
<b>НАЧАЛА АНАЛИЗА</b> .....	<b>191</b>
<b>ПРОИЗВОДНАЯ</b> .....	<b>192</b>
Определение производной .....	192
Геометрический смысл производной. Касательная .....	193
Правила дифференцирования .....	194
Таблица производных.....	195
Применение производной к исследованию функции .....	196
<b>ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ</b> .....	<b>197</b>
Первообразная и неопределенный интеграл.....	197

Простейшие правила интегрирования.....	198
Таблица интегралов.....	198
Определенный интеграл.....	199
Формула Ньютона-Лейбница.....	200
Свойства определенного интеграла.....	201
Некоторые приложения определенного интеграла.....	202
<b>ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ</b> .....	<b>203</b>
<b>НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ</b> .....	<b>204</b>
Точка. Прямая. Плоскость.....	204
Луч. Угол.....	205
Измерение углов. Перпендикулярные прямые.....	206
Параллельные прямые.....	207
Ломаная. Многоугольник.....	208
<b>ТРЕУГОЛЬНИКИ</b> .....	<b>209</b>
Треугольник. Виды треугольников.....	209
Признаки равенства произвольных треугольников.....	210
Признаки равенства прямоугольных треугольников.....	210
Медиана. Биссектриса. Высота. Средняя линия треугольника.....	211
Свойства треугольников.....	212
Свойства равнобедренного треугольника.....	213
Свойства прямоугольного треугольника.....	213
Серединный перпендикуляр.....	214
Перпендикуляр и наклонная.....	215
Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника.....	216
Теорема Пифагора.....	217
<b>РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ</b> .....	<b>218</b>
Теорема Фалеса. Пропорциональные отрезки.....	218

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике .....	218
Подобие треугольников .....	219
Признаки подобия треугольников .....	220
Признаки подобия прямоугольных треугольников .....	220
<b>ОКРУЖНОСТИ, УГЛЫ И ТРЕУГОЛЬНИКИ</b> .....	221
Окружность. Круг .....	221
Окружность, касательная и секущая .....	222
Свойства хорд .....	222
Свойства касательных и секущих .....	223
Центральные и вписанные углы .....	224
Треугольник, вписанная и описанная окружности .....	225
Формулы для радиусов вписанной ( $r$ ) и описанной ( $R$ ) окружности .....	225
Теорема синусов .....	226
Теорема косинусов .....	226
Свойства медиан треугольника .....	226
Свойства биссектрис треугольника .....	227
Свойства высот треугольника .....	228
<b>ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ И МНОГОУГОЛЬНИКИ</b> .....	229
Четырехугольник .....	229
Параллелограмм .....	230
Прямоугольник. Ромб. Квадрат .....	231
Трапеция .....	232
Свойства трапеции .....	233
Многоугольники .....	233
Вписанные и описанные четырехугольники .....	235
Свойства выпуклых многоугольников .....	235
Свойства правильных многоугольников .....	236



<b>ПЛОЩАДИ ФИГУР</b> .....	238
Определение площади.....	238
Площади многоугольников .....	238
Длина окружности и дуги окружности.....	240
Площадь круга и его частей.....	240
<b>ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР</b> .....	242
Движение .....	242
Симметрия относительно точки .....	243
Симметрия относительно прямой .....	244
Поворот .....	245
Параллельный перенос .....	245
Преобразование подобия .....	246
Гомотетия .....	248
<b>ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ</b> ....	249
Середина отрезка. Расстояние между точками. Уравнения окружности и прямой.....	249
Вектор .....	250
Сложение векторов.....	251
Умножение вектора на число.....	251
Координаты вектора.....	252
Действия над векторами, заданными координатами .....	252
Разложение вектора.....	253
Скалярное произведение векторов .....	253
<b>ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ</b> .....	255
<b>ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ</b> .....	256
<b>ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ</b> .....	257

Взаимное расположение прямых в пространстве .....	257
Параллельные прямые .....	257
Перпендикулярные и скрещивающиеся прямые .....	258
Угол между прямыми .....	258
Взаимное расположение прямой и плоскости .....	259
Параллельность прямой и плоскости .....	259
Перпендикулярность прямой и плоскости .....	260
Перпендикуляр и наклонная .....	260
Теорема о трех перпендикулярах .....	261
Угол между прямой и плоскостью .....	261
Параллельность плоскостей .....	262
Взаимное расположение двух плоскостей .....	263
Перпендикулярность плоскостей .....	263
Двугранный угол .....	264
Расстояния до прямых и плоскостей .....	265
<b>МНОГОГРАННИКИ</b> .....	266
Понятие многогранника .....	266
Призма .....	267
Площади поверхностей и объем призмы .....	268
Параллелепипед. Куб .....	268
Свойства параллелепипеда. Объем .....	269
Пирамида. Тетраэдр .....	270
Свойства пирамиды. Площади. Объем .....	271
Усеченная пирамида .....	272
Свойства. Площади. Объем .....	272
<b>ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ</b> .....	274
Цилиндр .....	274
Сечения цилиндра .....	275
Площади и объем цилиндра .....	275
Цилиндр и призма .....	276

Конус .....	277
Сечения конуса .....	277
Развертка конуса. Площади. Объем .....	278
Конус и пирамида.....	278
Усеченный конус .....	279
Развертка усеченного конуса. Площади. Объем .....	280
Сфера и шар .....	281
Сечения шара. Касательная плоскость .....	282
Сферический и шаровой сегменты.....	283
Шаровой слой и сферический пояс .....	283
Шаровой сектор.....	284
Сфера и цилиндр.....	284
Сфера и конус .....	285
Вписанные и описанные многогранники.....	285

## **ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ**

<b>И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ .....</b>	<b>286</b>
Координаты точки. Расстояние. Уравнение сферы.....	286
Векторы в пространстве.....	287
Действия над векторами, заданными координатами.....	287
Скалярное произведение векторов .....	288
Угол между прямыми (векторами).....	288
Угол между прямой и плоскостью .....	288
Разложение вектора.....	289
Параллельный перенос в пространстве .....	289
Симметрии в пространстве.....	290



## НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

### Сложение натуральных чисел

$$a + b = c \quad (a \in N, b \in N, c \in N).$$

$\swarrow$     $\searrow$     $\swarrow$   
 слагаемые   сумма

$$118 + 23 = 141.$$

Свойства:

1)  $a + b = b + a$

(коммутативность или переместительное свойство);

2)  $a + (b + c) = (a + b) + c$

(ассоциативность или сочетательное свойство):

$$24 + 11 = 11 + 24 = 35;$$

$$13 + 4 + 16 = (13 + 4) + 16 = 17 + 16 = 33 \text{ или}$$

$$13 + 4 + 16 = 13 + (4 + 16) = 13 + 20 = 33.$$

### Вычитание натуральных чисел

Действие, обратное сложению:

$$a - b = c, \text{ если } c + b = a \quad (a \in N, b \in N, c \in N).$$

$\swarrow$     $\downarrow$     $\swarrow$   
 уменьшаемое   вычитаемое   разность

Число  $a$  должно быть больше  $b$  ( $a > b$ ):

$$17 - 8 = 9, \text{ т. к. } 9 + 8 = 17.$$

Свойства:

1)  $a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b;$

2)  $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c);$

3)  $a - (b - c) = (a - b) + c.$

$$49 - (18 + 23) = (49 - 18) - 23 = 31 - 23 = 8 \text{ или}$$

$$49 - (18 + 23) = (49 - 23) - 18 = 26 - 18 = 8;$$

$$(7 + 12) - 9 = 7 + (12 - 9) = 7 + 3 = 10;$$

$$15 - (13 - 4) = (15 - 13) + 4 = 2 + 4 = 6.$$

### Деление с остатком

Разделить с остатком число  $a$  на число  $b$  — значит найти два таких числа  $c$  и  $r$  (частное и остаток), что

$$a = b \cdot c + r \quad \text{и} \quad r < b$$

$\swarrow$        $\swarrow$        $\swarrow$        $\swarrow$   
 делимое   делитель   частное   остаток

$$7 : 3 = 2 \text{ (остаток 1)}, \quad 7 = 3 \cdot 2 + 1.$$

$$19 : 4 = 4 \text{ (остаток 3)}, \quad 19 = 4 \cdot 4 + 3.$$

### Делители и кратные

Если  $a = b \cdot c$  ( $a \in N, b \in N, c \in N$ ), то  $a$  делится (нацело) на  $b$  и на  $c$ .

Обозначение:  $a \div b, a \div c$  —  $a$  делится на  $b, a$  делится на  $c$ :

$$10 \div 2; \quad 15 \div 3; \quad 120 \div 30.$$

**Делитель числа  $a$**  — число, на которое  $a$  делится (нацело):

Делители числа 12 — 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Делители числа 19 — 1 и 19.

Делители числа  $a = b \cdot c \cdot d$  —  $b, c, d \dots$

**Кратное числа  $a$**  — число, которое делится (нацело) на  $a$ :

Кратные числа 3 — 3, 6, 9, 12, 15, ...

Кратные числа 7 — 7, 14, 21, 28, ...

Кратные числа  $a$  —  $a, 2a, 3a, 4a, \dots, 1298a, \dots$

### Натуральная степень числа

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \quad (a \in N, n \in N).$$

$\swarrow$        $\swarrow$        $\swarrow$   
 основание    показатель    n сомножителей  
 степени      степени

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32; \quad 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$$

### Десятичные дроби

$$a, bcd\dots = a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000},$$

целая часть
запятая
дробная часть
десять доли
сотые доли
тысячные доли

где  $a$  — натуральное число или 0;  $b, c, d \dots$  — цифры.

**2,128** — 2 целых 128 тысячных;  
целая часть — 2, дробная часть — 128

**317,0504** — 317 целых 504 десятитысячных;  
целая часть — 317, дробная часть — 0504

**0,3** — 0 целых 3 десятых.  
целая часть — 0, дробная часть — 3

Разряды целой части числа			Разряды дробной части числа										
...	Сотни	Десятки	Единицы	Десятые	Сотые	Тысячные	Десятитысячные	Сотытысячные	Миллионные	Десятимиллионные	Сотомиллионные	Миллиардные	...

! Если дробная часть десятичной дроби оканчивается нулями, то их можно не писать — значение дроби не изменится:

$$202,13800 = 202,138; \quad 1790,0102000 = 1790,0102.$$

! Если к дробной части приписать любое число нулей, то значение десятичной дроби не изменится:

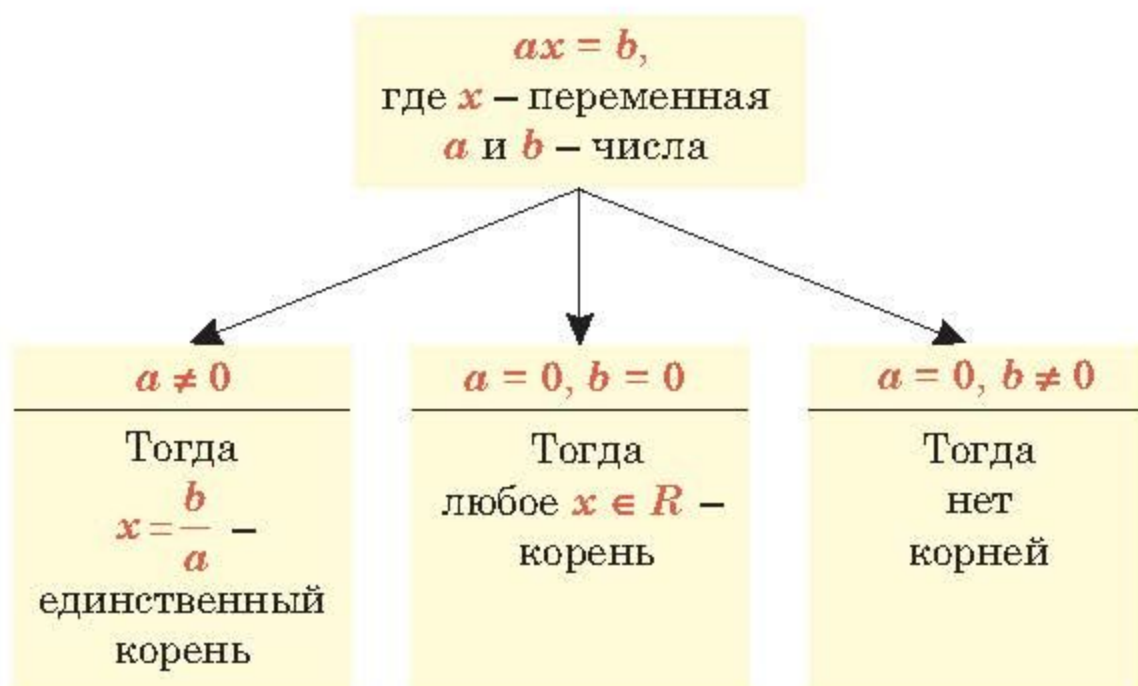
$$56,1 = 56,10000;$$

$$12,35 = 12,350 = 12,3500 = 12,35000 \text{ и т. д.}$$

$$82 = 82,000.$$



## Линейное уравнение

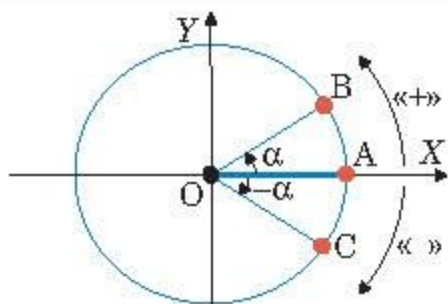


1.  $3(x - 2) + 5(7 - x) = 4 \Leftrightarrow 3x - 6 + 35 - 5x = 4 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -2x = 4 + 6 - 35 \Leftrightarrow -2x = -25 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = 12,5$  — единственный корень уравнения.

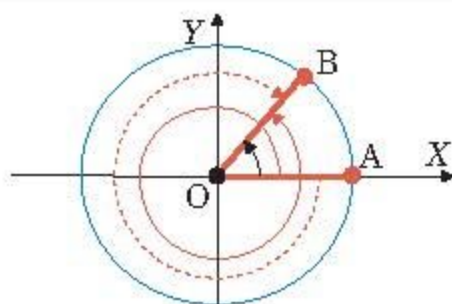
2.  $0,8t - 2(1,4 - 0,1t) - 2,6 = 3(t - 1,8) - 2t \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 0,8t - 2,8 + 0,2t - 2,6 = 3t - 5,4 - 2t \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow t - 3t + 2t = -5,4 + 5,4 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 0 \cdot t = 0$  — любое действительное число является корнем уравнения.

3.  $2y - 15(4 + y) + 13y = 11 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2y - 60 - 15y + 13y = 11 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 0 \cdot y = 71$  — уравнение не имеет корней.

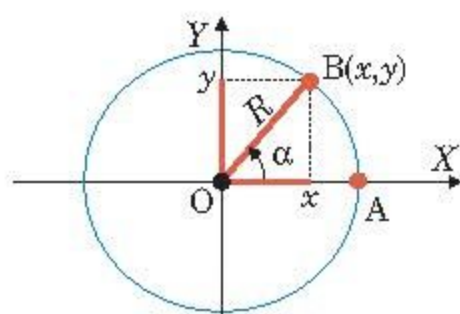
## Тригонометрические функции любого угла



- $OA$  — начальный радиус.  
 $\alpha$  — угол поворота радиуса  $OA$  при переходе в радиус  $OB$ .  
 $\langle + \rangle$  — положительное направление отсчета углов.  
 $\langle - \rangle$  — отрицательное направление.



Повороту  $OA \rightarrow OB$  соответствуют углы:  
 $\alpha, \alpha + 2\pi, \alpha - 2\pi, \dots$ ,  
 т. е.  $\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .



Синус  $\alpha$ :  $\sin \alpha = \frac{y}{R}$ .

Косинус  $\alpha$ :  $\cos \alpha = \frac{x}{R}$ .

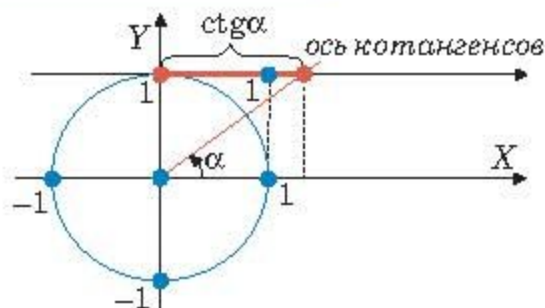
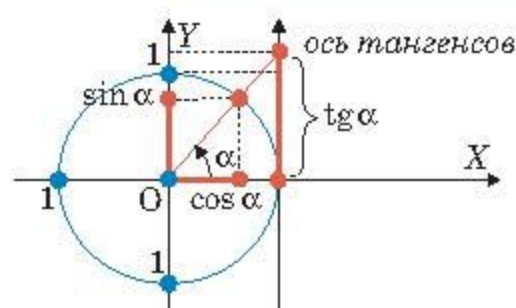
Тангенс  $\alpha$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, x \neq 0$ .

Котангенс  $\alpha$ :  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}, y \neq 0$ .

! Отношения  $\frac{y}{R}, \frac{x}{R}, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}$  не зависят от величины  $R$ ,  
 т. е. функции  $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$  однозначно определяются только углом  $\alpha$ .

**Единичная окружность** — окружность радиуса 1 с центром в точке  $O(0,0)$ :

Если  $R = 1$ , то  $\sin \alpha = y, \cos \alpha = x$



## График функции $y = A \sin (\omega x + \varphi)$ . Гармонические колебания

$$y = A \sin (\omega x + \varphi) = A \sin \omega \left( x + \frac{\varphi}{\omega} \right),$$

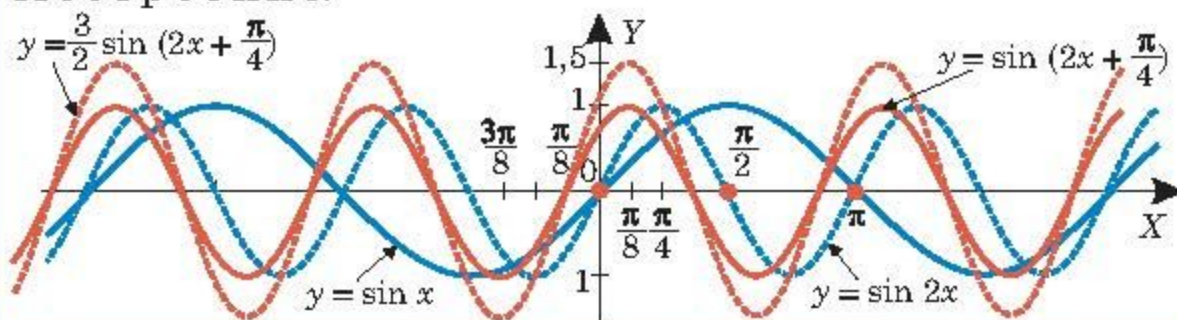
где  $A, \omega, \varphi$  — заданные числа.

Схема построения графика:

1. Построить график  $y = \sin \omega x$  с помощью сжатия / растяжения графика  $y = \sin x$  вдоль оси  $OX$ .
2. Построить график  $y = \sin \omega \left( x + \frac{\varphi}{\omega} \right) = \sin (\omega x + \varphi)$  с помощью сдвига графика  $y = \sin \omega x$  на вектор  $\left( -\frac{\varphi}{\omega}; 0 \right)$  вдоль оси  $OX$ .
3. Построить график  $y = A \sin (\omega x + \varphi)$  с помощью растяжения / сжатия графика  $y = \sin (\omega x + \varphi)$  вдоль оси  $OY$ .

**Задача.** Построить график функции  $y = \frac{3}{2} \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{2} \sin 2 \left( x + \frac{\pi}{8} \right)$ .

Построение.



! С помощью аналогичных преобразований можно построить графики функций  $y = A \cos (\omega x + \varphi)$ ,  $y = A \operatorname{tg} (\omega x + \varphi)$ ,  $y = A \operatorname{ctg} (\omega x + \varphi)$ .

**Гармонические колебания** — изменение величины  $y$ , происходящее по закону  $y = A \sin (\omega t + \varphi)$  или

$$y = A \cos (\omega t + \varphi) = A \sin \left( \omega t + \varphi + \frac{\pi}{2} \right),$$

где  $t$  — независимая переменная (время);  $A$  — амплитуда колебания;  $\omega$  — циклическая (круговая) частота колебания;

$\varphi$  — начальная фаза колебания;  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  — период гармонического колебания.



6. Сумма кубов двух величин:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

! Выражение  $a^2 - ab + b^2$  называется **неполным квадратом разности** величин  $a$  и  $b$ , а выражение  $a^3 + b^3$  — **суммой кубов**  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + 3x\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}x + 9x^2\right) &= \left(\frac{1}{2} + 3x\right) \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 3x + (3x)^2\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + (3x)^3 = \frac{1}{8} + 27x^3; \end{aligned}$$

$$64y^3 + 125z^6 = (4y)^3 + (5z^2)^3 = (4y + 5z^2)(16y^2 - 20yz^2 + 25z^4).$$

7. Разность кубов двух величин:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

! Выражение  $a^2 + ab + b^2$  называется **неполным квадратом суммы** величин  $a$  и  $b$ , а выражение  $a^3 - b^3$  — **разностью кубов**  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} \left(x^2y - \frac{1}{3}z\right) \cdot \left(x^4y^2 + \frac{1}{3}x^2yz + \frac{1}{9}z^2\right) &= \\ = \left(x^2y - \frac{1}{3}z\right) \cdot \left(\left(x^2y\right)^2 + \left(x^2y\right) \cdot \left(\frac{1}{3}z\right) + \left(\frac{1}{3}z\right)^2\right) &= \\ = \left(x^2y\right)^3 - \left(\frac{1}{3}z\right)^3 = x^6y^3 - \frac{1}{27}z^3; \end{aligned}$$

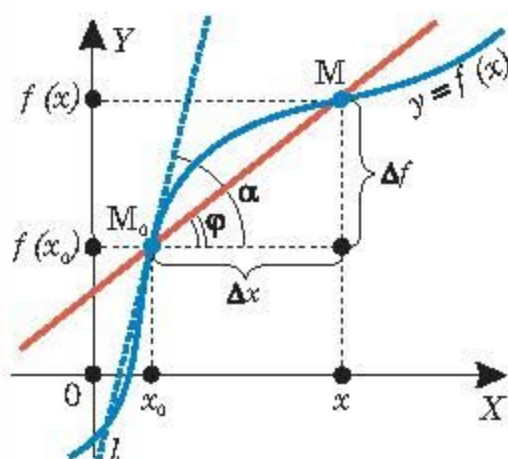
$$8p^6 - 343s^9 = (2p^2)^3 - (7s^3)^3 = (2p^2 - 7s^3)(4p^4 + 14p^2s^3 + 49s^6).$$

! Формулы сокращенного умножения часто используются справа налево ( $\leftarrow$ ):

$$a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$$

следует из формулы квадрата суммы двух величин.

## Геометрический смысл производной. Касательная



Секущая к графику  $f(x)$  — прямая, проходящая через любые две точки графика  $f(x)$ .

$M_0M$  — секущая с угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ , где  $\varphi$  —

угол наклона  $M_0M$  к положительному направлению оси  $OX$ .

Если зафиксировать точку  $M_0$ , а точку  $M$  приближать к  $M_0$ , двигаясь по графику  $f(x)$  (при этом  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\varphi \rightarrow \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$ ), то в итоге секущая займет предельное положение  $l$ .

Касательная к графику  $f(x)$  в точке  $x_0$  — предельное положение  $l$  секущей  $M_0M$  при  $M \rightarrow M_0$ .

Угловым коэффициентом касательной:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Геометрический смысл производной — угловым коэффициентом касательной в точке  $x_0$  равен производной  $f'(x_0)$ :

$$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$$

Уравнение касательной к графику  $f(x)$  в точке  $x_0$ :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Физический смысл производной:

Отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  — называется **средней**

**скоростью** изменения функции  $f(x)$  на промежутке с концами  $x_0$  и  $x_0 + \Delta x$ .

Производная  $f'(x_0)$  — **скорость** изменения функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



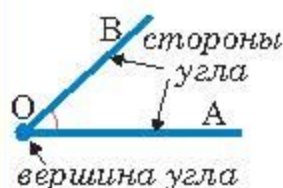
## Луч. Угол



**Луч (полупрямая) (OA)** — часть прямой, расположенная по одну сторону от точки  $O$  — начала луча.



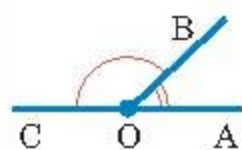
**Дополнительные лучи (OA и OB)** — различные лучи одной и той же прямой, имеющие общее начало  $O$ .



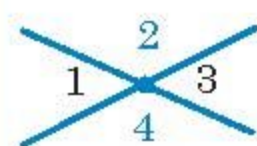
**Угол** — фигура, образованная двумя лучами (сторонами угла), исходящими из одной точки (вершины угла):  $\angle AOB$  или  $\angle O$ .



**Развернутый угол** — образован двумя дополнительными лучами.



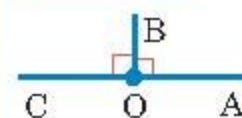
**Смежные углы ( $\angle AOB$  и  $\angle BOC$ )** — одна сторона общая (OB), а две другие являются дополнительными лучами (OA и OC).



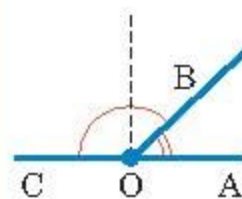
**Вертикальные углы ( $\angle 1$  и  $\angle 3$ ;  $\angle 2$  и  $\angle 4$ )** — стороны одного угла являются продолжениями сторон другого угла.



**Равные углы ( $\angle O$  и  $\angle C$ )** — углы, которые при наложении совмещаются:  $\angle O = \angle C$ .



**Прямой угол** — угол, равный своему смежному углу.



**Острый угол ( $\angle AOB$ )** — угол, меньший прямого угла.



**Тупой угол ( $\angle BOC$ )** — угол, больший прямого угла.



**Биссектриса угла (OK)** — луч с началом в вершине угла (точка  $O$ ), делящий его на два равных угла ( $\angle LOK = \angle KOM$ ): OK — биссектриса  $\angle LOM$ .



## ВВЕДЕНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИЮ

**Планиметрия** (геометрия на плоскости) изучает свойства фигур, расположенных в одной и той же плоскости.

**Стереометрия** (геометрия в пространстве) изучает свойства фигур, не все точки которых принадлежат одной плоскости.

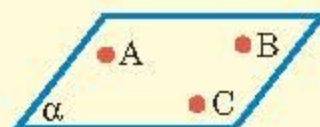
**Основные неопределяемые понятия стереометрии:** точка, прямая, плоскость, расстояние.

**Аксиома** — утверждение, принимаемое без доказательства.

**Аксиомы стереометрии:**

### Аксиома 1

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



$A, B, C \in \alpha$  — «точки  $A, B, C$  лежат в плоскости  $\alpha$ ».

### Аксиома 2

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки данной прямой лежат в этой плоскости.

Если точки  $A, B \in l$  и  $A, B \in \alpha$ , то  $l \subset \alpha$ .

$l \subset \alpha$  — «прямая  $l$  лежит в плоскости  $\alpha$ ».

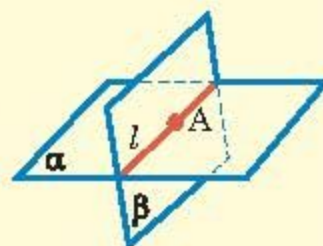


### Аксиома 3

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

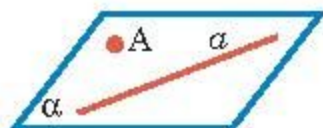
Если  $A \in \alpha$  и  $A \in \beta$ , то существует прямая  $l$  такая, что  $l \in \alpha, l \in \beta$  и  $\alpha \cap \beta = l$ .

$\alpha \cap \beta = l$  — «плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $l$ ».



**Следствия из аксиом:**

1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.



2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

