ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ V. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СРЕДНЕГО МЕДИЦИНСКОГО РАБОТНИКА

ГЛАВА 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕДИЦИНСКОЙ ПРАКТИКЕ

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Математические уравнения, описывающие различные медико-биологические процессы, обычно включают не только неизвестные функции, но и их производные: скорости, ускорения и т. п. Именно поэтому для нахождения функциональной зависимости между зависимыми и независимыми переменными необходимо уметь составлять и решать уравнения, содержащие неизвестную функцию, независимую переменную и производные от неизвестной функции. Такими уравнениями описываются биохимические процессы, происходящие в организме, процессы размножения и гибели бактерий, распространение импульсов в нервных и мышечных волокнах и т. д.

Определение

Равенство, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y = f(x)$, а также ее производные y', y'', ..., $y^{(n)}$, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*.

В обыкновенных дифференциальных уравнениях неизвестной является функция одного переменного. Общий вид уравнения:

$$F(x, y, y', y'', ...) = 0, \tag{4.1}$$

где F — известная функция, заданная в некоторой фиксированной области; x — независимая переменная; y — зависимая переменная (то есть зависимая от x) и подлежащая определению; y', y'', ..., $y^{(n)}$ — ее производные.

Порядок дифференциального уравнения определяется наибольшим порядком производной, входящей в уравнение.

Например, $2y' + 5y + 3x = 0$ — уравнение I порядка, $y'' + 3xy' + xy = 0$ — уравнение II порядка.

Определение

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение (4.1), обращает его в тождество, то есть левая и правая части этого уравнения должны быть равны. График этой функции называется *интегральной кривой*.

Процесс нахождения решения называется *интегрированием дифференциального уравнения*. Дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. Это связано с тем, что в процессе интегрирования вводятся постоянные интегрирования: C — для уравнения I порядка, C_1 и C_2 — для уравнения II порядка и т. д. Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка будет иметь вид:

$$y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Например, дано дифференциальное уравнение $y' = 3x^2$, $\frac{dy}{dx} = 3x^2$. Представим его в виде: $dy = 3x^2dx$; возьмем интеграл от левой и правой части уравнения: $\int dy = \int 3x^2 dx$. Получим $y = \frac{3x^3}{3} + C$, $y = x^3 + C$ — *общее решение дифференциального уравнения*, которое включает произвольную постоянную C. Графиком решения является семейство кубических гипербол, отличающихся на величину C (рис. 4.1).

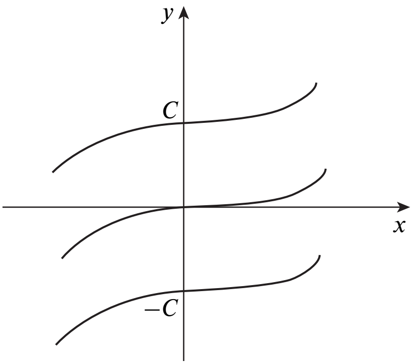

Рис. 4.1. Общее решение дифференциального уравнения $y' = 3x^2$

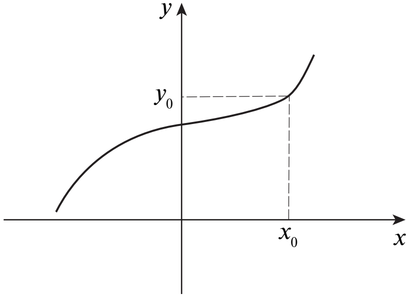

Рис. 4.2. Частное решение дифференциального уравнения

Для того чтобы из общего решения выделить одно, частное решение, необходимо к дифференциальному уравнению добавить некоторые дополнительные условия. Обычно задаются начальные условия, которые являются математической записью начального состояния процесса. Если задано значение $x = x_0$ и соответствующее ему значение $y_0 = f(x_0)$, то можно определить значение C. Таким образом, можно найти *частное решение* дифференциального уравнения. На графике этому соответствует одна кривая, содержащая точку с координатами x_0 и $y_0 = f(x_0)$ (рис. 4.2).

4.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Выбор метода решения дифференциального уравнения зависит от его вида. Аналитическое решение разработано лишь для некоторых видов дифференциальных уравнений, более сложные решаются с помощью приближенных численных методов на ЭВМ. Рассмотрим некоторые методы решения простейших дифференциальных уравнений.

4.2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0. \qquad (4.2)$$

После разделения переменных, когда каждый член будет зависеть только от одной переменной, общий интеграл уравнения находят почленным интегрированием:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy = 0. \qquad (4.3)$$

Решением этого уравнения будет:

$$F(x) + \varphi(y) = C, \text{ или } y = \psi(x) + C.$$

Постоянной интегрирования при этом придают вид, удобный для дальнейшего упрощения решения.

Пример 4.1. Найти решение уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = x\left(1 + y^2\right).$$

Решение. Данное уравнение разделим на множители, зависящие только от одной переменной:

$$\frac{dy}{1 + y^2} = xdx.$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int xdx,$$

получим: $\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C.$

Общее решение будет иметь вид:

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right). \ \triangleleft$$

Пример 4.2. Найти общее и частное решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + 2}$$

при $x_0 = 2$, $y_0 = 8$.

Решение.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x + 2}.$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x + 2}.$$

Отсюда: $\ln|y| = \ln|x + 2| + \ln C$. Потенцируя, получим $y = C(x + 2)$. Это общее решение уравнения. Подставим начальные условия, найдем C. $8 = C(2 + 2)$, $C = 2$.

Тогда частное решение — $y = 2(x + 2)$.$\triangleleft$

Пример 4.3. Найти частное решение уравнения $3y^2y' = y^3 + 1$ при $x_0 = 0$, $y_0 = 2$.

Решение. Проведем разделение переменных и проинтегрируем правую и левую части:

$$\int \frac{3y^2}{y^3 + 1} dy = \int dx.$$

Введем новую переменную $u = y^3 + 1$, тогда $du = 3y^2dy$. Далее:

$$\int \frac{du}{u} = \int dx;$$

$$\ln|y^3 + 1| = x - \ln C.$$

Потенцируя, получим $C(y^3+1)=e^x$. Подставим начальные условия $C(2^3+1)=e^0=1$, $C=\frac{1}{9}$. Тогда $y=\sqrt[3]{9e^x-1}$. Это частное решение. ◁

4.2.2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Определение

Уравнения вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{4.4}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — непрерывные функции, называются *линейными дифференциальными уравнениями первого порядка*.

Уравнение (4.4) называется линейным, так как неизвестная функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, то есть зависят от x линейно.

При $q(x)=0$ уравнение (4.4) называется *линейным однородным уравнением*.

$$y' + p(x)y = 0. \tag{4.5}$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, и его решение будет иметь вид:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Проинтегрируем:

$$\int\frac{dy}{y} = -\int p(x)dx;$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C.$$

Потенцируя, получим общее решение уравнения (4.5):

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{4.6}$$

Если $q(x)\neq 0$, то уравнение (4.4) называется *линейным неоднородным уравнением*.

Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right). \tag{4.7}$$

Пример 4.4. Найти общее решение уравнения $y' + y\cdot 2\cos x = 0$.

Решение. Согласно формуле (4.6) найдем $\int 2\cos x dx = 2\sin x$, тогда $y = Ce^{-2\sin x}$. ◁

Пример 4.5. Найти общее решение уравнения $y' + yx = x$.

Решение. Сравнивая данное уравнение с формулой (4.4), обозначим $p(x) = x$, $q(x) = x$. Тогда согласно формуле (4.7)

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int xdx} = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$\int q(x)e^{\frac{x^2}{2}}dx = \int xe^{\frac{x^2}{2}}dx = \int e^{\frac{x^2}{2}}d\left(\frac{x^2}{2}\right) = e^{\frac{x^2}{2}};$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C + e^{\frac{x^2}{2}}\right) = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}. \lhd$$

Пример 4.6. Найти частное решение уравнения $y' + \frac{1}{x}y = 3x$ при $x = 1$, $y = 1$.

Решение. Обозначим $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 3x$. Тогда

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln|x|}.$$

Учитывая, что $e^{\ln x} = x$, имеем

$$e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

$$3\int x \cdot xdx = 3\int x^2dx = x^3;$$

$$y = \frac{1}{x}\left(C + x^3\right).$$

Подставим начальные условия $1 = \frac{C}{1} + 1; C = 0.$ Тогда частное решение имеет вид: $y = x^2$. $\lhd$

4.3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Определение

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0,$$

где a_0, a_1 и a_2 — действительные числа.

Для нахождения общего решения составляют характеристическое уравнение $a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0$, которое получается из данного уравнения заменой функции y единицей, а производных y' и y'' — величиной k в степени, равной порядку производной, то есть соответственно на k и k^2.

Далее решают квадратное уравнение, корни которого определяют по формулам:

$$k_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0},\ k_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}.$$

Здесь возможны следующие случаи.

1. Если корни характеристического уравнения действительные и разные ($k_1 \neq k_2$), то общим решением уравнения будет функция

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

2. Если корни характеристического уравнения действительные и равные ($k_1 = k_2 = k$), то общим решением уравнения будет функция

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx},\text{ или } y = e^{kx}(C_1 + C_2x).$$

3. Если корни характеристического уравнения мнимые ($k = \pm bi$), то общим решением уравнения будет функция

$$y = C_1\cos bx + C_2\sin bx.$$

4. Если корни характеристического уравнения — комплексные сопряженные числа ($k = a \pm bi$), то общим решением уравнения будет функция

$$y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx).$$

Пример 4.7. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 8y' + 15y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 + 8k + 15 = 0;$$

$$k_1 = -3;\ k_2 = -5.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-5x}.\ \triangleleft$$

Пример 4.8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 8k + 16 = 0;$$

$$k_1 = k_2 = 4.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = e^{4x}(C_1 + C_2x). \lhd$$

Пример 4.9. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Решение.

$$k_2 + 1 = 0;$$

$$k = \pm i, \text{ где } i = \sqrt{-1}.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x. \lhd$$

Пример 4.10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Решение.

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$k_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x). \lhd$$

4.4. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Решение задач с помощью дифференциальных уравнений можно разбить на несколько этапов: во-первых, необходимо формализовать условия, в которых протекают изучаемые процессы; во-вторых, выбрать зависимые и независимые переменные; в-третьих, определить функциональные зависимости между ними, а после этого перейти к решению уравнения и анализу полученных решений. В уравнениях, описывающих медико-биологические процессы, в качестве независимой переменной чаще всего используется временна́я компонента. Именно поэтому искомая функция обычно описывает изменение некоторых параметров биологических систем во времени.

Радиоактивный распад. Известно, что скорость распада радиоактивного вещества прямо пропорциональна числу нераспавшихся радиоактивных ядер. Тогда

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \tag{4.8}$$

где dN/dt — скорость радиоактивного распада; N — количество нераспавшихся радиоактивных ядер; λ — постоянная распада, характеризующая радиоактивное вещество. Знак «–» указывает, что количество нераспавшихся ядер убывает со временем.

Выражение (4.8) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем уравнение:

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt,$$

где N_0 — начальное количество нераспавшихся ядер, то есть при $t = 0$, N — текущее количество, то есть в момент t. (Остальные параметры те же, что и в формуле (4.8).)

Найдем определенные интегралы:

$$\ln|N|\Big|_{N_0}^{N} = -\lambda t\Big|_0^t;$$

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda t;$$

$$\ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t.$$

Потенцируя, получим: $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Это решение показывает, что количество нераспавшихся ядер уменьшается по экспоненциальному закону и зависит от времени и постоянной распада (рис. 4.3, *а*).

Размножение бактерий. Если бактерии обитают в благоприятной среде, то скорость их размножения будет пропорциональна размеру популяции. Такое предположение описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = kx, \tag{4.9}$$

где x — количество бактерий; k — коэффициент пропорциональности. Тогда, разделяя переменные и интегрируя левую и правую части уравнения (4.9), получим:

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dx}{x} = k\int_0^t dt,$$

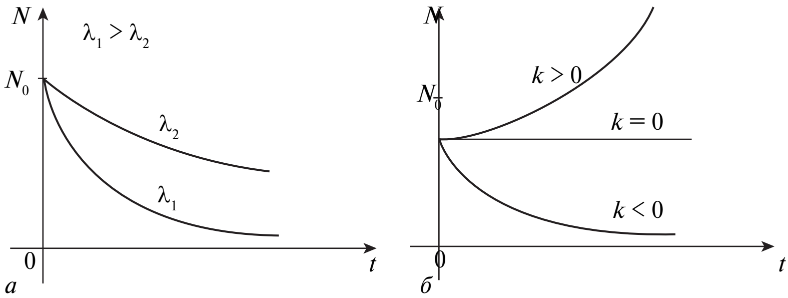

Рис. 4.3. Графики, отображающие: *а* — радиоактивный распад; *б* — размножение бактерий

где N_0 — начальное количество бактерий; N — количество бактерий в момент t. Вычисляя определенные интегралы, получим:

$$\ln|x|\Big|_{N_0}^{N} = kt\Big|_0^t, \quad \ln\frac{N}{N_0} = kt, \quad N = N_0 e^{kt}.$$

Получили экспоненциальную кривую, которая зависит от времени и k. Если $k > 0$, то количество бактерий будет возрастать по экспоненциальному закону, при $k < 0$ — убывать, а при $k = 0$ — оставаться на постоянном уровне (рис. 4.3, *б*). Для определения значения k необходимо иметь дополнительные сведения об изменении численности бактерий за конкретный промежуток времени.

Внутривенное введение декстрозы (Глюкозы♠). При внутривенном введении с помощью капельницы скорость поступления Глюкозы♠ в кровь постоянна и равна c. В крови Глюкоза♠ разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству Глюкозы♠. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = c - \alpha x, \tag{4.10}$$

где x — количество Глюкозы♠ в крови в текущий момент времени t; c — скорость поступления Глюкозы♠ в кровь; α — положительная постоянная.

Запишем это уравнение в виде:

$$x' + \alpha x = c.$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, и его общее решение находится по формуле (4.7):

$$x(t) = e^{-\int \alpha dt}\left(k + \int c e^{\int \alpha dt} dt\right) = e^{-\alpha t}\left(k + c\int e^{\alpha t} dt\right) =$$

$$= e^{-\alpha t}\left(k + \frac{c}{\alpha}\cdot e^{\alpha t}\right) = k e^{-\alpha t} + \frac{c}{\alpha},$$

где k — постоянная интегрирования. Чтобы найти постоянную k, необходимо знать начальное значение Глюкозы♠ в крови $x(0)$.

Тогда
$$x(0)=k+\frac{c}{\alpha},$$
$$k=x(0)-\frac{c}{\alpha}.$$

Частное решение уравнения (4.10) имеет вид:
$$x(t)=\frac{C}{\alpha}+\left[x(0)-\frac{C}{\alpha}\right]e^{-\alpha t}.$$

При увеличении времени уровень Глюкозы♠ в крови приближается к $\frac{C}{\alpha}$.

4.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.1. Найти общее решение дифференциальных уравнений методом разделения переменных:

1) $y' = 2y^2$;
2) $y' = \sin x$;
3) $y' = 2x + 1$;
4) $y' = y\cos x$;
5) $xy' - y = 0$;
6) $y' = 2xy$;
7) $3xdy = 2ydx$;
8) $x^2y' + y = 0$;
9) $e^xy' = 1$;
10) $y' = e^{3x+1}$.

4.2. Найти частные решение дифференциальных уравнений методом разделения переменных:

1) $xdx = dy$; $y(1) = 0$;
2) $xdx = dy$; $y(2) = 1$;
3) $ydy - xdx = dx$; $y(2) = 0$;
4) $2xy' = y$; $y(9) = 6$;
5) $x^2y' = y$; $y(0) = 5$;
6) $2y'\sqrt{x} = y$; $y(4) = 1$;
7) $xy' = \frac{y}{\ln x}$; $y(e) = 1$;
8) $y' + y\operatorname{tg}x = 0$; $y(0) = 2$.

4.3. Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $(x + y)dx + xdy = 0$;
2) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$;
3) $xy' = x + y$;
4) $y' = y\cos x$;
5) $y' - y = e^x$;
6) $xy' + 2y = 4$;
7) $y - xy' = y\ln\frac{x}{y}$;
8) $xy' = 2y + x^4$.

4.4. Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' - 3y = 4y$; 2) $y'' - 5y' + 6y = 0$;
3) $y'' - 10y' + 26y = 0$; 4) $y'' - 5y' - 6y = 0$;
5) $y'' + 4y' + 4y = 0$; 6) $y'' + 10y' + 25y = 0$.

4.5. Составить дифференциальные уравнения и найти частные решения.

1. Концентрация лекарственного препарата в крови уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,2 мг/л, а через 23 ч уменьшилась вдвое.

2. Скорость растворения лекарственного вещества в таблетках пропорциональна количеству лекарства в таблетке. Известно, что при $t = 0$ $m = m_0$. Найти закон растворения таблетки, если период полурастворения T.

3. Найти закон роста палочковидных клеток с течением времени, если скорость роста клетки пропорциональна ее длине l, $\frac{dl}{dt} = (\alpha - \beta)l$, где α и β — параметры, характеризующие условия роста клеток; $l = l_0$ при $t = 0$.

4. Скорость сокращения мышцы описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = \beta(x - x_0)$, где x_0 — полное сокращение мышцы; β — постоянная величина, зависящая от нагрузки; x — сокращение мышцы в данный момент t. Найти закон сокращения мышцы, если $x = 0$ при $t = 0$.

5. Скорость роста микроорганизмов пропорциональна их количеству в данный момент. В начальный момент имелось 100 микроорганизмов, и их число удвоилось за 6 ч. Найти зависимость количества микроорганизмов от времени и количество микроорганизмов через сутки.