



# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
Список сокращений . . . . .	9
Введение . . . . .	10

## ЧАСТЬ I. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

<b>Глава 1. Функции. Предел функции . . . . .</b>	<b>17</b>
1.1. Числовые множества . . . . .	17
1.2. Функция одной переменной . . . . .	19
1.2.1. Понятие функции . . . . .	19
1.2.2. Способы задания функций . . . . .	20
1.2.3. Нахождение области определения и области значений функции . . . . .	21
1.2.4. Обратная функция . . . . .	22
1.2.5. Четные и нечетные функции . . . . .	24
1.2.6. Периодические функции . . . . .	24
1.2.7. Возрастающие и убывающие функции . . . . .	25
1.3. Простейшие элементарные функции . . . . .	26
1.3.1. Линейная функция . . . . .	26
1.3.2. Степенная функция . . . . .	27
1.3.3. Показательная функция . . . . .	28
1.3.4. Логарифмическая функция . . . . .	28
1.3.5. Тригонометрические функции . . . . .	29
1.3.6. Обратные тригонометрические функции . . . . .	30
1.4. Построение графиков функций . . . . .	32
1.5. Предел функции . . . . .	35
1.6. Теоремы о пределах функций . . . . .	37
1.7. Понятие непрерывности функции. Точки разрыва . . . . .	40
1.8. Свойства непрерывных функций . . . . .	43
1.9. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	45
<b>Глава 2. Дифференциальное исчисление . . . . .</b>	<b>48</b>
2.1. Производная функции. Геометрический и механический смысл производной . . . . .	48
2.2. Правила нахождения производных функций . . . . .	51
2.3. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала . . . . .	54
2.4. Применение производной при исследовании функций и построении графиков . . . . .	56
2.5. Функции нескольких переменных. Частные производные . . . . .	63
2.5.1. Частные производные первого порядка . . . . .	65
2.6. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	66
<b>Глава 3. Интегральное исчисление . . . . .</b>	<b>69</b>
3.1. Первообразная функции и неопределенный интеграл . . . . .	69
3.2. Основные свойства неопределенного интеграла . . . . .	70

3.3. Основные методы интегрирования . . . . .	71
3.3.1. Метод непосредственного интегрирования . . . . .	71
3.3.2. Интегрирование методом замены переменной . . . . .	71
3.3.3. Интегрирование по частям . . . . .	72
3.3.4. Интегрирование рациональных функций . . . . .	74
3.4. Определенный интеграл . . . . .	75
3.4.1. Свойства определенного интеграла . . . . .	76
3.4.2. Формула Ньютона–Лейбница . . . . .	77
3.4.3. Вычисление определенных интегралов различными методами . . . . .	78
3.4.4. Применение определенного интеграла к вычислению различных величин . . . . .	80
3.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	83
<b>Глава 4. Дифференциальные уравнения и их применение в медицинской практике . . . . .</b>	<b>85</b>
4.1. Основные понятия и определения дифференциального уравнения . . . . .	85
4.2. Методы решения некоторых дифференциальных уравнений . . . . .	87
4.2.1. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными . . . . .	87
4.2.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка . . . . .	89
4.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами . . . . .	90
4.4. Применение дифференциальных уравнений первого порядка для решения задач . . . . .	92
4.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	95
<b>ЧАСТЬ II. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ</b>	
<b>Глава 5. Предел последовательности . . . . .</b>	<b>99</b>
5.1. Числовая последовательность . . . . .	99
5.2. Предел последовательности . . . . .	100
5.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	103
<b>Глава 6. Ряды . . . . .</b>	<b>104</b>
6.1. Числовые ряды . . . . .	104
6.2. Сходимость и расходимость числовых рядов . . . . .	105
6.3. Признаки сходимости рядов с положительными членами . . . . .	108
6.4. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена . . . . .	111
6.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	115
<b>ЧАСТЬ III. ОПЕРАЦИИ С МНОЖЕСТВАМИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ</b>	
<b>Глава 7. Множества . . . . .</b>	<b>119</b>
7.1. Элементы и множества . . . . .	119
7.2. Основные понятия . . . . .	119
7.3. Операции над множествами . . . . .	121
7.4. Свойства операций над множествами . . . . .	129
7.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	131

<b>Глава 8. Графы</b> . . . . .	132
8.1. История теории графов . . . . .	132
8.2. Основные определения . . . . .	134
8.3. Маршруты, цепи, циклы . . . . .	141
8.4. Деревья . . . . .	149
8.5. Операции над графами . . . . .	154
8.6. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	155

#### **ЧАСТЬ IV. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ**

<b>Глава 9. Основы теории вероятностей</b> . . . . .	159
9.1. Основные понятия комбинаторики . . . . .	159
9.2. Случайные события и операции над ними . . . . .	161
9.2.1. Случайные события . . . . .	161
9.2.2. Операции над событиями . . . . .	164
9.2.3. Вероятность события . . . . .	166
9.2.4. Теорема сложения вероятностей . . . . .	168
9.2.5. Теорема умножения вероятностей . . . . .	170
9.2.6. Формула полной вероятности . . . . .	172
9.3. Случайные величины . . . . .	173
9.3.1. Распределение дискретных и непрерывных случайных величин . . . . .	174
9.3.2. Числовые характеристики случайных величин . . . . .	179
9.3.3. Нормальный закон распределения . . . . .	183
9.3.4. Закон больших чисел . . . . .	185
9.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	186
<b>Глава 10. Основы математической статистики</b> . . . . .	192
10.1. Задачи математической статистики . . . . .	192
10.2. Генеральная совокупность и выборка . . . . .	193
10.3. Статистическое распределение (вариационный ряд). Гистограмма. Полигон . . . . .	194
10.4. Характеристики положения и рассеяния статистического распределения . . . . .	197
10.5. Оценка параметров генеральной совокупности по ее выборке. . . . .	198
10.6. Интервальная оценка. Доверительный интервал и доверительная вероятность . . . . .	202
10.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	204
<b>Глава 11. Математическая статистика и ее роль в медицине и здравоохранении</b> . . . . .	207
11.1. Медицинская статистика — отрасль статистической науки . . . . .	207
11.2. Этапы медико-статистического исследования . . . . .	208
11.3. Анализ медико-демографических показателей . . . . .	215
11.4. Применение статистических показателей для оценки деятельности поликлиники и стационара . . . . .	221
11.4.1. Показатели работы поликлиники . . . . .	221
11.4.2. Основные показатели работы стационара . . . . .	222
11.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	223

**ЧАСТЬ V. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ  
СРЕДНЕГО МЕДИЦИНСКОГО РАБОТНИКА**

<b>Глава 12. Применение математических методов в профессиональной деятельности среднего медицинского персонала . . . . .</b>	<b>227</b>
12.1. Определение процента. Составление и решение пропорций . . . . .	227
12.2. Расчет процентной концентрации растворов . . . . .	229
12.3. Жизненная емкость легких . . . . .	232
12.4. Показатели сердечной деятельности . . . . .	235
12.5. Оценка физического развития детей . . . . .	238
12.6. Способы расчета питания грудных детей . . . . .	244
12.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	246
<b>Глава 13. Прикладные задачи в области профессиональной деятельности . . . . .</b>	<b>248</b>
13.1. Решение задач профессиональной направленности . . . . .	248
13.2. Математические вычисления, используемые при изучении дисциплин «Сестринский уход в педиатрии», «Диагностика в педиатрии», «Лечение пациентов детского возраста» . . . . .	250
13.3. Антропометрические индексы . . . . .	252
13.4. Математические вычисления, используемые при изучении дисциплин «Сестринский уход в акушерстве и гинекологии», «Диагностика в акушерстве и гинекологии», «Оказание акушерско-гинекологической помощи» . . . . .	253
13.5. Математические вычисления, используемые при изучении модуля «Выполнение работ по профессии младшая медицинская сестра по уходу за больными» . . . . .	254
13.5.1. Цена деления шприца . . . . .	254
13.5.2. Разведение растворов . . . . .	255
13.5.3. Расчет водного баланса . . . . .	258
13.5.4. Разведение антибиотиков . . . . .	259
13.6. Математические вычисления, используемые при изучении дисциплины «Фармакология» . . . . .	261
13.6.1. Методы изготовления жидких лекарственных форм и способы выражения концентрации . . . . .	261
13.7. Математические вычисления, используемые при изучении дисциплины «Основы реаниматологии, дифференциальной диагностики и оказания неотложной медицинской помощи на догоспитальном этапе» . . . . .	262
13.8. Математические вычисления, используемые при изучении дисциплин «Сестринский уход при различных заболеваниях и состояниях», «Сестринский уход в терапии», «Лечение пациентов терапевтического профиля» . . . . .	264
13.9. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	267
Ответы . . . . .	277
Список литературы . . . . .	293
Приложение . . . . .	295
Предметный указатель . . . . .	296

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕДИЦИНСКОЙ ПРАКТИКЕ

## 4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Математические уравнения, описывающие различные медико-биологические процессы, обычно включают не только неизвестные функции, но и их производные: скорости, ускорения и т. п. Именно поэтому для нахождения функциональной зависимости между зависимыми и независимыми переменными необходимо уметь составлять и решать уравнения, содержащие неизвестную функцию, независимую переменную и производные от неизвестной функции. Такими уравнениями описываются биохимические процессы, происходящие в организме, процессы размножения и гибели бактерий, распространение импульсов в нервных и мышечных волокнах и т. д.

### Определение

Равенство, связывающее независимую переменную  $x$ , неизвестную функцию  $y = f(x)$ , а также ее производные  $y'$ ,  $y''$ , ...,  $y^{(n)}$ , называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*.

В обыкновенных дифференциальных уравнениях неизвестной является функция одного переменного. Общий вид уравнения:

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0, \quad (4.1)$$

где  $F$  — известная функция, заданная в некоторой фиксированной области;  $x$  — независимая переменная;  $y$  — зависимая переменная (то есть зависима от  $x$ ) и подлежащая определению;  $y'$ ,  $y''$ , ...,  $y^{(n)}$  — ее производные.

Порядок дифференциального уравнения определяется наибольшим порядком производной, входящей в уравнение.

**Например,**  $2y' + 5y + 3x = 0$  — уравнение I порядка,  $y'' + 3xy' + xy = 0$  — уравнение II порядка.

### Определение

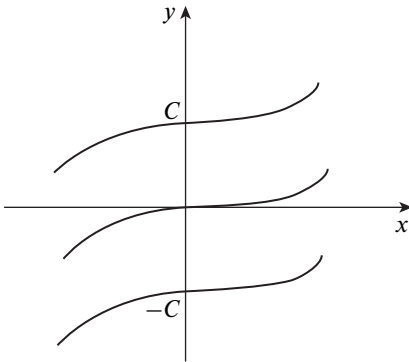
*Решением дифференциального уравнения* называется функция  $y = f(x)$ , которая, будучи подставлена в уравнение (4.1), обращает его в тождество, то есть левая и правая части этого уравнения должны быть равны. График этой функции называется *интегральной кривой*.

Процесс нахождения решения называется *интегрированием дифференциального уравнения*. Дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. Это связано с тем, что в процессе интегрирования вводятся постоянные интегрирования:  $C$  — для уравнения I порядка,  $C_1$  и  $C_2$  — для уравнения II порядка и т. д. Общее решение дифференциального уравнения  $n$ -го порядка будет иметь вид:

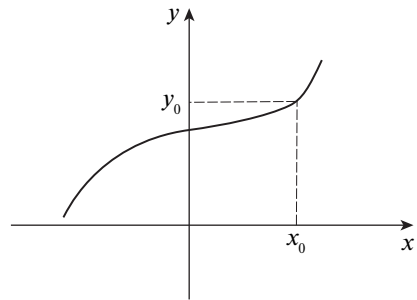
$$y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

**Например,** дано дифференциальное уравнение  $y' = 3x^2$ ,  $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ .

Представим его в виде:  $dy = 3x^2 dx$ ; возьмем интеграл от левой и правой части уравнения:  $\int dy = \int 3x^2 dx$ . Получим  $y = \frac{3x^3}{3} + C$ ,  $y = x^3 + C$  — *общее решение дифференциального уравнения*, которое включает произвольную постоянную  $C$ . Графиком решения является семейство кубических гипербол, отличающихся на величину  $C$  (рис. 4.1).



**Рис. 4.1.** Общее решение дифференциального уравнения  $y' = 3x^2$



**Рис. 4.2.** Частное решение дифференциального уравнения

Для того чтобы из общего решения выделить одно, частное решение, необходимо к дифференциальному уравнению добавить некоторые дополнительные условия. Обычно задаются начальные условия, которые являются математической записью начального состояния процесса. Если задано значение  $x = x_0$  и соответствующее ему значение  $y_0 = f(x_0)$ , то можно определить значение  $C$ . Таким образом, можно найти *частное решение* дифференциального уравнения. На графике этому соответствует одна кривая, содержащая точку с координатами  $x_0$  и  $y_0 = f(x_0)$  (рис. 4.2).

## 4.2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Выбор метода решения дифференциального уравнения зависит от его вида. Аналитическое решение разработано лишь для некоторых видов дифференциальных уравнений, более сложные решаются с помощью приближенных численных методов на ЭВМ. Рассмотрим некоторые методы решения простейших дифференциальных уравнений.

### 4.2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение вида  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0. \quad (4.2)$$

После разделения переменных, когда каждый член будет зависеть только от одной переменной, общий интеграл уравнения находят почленным интегрированием:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = 0. \quad (4.3)$$

Решением этого уравнения будет:

$$F(x) + \varphi(y) = C, \text{ или } y = \psi(x) + C.$$

Постоянной интегрирования при этом придают вид, удобный для дальнейшего упрощения решения.



**Пример 4.1.** Найти решение уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = x(1 + y^2).$$

*Решение.* Данное уравнение разделим на множители, зависящие только от одной переменной:

$$\frac{dy}{1 + y^2} = x dx.$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int x dx,$$

получим:  $\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C.$

Общее решение будет иметь вид:

$$y = \operatorname{tg} \left( \frac{x^2}{2} + C \right). \triangleleft$$

**Пример 4.2.** Найти общее и частное решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + 2}$$

при  $x_0 = 2, y_0 = 8.$

*Решение.*

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x + 2}.$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x + 2}.$$

Отсюда:  $\ln|y| = \ln|x + 2| + \ln C.$  Потенцируя, получим  $y = C(x + 2).$  Это общее решение уравнения. Подставим начальные условия, найдем  $C.$   $8 = C(2 + 2), C = 2.$

Тогда частное решение —  $y = 2(x + 2).$   $\triangleleft$

**Пример 4.3.** Найти частное решение уравнения  $3y^2y' = y^3 + 1$  при  $x_0 = 0, y_0 = 2.$

*Решение.* Проведем деление переменных и проинтегрируем правую и левую части:

$$\int \frac{3y^2}{y^3 + 1} dy = \int dx.$$

Введем новую переменную  $u = y^3 + 1,$  тогда  $du = 3y^2 dy.$  Далее:

$$\int \frac{du}{u} = \int dx;$$

$$\ln|y^3 + 1| = x - \ln C.$$

Потенцируя, получим  $C(y^3 + 1) = e^x$ . Подставим начальные условия  $C(2^3 + 1) = e^0 = 1$ ,  $C = \frac{1}{9}$ . Тогда  $y = \sqrt[3]{9e^x - 1}$ . Это частное решение.  $\triangleleft$

## 4.2.2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

### Определение

Уравнения вида

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (4.4)$$

где  $p(x)$  и  $q(x)$  — непрерывные функции, называются *линейными дифференциальными уравнениями первого порядка*.

Уравнение (4.4) называется линейным, так как неизвестная функция  $y$  и ее производная  $y'$  входят в уравнение в первой степени, то есть зависят от  $x$  линейно.

При  $q(x) = 0$  уравнение (4.4) называется *линейным однородным уравнением*.

$$y' + p(x)y = 0. \quad (4.5)$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, и его решение будет иметь вид:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx;$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C.$$

Потенцируя, получим общее решение уравнения (4.5):

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}. \quad (4.6)$$

Если  $q(x) \neq 0$ , то уравнение (4.4) называется *линейным неоднородным уравнением*.

Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left( C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right). \quad (4.7)$$

**Пример 4.4.** Найти общее решение уравнения  $y' + y \cdot 2\cos x = 0$ .

*Решение.* Согласно формуле (4.6) найдем  $\int 2\cos x dx = 2\sin x$ , тогда  $y = Ce^{-2\sin x}$ .  $\triangleleft$

**Пример 4.5.** Найти общее решение уравнения  $y' + ux = x$ .

*Решение.* Сравнивая данное уравнение с формулой (4.4), обозначим  $p(x) = x$ ,  $q(x) = x$ . Тогда согласно формуле (4.7)

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$\int q(x)e^{\frac{x^2}{2}} dx = \int x e^{\frac{x^2}{2}} dx = \int e^{\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = e^{\frac{x^2}{2}};$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \left( C + e^{\frac{x^2}{2}} \right) = 1 + C e^{-\frac{x^2}{2}}. \triangleleft$$

**Пример 4.6.** Найти частное решение уравнения  $y' + \frac{1}{x}y = 3x$  при  $x = 1$ ,  $y = 1$ .

*Решение.* Обозначим  $p(x) = \frac{1}{x}$ ,  $q(x) = 3x$ . Тогда

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln|x|}.$$

Учитывая, что  $e^{\ln x} = x$ , имеем

$$e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

$$3 \int x \cdot x dx = 3 \int x^2 dx = x^3;$$

$$y = \frac{1}{x} (C + x^3).$$

Подставим начальные условия  $1 = \frac{C}{1} + 1$ ;  $C = 0$ . Тогда частное решение имеет вид:  $y = x^2$ .  $\triangleleft$

## 4.3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

### Определение

*Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:*

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,$$

где  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$  — действительные числа.

Для нахождения общего решения составляют характеристическое уравнение  $a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0$ , которое получается из данного уравнения заменой функции  $y$  единицей, а производных  $y'$  и  $y''$  — величиной  $k$  в степени, равной порядку производной, то есть соответственно на  $k$  и  $k^2$ .

Далее решают квадратное уравнение, корни которого определяют по формулам:

$$k_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}, \quad k_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0}.$$

Здесь возможны следующие случаи.

1. Если корни характеристического уравнения действительные и разные ( $k_1 \neq k_2$ ), то общим решением уравнения будет функция

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.

2. Если корни характеристического уравнения действительные и равные ( $k_1 = k_2 = k$ ), то общим решением уравнения будет функция

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}, \text{ или } y = e^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

3. Если корни характеристического уравнения мнимые ( $k = \pm bi$ ), то общим решением уравнения будет функция

$$y = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx.$$

4. Если корни характеристического уравнения — комплексные сопряженные числа ( $k = a \pm bi$ ), то общим решением уравнения будет функция

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

**Пример 4.7.** Найти общее решение уравнения

$$y'' + 8y' + 15y = 0.$$

*Решение.* Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 + 8k + 15 = 0;$$

$$k_1 = -3; k_2 = -5.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-5x}. \triangleleft$$

**Пример 4.8.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

*Решение.* Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 8k + 16 = 0;$$

$$k_1 = k_2 = 4.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = e^{4x}(C_1 + C_2x). \triangleleft$$

**Пример 4.9.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0.$$

*Решение.*

$$k^2 + 1 = 0;$$

$$k = \pm i, \text{ где } i = \sqrt{-1}.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \triangleleft$$

**Пример 4.10.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

*Решение.*

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$k_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \triangleleft$$

## 4.4. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Решение задач с помощью дифференциальных уравнений можно разбить на несколько этапов: во-первых, необходимо формализовать условия, в которых протекают изучаемые процессы; во-вторых, выбрать зависимые и независимые переменные; в-третьих, определить функциональные зависимости между ними, а после этого перейти к решению уравнения и анализу полученных решений. В уравнениях, описывающих медико-биологические процессы, в качестве независимой переменной чаще всего используется временная компонента. Именно поэтому искомая функция обычно описывает изменение некоторых параметров биологических систем во времени.

**Радиоактивный распад.** Известно, что скорость распада радиоактивного вещества прямо пропорциональна числу нераспавшихся радиоактивных ядер. Тогда

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad (4.8)$$

где  $dN/dt$  — скорость радиоактивного распада;  $N$  — количество нераспавшихся радиоактивных ядер;  $\lambda$  — постоянная распада, характеризующая радиоактивное вещество. Знак « $-$ » указывает, что количество нераспавшихся ядер убывает со временем.

Выражение (4.8) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем уравнение:

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt,$$

где  $N_0$  — начальное количество нераспавшихся ядер, то есть при  $t = 0$ ,  $N$  — текущее количество, то есть в момент  $t$ . (Остальные параметры те же, что и в формуле (4.8).)

Найдем определенные интегралы:

$$\ln|N| \Big|_{N_0}^N = -\lambda t \Big|_0^t;$$

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda t;$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t.$$

Потенцируя, получим:  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ .

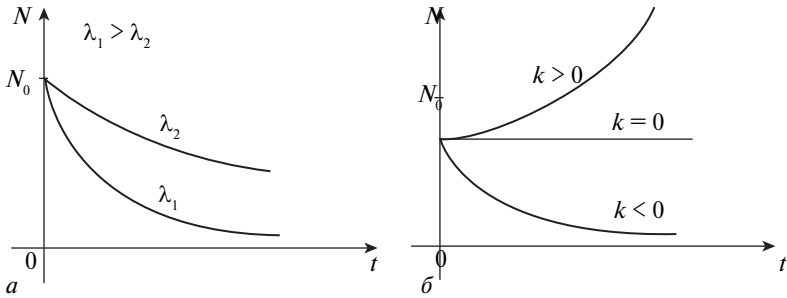
Это решение показывает, что количество нераспавшихся ядер уменьшается по экспоненциальному закону и зависит от времени и постоянной распада (рис. 4.3, а).

**Размножение бактерий.** Если бактерии обитают в благоприятной среде, то скорость их размножения будет пропорциональна размеру популяции. Такое предположение описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad (4.9)$$

где  $x$  — количество бактерий;  $k$  — коэффициент пропорциональности. Тогда, разделяя переменные и интегрируя левую и правую части уравнения (4.9), получим:

$$\int_{N_0}^N \frac{dx}{x} = k \int_0^t dt,$$



**Рис. 4.3.** Графики, отображающие: *a* — радиоактивный распад; *б* — размножение бактерий где  $N_0$  — начальное количество бактерий;  $N$  — количество бактерий в момент  $t$ . Вычисляя определенные интегралы, получим:

$$\ln|x| \Big|_{N_0}^N = kt \Big|_0^t, \quad \ln \frac{N}{N_0} = kt, \quad N = N_0 e^{kt}.$$

Получили экспоненциальную кривую, которая зависит от времени и  $k$ . Если  $k > 0$ , то количество бактерий будет возрастать по экспоненциальному закону, при  $k < 0$  — убывать, а при  $k = 0$  — оставаться на постоянном уровне (рис. 4.3, б). Для определения значения  $k$  необходимо иметь дополнительные сведения об изменении численности бактерий за конкретный промежуток времени.

**Внутривенное введение декстрозы (Глюкозы<sup>▲</sup>).** При внутривенном введении с помощью капельницы скорость поступления Глюкозы<sup>▲</sup> в кровь постоянна и равна  $c$ . В крови Глюкоза<sup>▲</sup> разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству Глюкозы<sup>▲</sup>. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = c - \alpha x, \quad (4.10)$$

где  $x$  — количество Глюкозы<sup>▲</sup> в крови в текущий момент времени  $t$ ;  $c$  — скорость поступления Глюкозы<sup>▲</sup> в кровь;  $\alpha$  — положительная постоянная.

Запишем это уравнение в виде:

$$x' + \alpha x = c.$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, и его общее решение находится по формуле (4.7):

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int \alpha dt} \left( k + \int c e^{\int \alpha dt} dt \right) = e^{-\alpha t} \left( k + c \int e^{\alpha t} dt \right) = \\ &= e^{-\alpha t} \left( k + \frac{c}{\alpha} \cdot e^{\alpha t} \right) = k e^{-\alpha t} + \frac{c}{\alpha}, \end{aligned}$$

где  $k$  — постоянная интегрирования. Чтобы найти постоянную  $k$ , необходимо знать начальное значение Глюкозы<sup>▲</sup> в крови  $x(0)$ .

Тогда

$$x(0) = k + \frac{c}{\alpha},$$

$$k = x(0) - \frac{c}{\alpha}.$$

Частное решение уравнения (4.10) имеет вид:

$$x(t) = \frac{C}{\alpha} + \left[ x(0) - \frac{C}{\alpha} \right] e^{-\alpha t}.$$

При увеличении времени уровень Глюкозы<sup>▲</sup> в крови приближается к  $\frac{C}{\alpha}$ .

## 4.5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**4.1.** Найти общее решение дифференциальных уравнений методом разделения переменных:

- |                    |                       |
|--------------------|-----------------------|
| 1) $y' = 2y^2$ ;   | 2) $y' = \sin x$ ;    |
| 3) $y' = 2x + 1$ ; | 4) $y' = y \cos x$ ;  |
| 5) $xy' - y = 0$ ; | 6) $y' = 2xy$ ;       |
| 7) $3xdy = 2ydx$ ; | 8) $x^2y' + y = 0$ ;  |
| 9) $e^xy' = 1$ ;   | 10) $y' = e^{3x+1}$ . |

**4.2.** Найти частные решение дифференциальных уравнений методом разделения переменных:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $x dx = dy$ ; $y(1) = 0$ ;             | 2) $x dx = dy$ ; $y(2) = 1$ ;                      |
| 3) $y dy - x dx = dx$ ; $y(2) = 0$ ;      | 4) $2xy' = y$ ; $y(9) = 6$ ;                       |
| 5) $x^2y' = y$ ; $y(0) = 5$ ;             | 6) $2y'\sqrt{x} = y$ ; $y(4) = 1$ ;                |
| 7) $xy' = \frac{y}{\ln x}$ ; $y(e) = 1$ ; | 8) $y' + y \operatorname{tg} x = 0$ ; $y(0) = 2$ . |

**4.3.** Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

- |                                    |                                  |
|------------------------------------|----------------------------------|
| 1) $(x + y)dx + xdy = 0$ ;         | 2) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$ ; |
| 3) $xy' = x + y$ ;                 | 4) $y' = y \cos x$ ;             |
| 5) $y' - y = e^x$ ;                | 6) $xy' + 2y = 4$ ;              |
| 7) $y - xy' = y \ln \frac{x}{y}$ ; | 8) $xy' = 2y + x^4$ .            |



**4.4.** Найти общее решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

- 1)  $y'' - 3y' = 4y$ ;                      2)  $y'' - 5y' + 6y = 0$ ;  
 3)  $y'' - 10y' + 26y = 0$ ;                4)  $y'' - 5y' - 6y = 0$ ;  
 5)  $y'' + 4y' + 4y = 0$ ;                    6)  $y'' + 10y' + 25y = 0$ .

**4.5.** Составить дифференциальные уравнения и найти частные решения.

1. Концентрация лекарственного препарата в крови уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если в начальный момент времени она была равна 0,2 мг/л, а через 23 ч уменьшилась вдвое.

2. Скорость растворения лекарственного вещества в таблетках пропорциональна количеству лекарства в таблетке. Известно, что при  $t = 0$   $m = m_0$ . Найти закон растворения таблетки, если период полурасстворения  $T$ .

3. Найти закон роста палочковидных клеток с течением времени, если скорость роста клетки пропорциональна ее длине  $l$ ,  $\frac{dl}{dt} = (\alpha - \beta)l$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — параметры, характеризующие условия роста клеток;  $l = l_0$  при  $t = 0$ .

4. Скорость сокращения мышцы описывается уравнением  $\frac{dx}{dt} = \beta(x - x_0)$ , где  $x_0$  — полное сокращение мышцы;  $\beta$  — постоянная величина, зависящая от нагрузки;  $x$  — сокращение мышцы в данный момент  $t$ . Найти закон сокращения мышцы, если  $x = 0$  при  $t = 0$ .

5. Скорость роста микроорганизмов пропорциональна их количеству в данный момент. В начальный момент имелось 100 микроорганизмов, и их число удвоилось за 6 ч. Найти зависимость количества микроорганизмов от времени и количество микроорганизмов через сутки.