ПРЕДИСЛОВИЕ

С недавних пор обучение в высших учебных заведениях стало менее строгим, и я слышал, что бывают студенты электротехнических факультетов, которые плохо понимают работу электрических цепей. И я сам, преподавая в университете как раз на подобном факультете, сталкивался со студентами, которые не могут решить простых задач, связанных с электрическими цепями. И я стал думать, как же решить эту проблему. Я не смог найти никакого магического средства, но понял, что многие студенты, не понимающие электрических цепей, не понимают комплексных чисел. И тогда, посоветовавшись с издательством Ohmsha, мы решили сделать эту книгу.

Мнимое число, по-английски Imaginary number, – это число, созданное воображением. При этом почему-то по-русски оно называется «мнимым», и это название вызывает не самые хорошие ассоциации. Но разве числа, называемые действительными, при этом существуют в реальном мире? Люди придумали числа, но природные явления до чисел и после их появления одинаковы. Просто с помощью чисел и формул люди описывают явления природы, чтобы лучше их понять.

Итак, комплексные числа являются мощным инструментом для расчёта колебаний силы тока и напряжения в электрических цепях, особенно для переменного тока. А поскольку на электротехнических факультетах изучают в основном переменный ток, то если студент не умеет представлять напряжение и силу тока в виде комплексных чисел, то он не сможет получать хорошие оценки. Кроме того, есть и множество других специализаций, так или иначе связанных с электричеством, то есть и на квалификационных экзаменах других факультетов часто попадаются задачи по переменному току, для решения которых нужно использовать мнимые и комплексные числа.

Моя цель – чтобы эту книгу в качестве руководства по мнимым и комплексным числам прочитало как можно больше людей. И если кто-то из них после прочтения будет лучше разбираться в комплексных числах, почувствует интерес к решению задач по электрическим цепям с использованием мнимых и комплексных чисел, я буду счастлив.

Я хочу поблагодарить за помощь и советы по работе над книгой всех сотрудников отдела по развитию издательства Ohmsha, сделавших интересными и понятными мою скучную рукопись господина Нагакава Наруки и господина Исино Тои, а также всех сотрудников TREND-PRO.

И в заключение хочу подчеркнуть, что эта книга не является профессиональным руководством, и с точки зрения математики в ней, возможно, появляются не совсем корректные выражения. Но главной задачей этой книги было дать простое и наглядное объяснение для начинающих, что из себя представляют комплексные и мнимые числа. И именно это ставилось во главу угла.

Ноябрь 2010 *Оучи Масаси*

СОДЕРЖАНИЕ

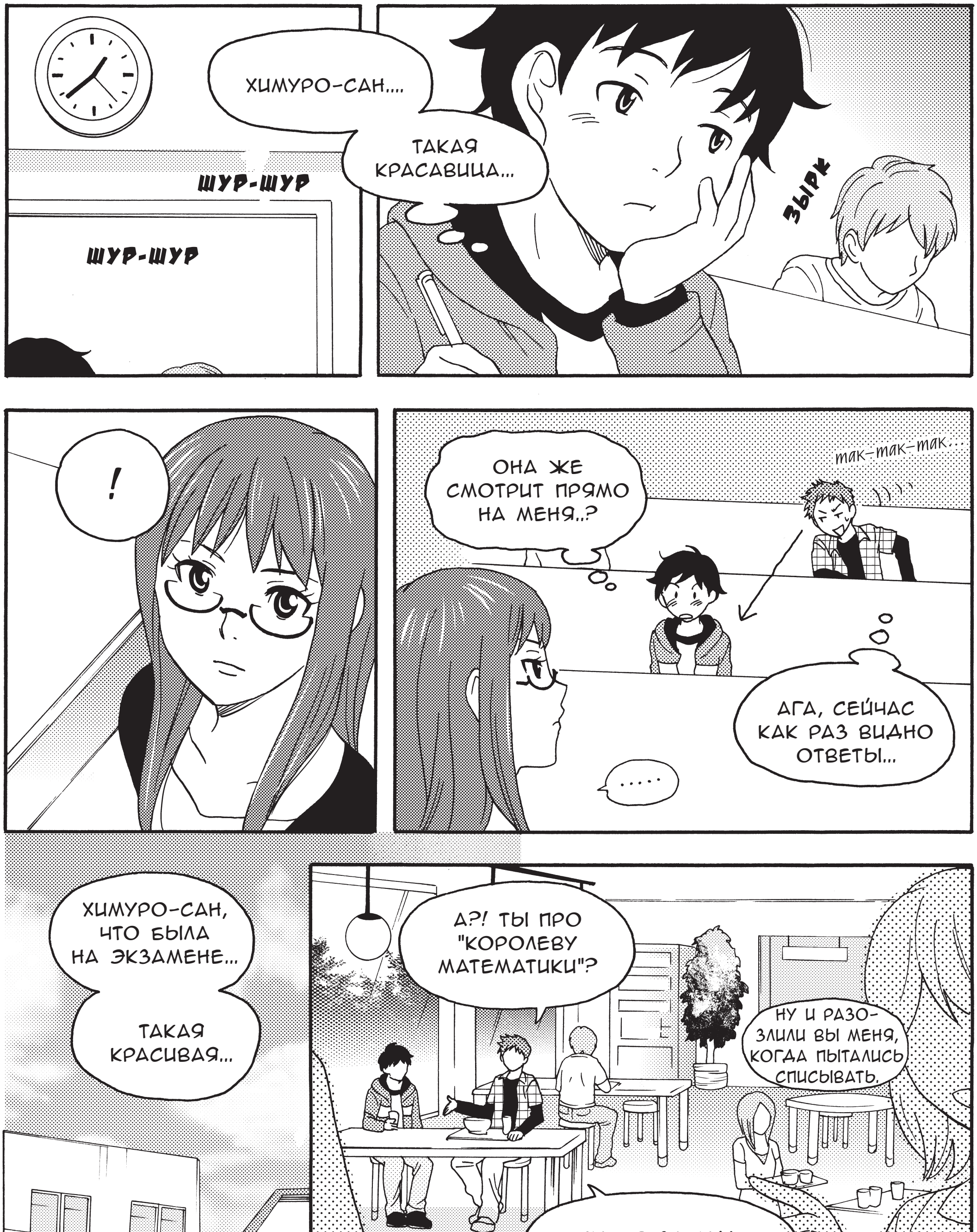
Пролог

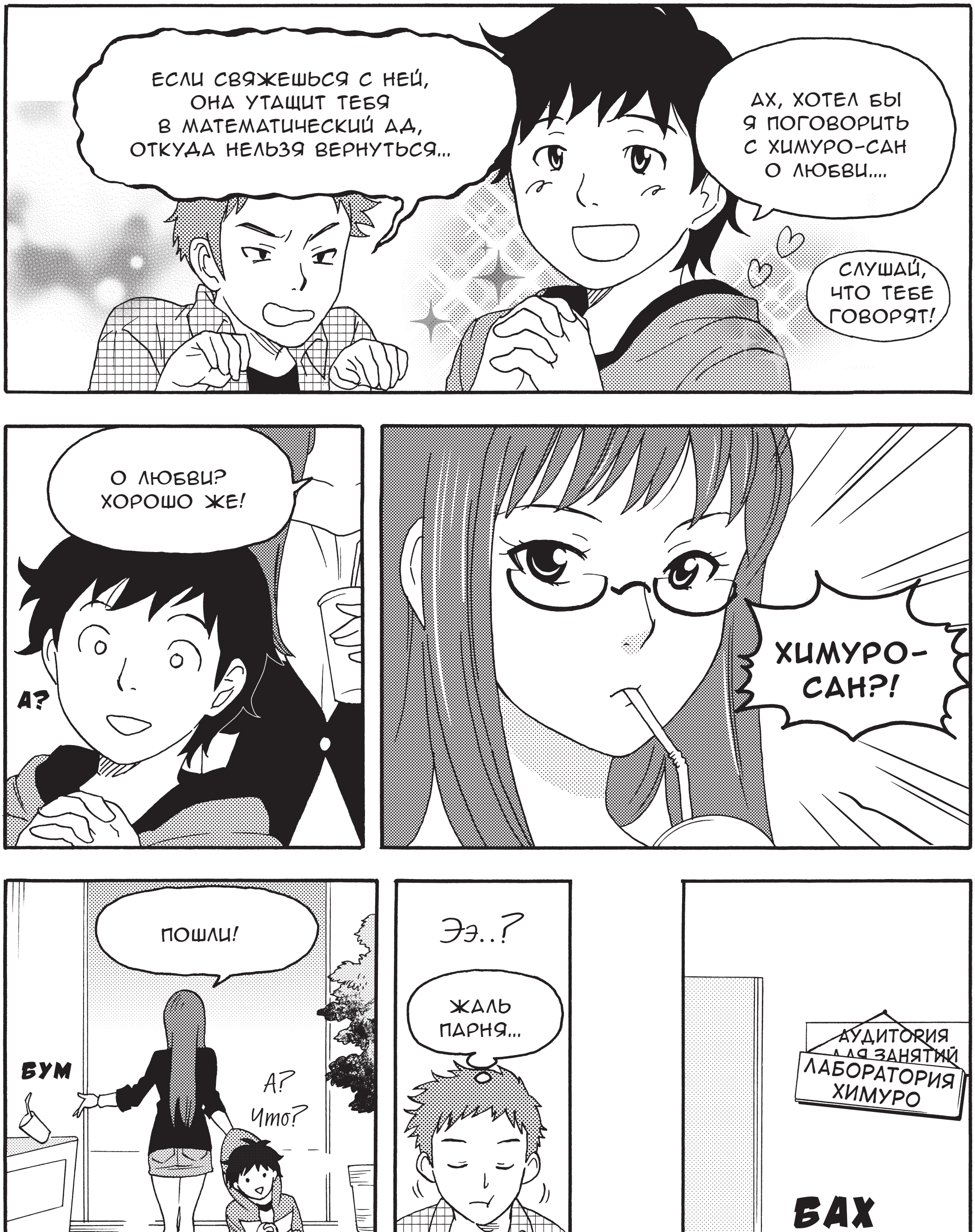
НАЧАЛО ИСТОРИИ

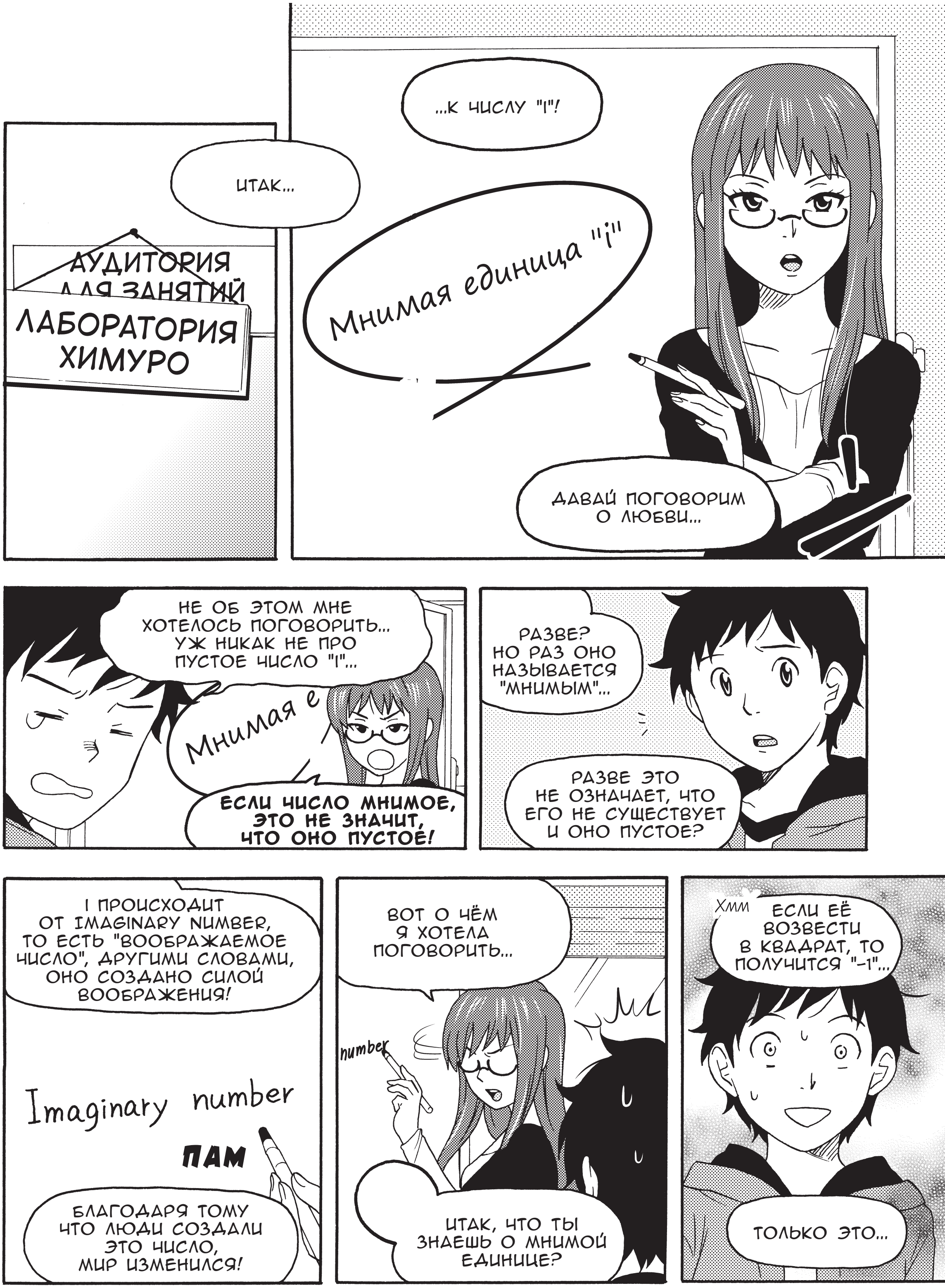

ПРОЩАЙ, КОШМАРНАЯ ПОРА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ!
НАКОНЕЦ-ТО... СТУДЕНЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ, О КОТОРОЙ Я ТАК МЕЧТАЛ! ТЕПЕРЬ-ТО Я ДОБЬЮСЬ УСПЕХА И В ЛЮБВИ, И В УЧЁБЕ!
ПАБАМ!
ОЙ!
ОЙ!
ЭТО Ж НАУЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ, ПОЭТОМУ ТУТ ОДНИ ПАРНИ...
ДА ЕЩЁ ВСЁ ГОРАЗДО СЛОЖНЕЕ, ЧЕМ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ!
Я ОБМАНУТ!
БАХ

* Сенпай – обращение к более старшему по возрасту, рангу или более опытному коллеге/соученику. В данном случае означает, что Масаси учится на более старшем курсе.

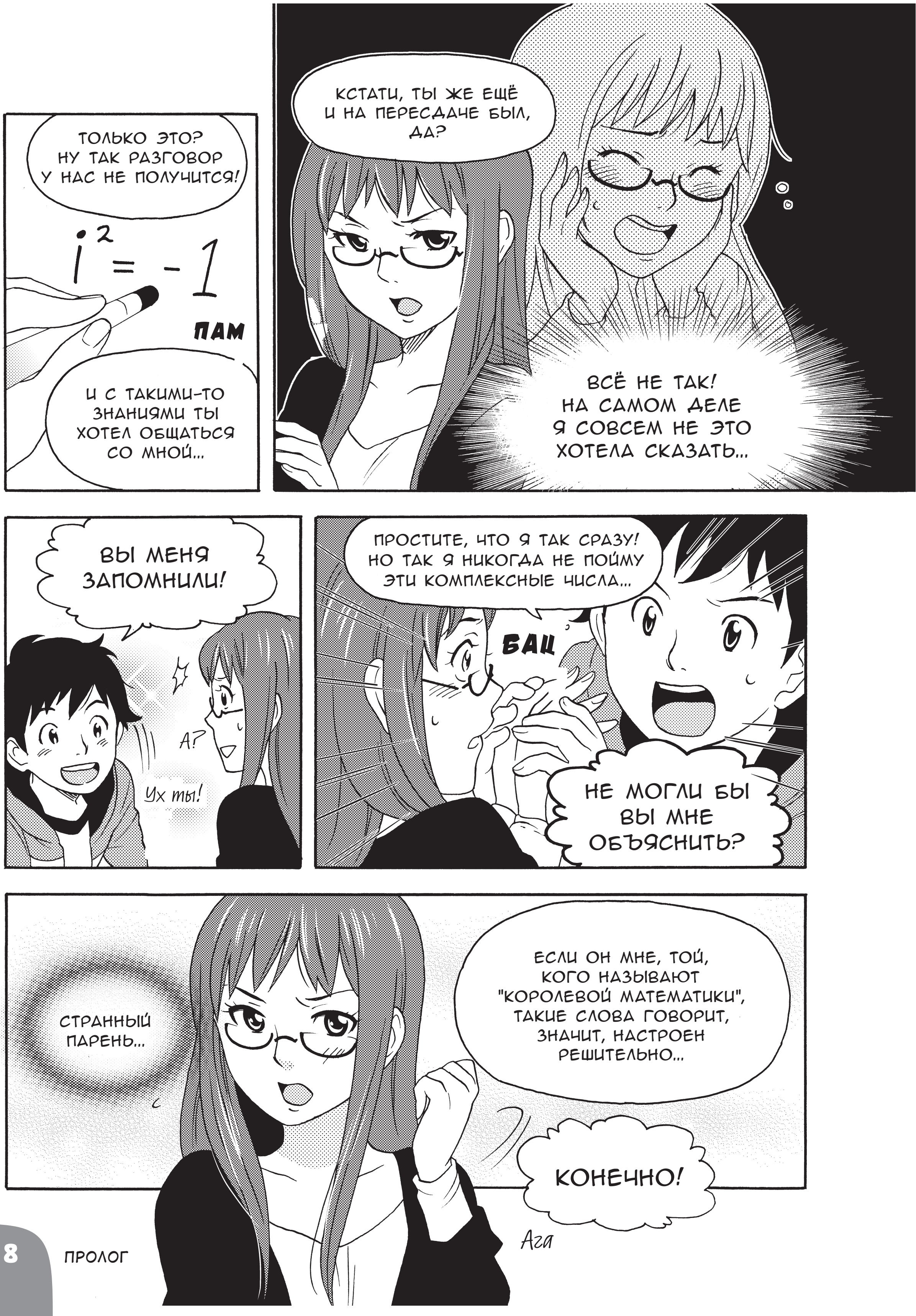

ПОВТОРНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ
ШУР
ШУР
СЕНПАЙ ЖЕ САМ НА ПЕРЕСДАЧЕ!!
И чего у него такое самодовольное лицо?!
ЕСЛИ ЗАВАЛИМ, ТО ЕЩЁ ОДИН ГОД ВМЕСТЕ ПРОУЧИМСЯ!
Ха-ха-ха
ПАМ
ДА НА ЭТОГО СЕНПАЯ НЕЛЬЗЯ ПОЛАГАТЬСЯ...
СТУК СЕРДЦА
МОЯ ФАМИЛИЯ ХИМУРО. Я АСПИРАНТКА.
У ПРЕПОДАВАТЕЛЯ ПОЯВИЛИСЬ СРОЧНЫЕ ДЕЛА, ТАК ЧТО ЗА ЭКЗАМЕНОМ БУДУ НАБЛЮДАТЬ Я.

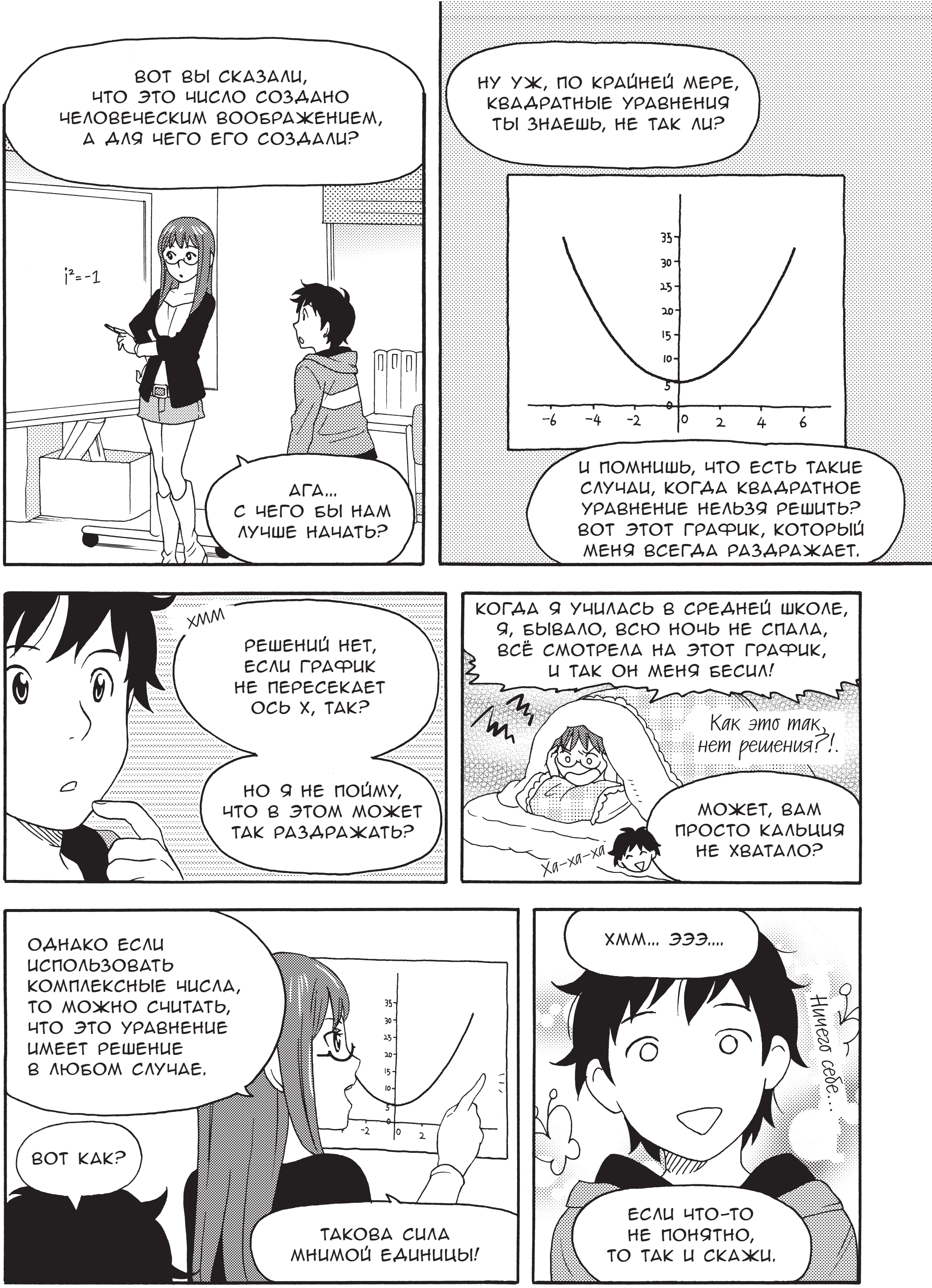

ШУР-ШУР
ШУР-ШУР
ХИМУРО-САН....
ТАКАЯ КРАСАВИЦА...
ЗЫРК
!
ОНА ЖЕ СМОТРИТ ПРЯМО НА МЕНЯ..?
так-так-так...
АГА, СЕЙЧАС КАК РАЗ ВИДНО ОТВЕТЫ...
.....
ХИМУРО-САН, ЧТО БЫЛА НА ЭКЗАМЕНЕ...
ТАКАЯ КРАСИВАЯ...
А?! ТЫ ПРО "КОРОЛЕВУ МАТЕМАТИКИ"?
НУ И РАЗОЗЛИЛИ ВЫ МЕНЯ, КОГДА ПЫТАЛИСЬ СПИСЫВАТЬ.
ЛУЧШЕ ЗАБУДЬ О НЕЙ.


ЕСЛИ СВЯЖЕШЬСЯ С НЕЙ, ОНА УТАЩИТ ТЕБЯ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АД, ОТКУДА НЕЛЬЗЯ ВЕРНУТЬСЯ...
АХ, ХОТЕЛ БЫ Я ПОГОВОРИТЬ С ХИМУРО-САН О ЛЮБВИ....
СЛУШАЙ, ЧТО ТЕБЕ ГОВОРЯТ!
О ЛЮБВИ? ХОРОШО ЖЕ!
А?
ХИМУРО-САН?!
ПОШЛИ!
БУМ
А? Что?
ВЖИХ
ВЖИХ
Ээ..?
ЖАЛЬ ПАРНЯ...
АУДИТОРИЯ ДЛЯ ЗАНЯТИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ХИМУРО
БАХ

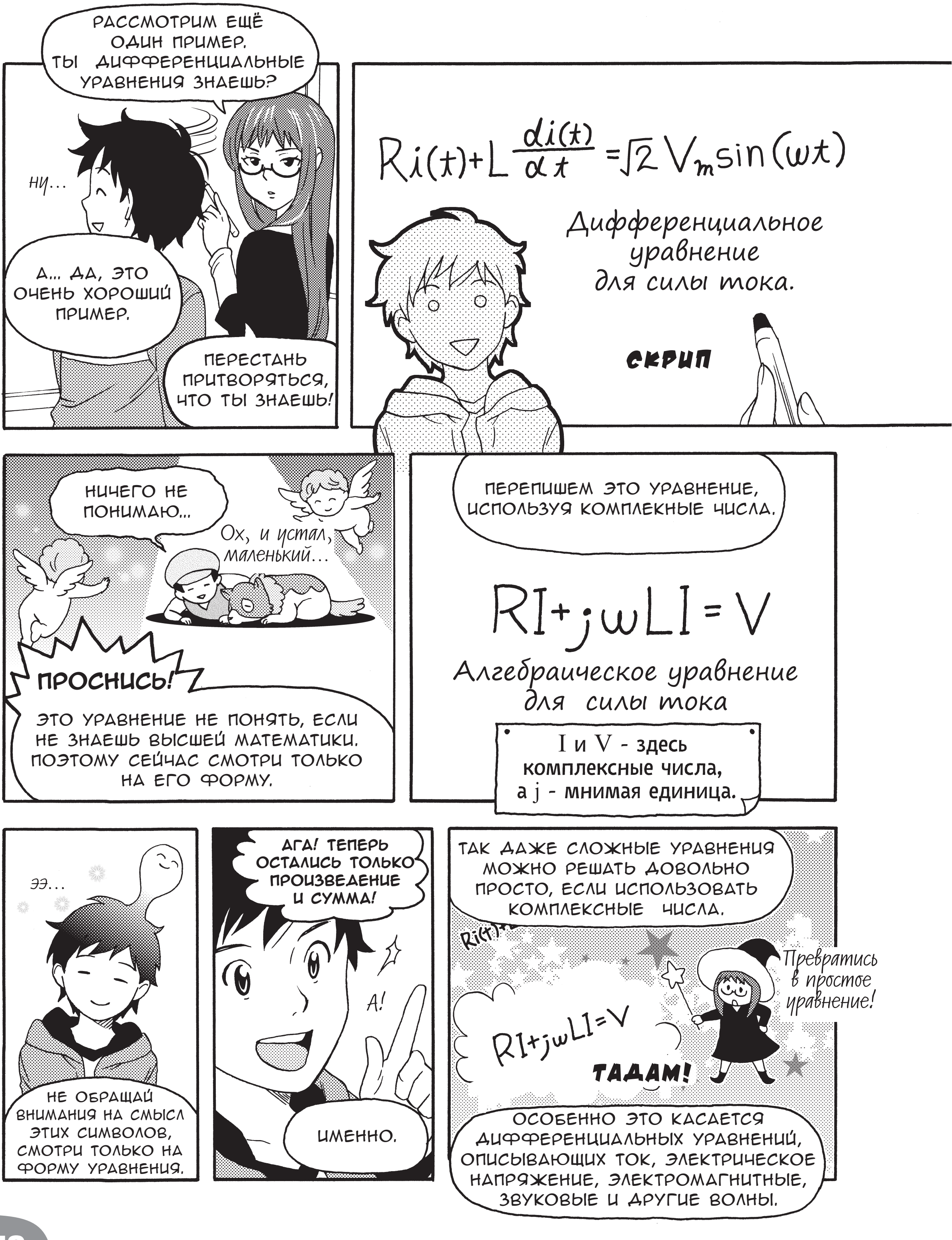


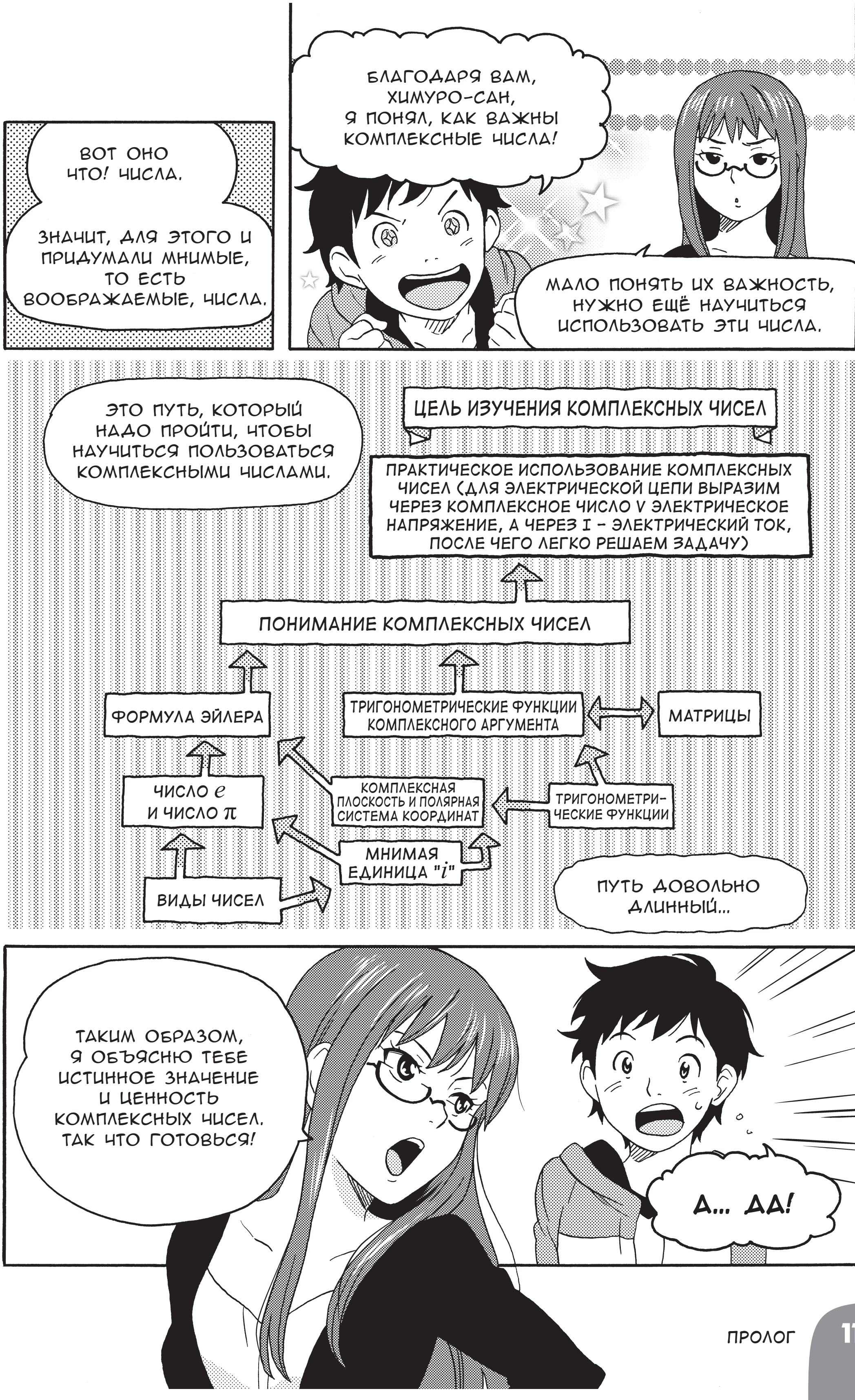
АУДИТОРИЯ ДЛЯ ЗАНЯТИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ХИМУРО
ИТАК...
Давай поговорим о любви...
...К ЧИСЛУ "I"!
Мнимая единица "i"
НЕ ОБ ЭТОМ МНЕ ХОТЕЛОСЬ ПОГОВОРИТЬ... УЖ НИКАК НЕ ПРО ПУСТОЕ ЧИСЛО "I"...
Мнимая е
ЕСЛИ ЧИСЛО МНИМОЕ, ЭТО НЕ ЗНАЧИТ, ЧТО ОНО ПУСТОЕ!
РАЗВЕ? НО РАЗ ОНО НАЗЫВАЕТСЯ "МНИМЫМ"...
РАЗВЕ ЭТО НЕ ОЗНАЧАЕТ, ЧТО ЕГО НЕ СУЩЕСТВУЕТ И ОНО ПУСТОЕ?
I ПРОИСХОДИТ ОТ IMAGINARY NUMBER, ТО ЕСТЬ "ВООБРАЖАЕМОЕ ЧИСЛО", ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ОНО СОЗДАНО СИЛОЙ ВООБРАЖЕНИЯ!
Imaginary number
ПАМ
БЛАГОДАРЯ ТОМУ ЧТО ЛЮДИ СОЗДАЛИ ЭТО ЧИСЛО, МИР ИЗМЕНИЛСЯ!
ВОТ О ЧЁМ Я ХОТЕЛА ПОГОВОРИТЬ...
number
ИТАК, ЧТО ТЫ ЗНАЕШЬ О МНИМОЙ ЕДИНИЦЕ?
Хмм
ЕСЛИ ЕЁ ВОЗВЕСТИ В КВАДРАТ, ТО ПОЛУЧИТСЯ "−1"...
ТОЛЬКО ЭТО...

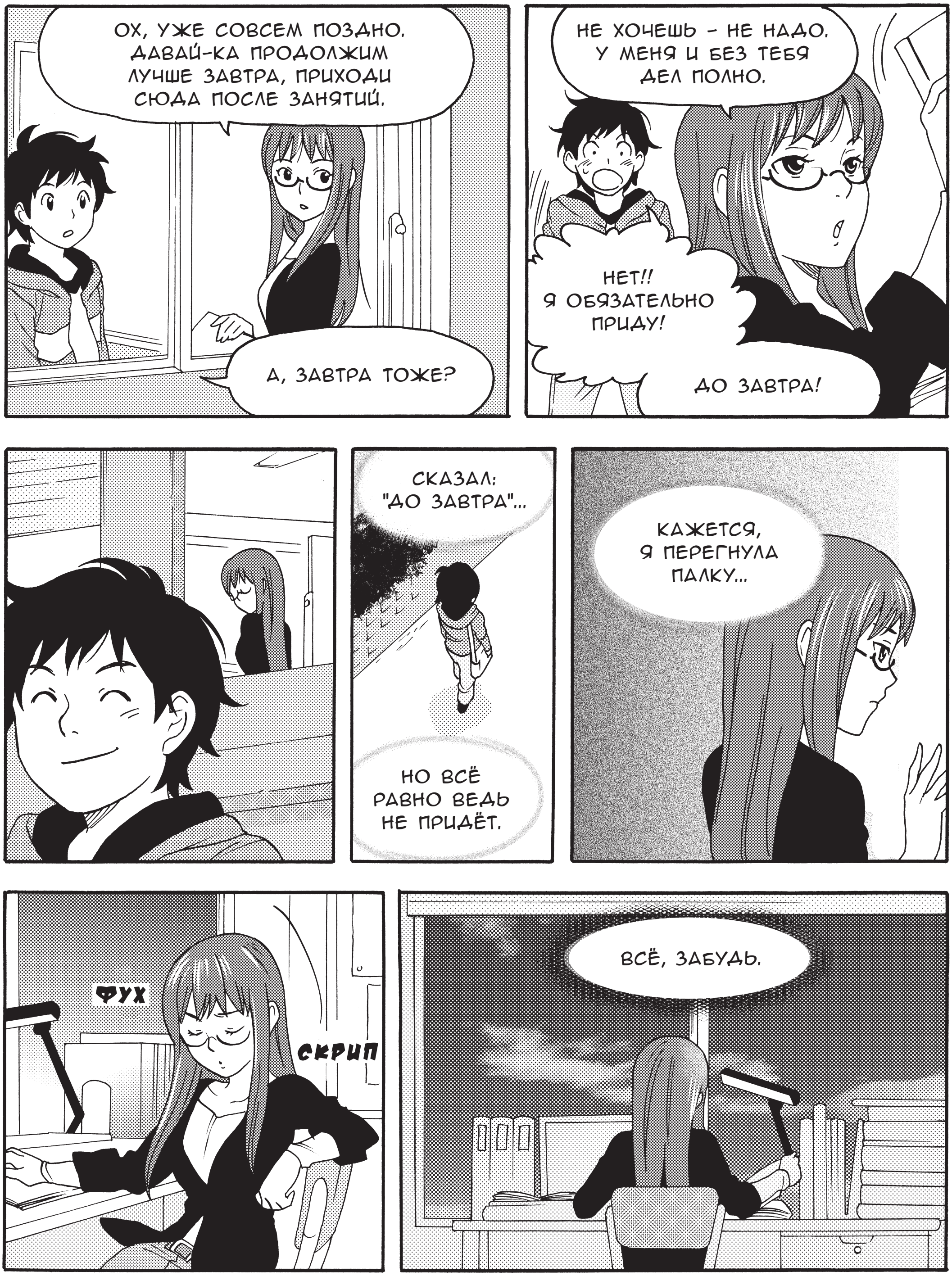

ТОЛЬКО ЭТО? НУ ТАК РАЗГОВОР У НАС НЕ ПОЛУЧИТСЯ!
$i^2 = -1$
ПАМ
И С ТАКИМИ-ТО ЗНАНИЯМИ ТЫ ХОТЕЛ ОБЩАТЬСЯ СО МНОЙ...
КСТАТИ, ТЫ ЖЕ ЕЩЁ И НА ПЕРЕСДАЧЕ БЫЛ, ДА?
ВСЁ НЕ ТАК! НА САМОМ ДЕЛЕ Я СОВСЕМ НЕ ЭТО ХОТЕЛА СКАЗАТЬ...
ВЫ МЕНЯ ЗАПОМНИЛИ!
А?
Ух ты!
ПРОСТИТЕ, ЧТО Я ТАК СРАЗУ! НО ТАК Я НИКОГДА НЕ ПОЙМУ ЭТИ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА...
БАЦ
НЕ МОГЛИ БЫ ВЫ МНЕ ОБЪЯСНИТЬ?
СТРАННЫЙ ПАРЕНЬ...
ЕСЛИ ОН МНЕ, ТОЙ, КОГО НАЗЫВАЮТ "КОРОЛЕВОЙ МАТЕМАТИКИ", ТАКИЕ СЛОВА ГОВОРИТ, ЗНАЧИТ, НАСТРОЕН РЕШИТЕЛЬНО...
КОНЕЧНО!
Ага



ВОТ ВЫ СКАЗАЛИ, ЧТО ЭТО ЧИСЛО СОЗДАНО ЧЕЛОВЕЧЕСКИМ ВООБРАЖЕНИЕМ, А ДЛЯ ЧЕГО ЕГО СОЗДАЛИ?
$i^2 = -1$
АГА... С ЧЕГО БЫ НАМ ЛУЧШЕ НАЧАТЬ?
НУ УЖ, ПО КРАЙНЕЙ МЕРЕ, КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЫ ЗНАЕШЬ, НЕ ТАК ЛИ?
35 30 25 20 15 10 5 0
−6 −4 −2 0 2 4 6
И ПОМНИШЬ, ЧТО ЕСТЬ ТАКИЕ СЛУЧАИ, КОГДА КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕЛЬЗЯ РЕШИТЬ? ВОТ ЭТОТ ГРАФИК, КОТОРЫЙ МЕНЯ ВСЕГДА РАЗДРАЖАЕТ.
ХММ
РЕШЕНИЙ НЕТ, ЕСЛИ ГРАФИК НЕ ПЕРЕСЕКАЕТ ОСЬ X, ТАК?
НО Я НЕ ПОЙМУ, ЧТО В ЭТОМ МОЖЕТ ТАК РАЗДРАЖАТЬ?
КОГДА Я УЧИЛАСЬ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ, Я, БЫВАЛО, ВСЮ НОЧЬ НЕ СПАЛА, ВСЁ СМОТРЕЛА НА ЭТОТ ГРАФИК, И ТАК ОН МЕНЯ БЕСИЛ!
Как это так, нет решения?!.
МОЖЕТ, ВАМ ПРОСТО КАЛЬЦИЯ НЕ ХВАТАЛО?
Ха-ха-ха
ОДНАКО ЕСЛИ ИСПОЛЬЗОВАТЬ КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ТО МОЖНО СЧИТАТЬ, ЧТО ЭТО УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЕ В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ.
ВОТ КАК?
ТАКОВА СИЛА МНИМОЙ ЕДИНИЦЫ!
ХММ... ЭЭЭ....
Ничего себе...
ЕСЛИ ЧТО-ТО НЕ ПОНЯТНО, ТО ТАК И СКАЖИ.


Рассмотрим ещё один пример. Ты дифференциальные уравнения знаешь?
Ну…
А… да, это очень хороший пример.
Перестань притворяться, что ты знаешь!
$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}=\sqrt{2}V_m\sin(\omega t)$$
Дифференциальное уравнение для силы тока.
СКРИП
Ничего не понимаю…
Ох, и устал, маленький…
ПРОСНИСЬ!
Это уравнение не понять, если не знаешь высшей математики. Поэтому сейчас смотри только на его форму.
Перепишем это уравнение, используя комплекные числа.
$$RI+j\omega LI=V$$
Алгебраическое уравнение для силы тока
I и V - здесь комплексные числа, а j - мнимая единица.
Ээ…
Не обращай внимания на смысл этих символов, смотри только на форму уравнения.
Ага! Теперь остались только произведение и сумма!
А!
Именно.
Так даже сложные уравнения можно решать довольно просто, если использовать комплексные числа.
Превратись в простое уравнение!
$RI+j\omega LI=V$
ТАДАМ!
Особенно это касается дифференциальных уравнений, описывающих ток, электрическое напряжение, электромагнитные, звуковые и другие волны.

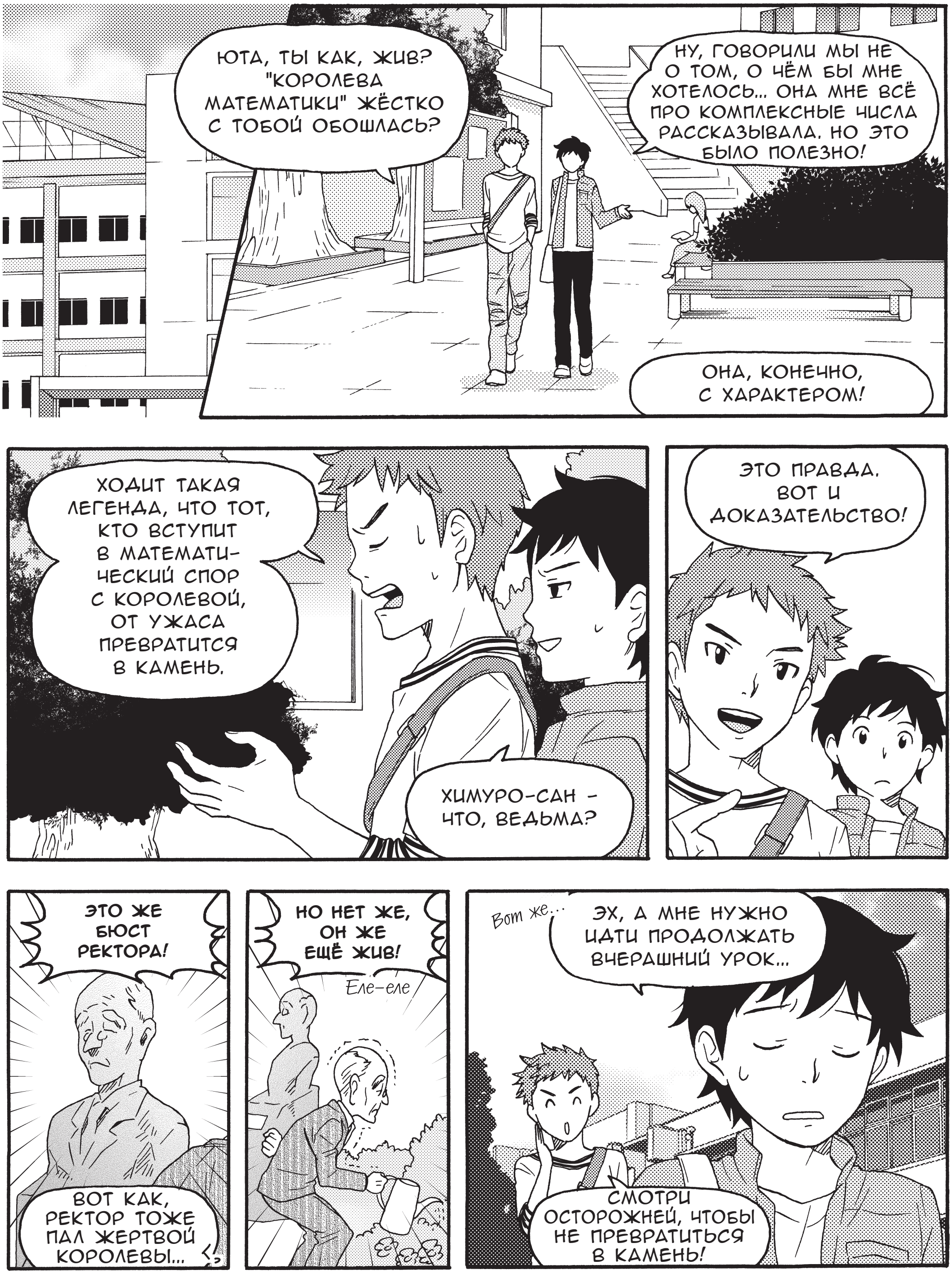

Вот оно что! Числа.
Значит, для этого и придумали мнимые, то есть воображаемые, числа.
Благодаря вам, Химуро-сан, я понял, как важны комплексные числа!
Мало понять их важность, нужно ещё научиться использовать эти числа.
Это путь, который надо пройти, чтобы научиться пользоваться комплексными числами.
Цель изучения комплексных чисел
Практическое использование комплексных чисел (для электрической цепи выразим через комплексное число V электрическое напряжение, а через I – электрический ток, после чего легко решаем задачу)
Понимание комплексных чисел
Формула Эйлера
Тригонометрические функции комплексного аргумента
Матрицы
Число e и число π
Комплексная плоскость и полярная система координат
Тригонометрические функции
Мнимая единица "i"
Виды чисел
Путь довольно длинный...
Таким образом, я объясню тебе истинное значение и ценность комплексных чисел. Так что готовься!
А... да!


ОХ, УЖЕ СОВСЕМ ПОЗДНО. ДАВАЙ-КА ПРОДОЛЖИМ ЛУЧШЕ ЗАВТРА, ПРИХОДИ СЮДА ПОСЛЕ ЗАНЯТИЙ.
А, ЗАВТРА ТОЖЕ?
НЕ ХОЧЕШЬ – НЕ НАДО. У МЕНЯ И БЕЗ ТЕБЯ ДЕЛ ПОЛНО.
НЕТ!! Я ОБЯЗАТЕЛЬНО ПРИДУ!
ДО ЗАВТРА!
СКАЗАЛ: "ДО ЗАВТРА"...
НО ВСЁ РАВНО ВЕДЬ НЕ ПРИДЁТ.
КАЖЕТСЯ, Я ПЕРЕГНУЛА ПАЛКУ...
ФУХ
СКРИП
ВСЁ, ЗАБУДЬ.

Глава

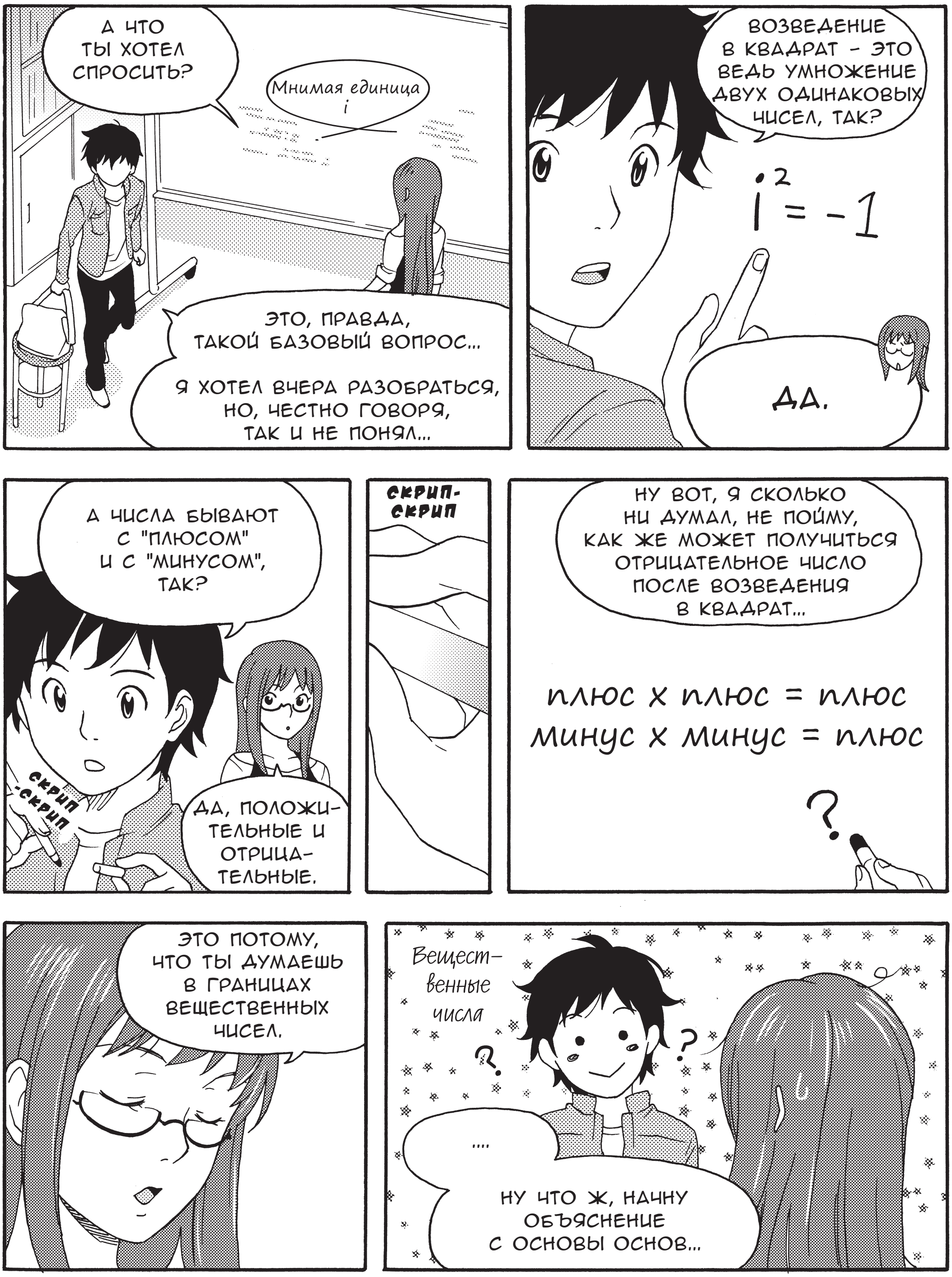
1

ВИДЫ ЧИСЕЛ

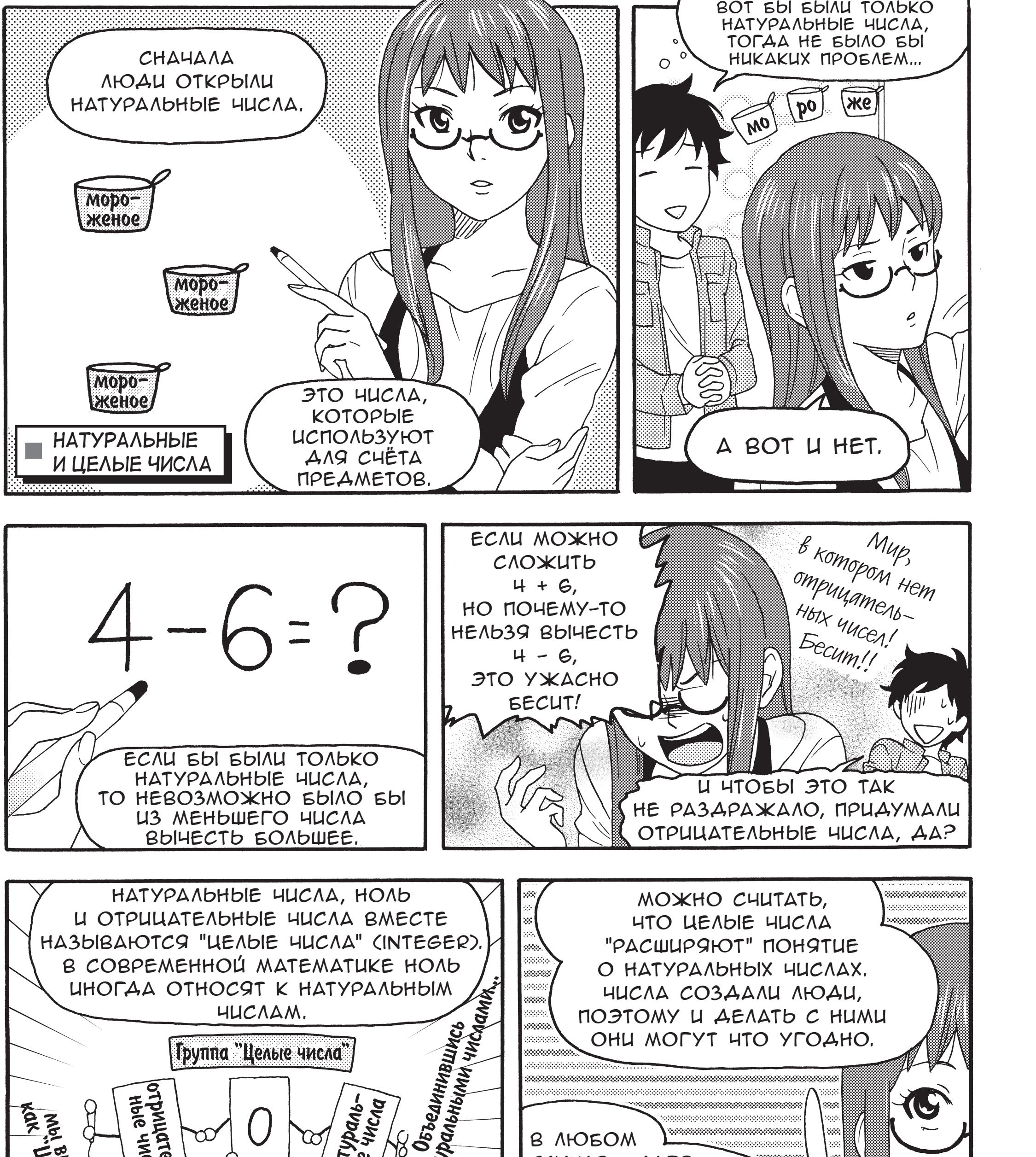


ЮТА, ТЫ КАК, ЖИВ? "КОРОЛЕВА МАТЕМАТИКИ" ЖЁСТКО С ТОБОЙ ОБОШЛАСЬ?
НУ, ГОВОРИЛИ МЫ НЕ О ТОМ, О ЧЁМ БЫ МНЕ ХОТЕЛОСЬ... ОНА МНЕ ВСЁ ПРО КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА РАССКАЗЫВАЛА. НО ЭТО БЫЛО ПОЛЕЗНО!
ОНА, КОНЕЧНО, С ХАРАКТЕРОМ!
ХОДИТ ТАКАЯ ЛЕГЕНДА, ЧТО ТОТ, КТО ВСТУПИТ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПОР С КОРОЛЕВОЙ, ОТ УЖАСА ПРЕВРАТИТСЯ В КАМЕНЬ.
ХИМУРО-САН - ЧТО, ВЕДЬМА?
ЭТО ПРАВДА. ВОТ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО!
ЭТО ЖЕ БЮСТ РЕКТОРА!
ВОТ КАК, РЕКТОР ТОЖЕ ПАЛ ЖЕРТВОЙ КОРОЛЕВЫ...
НО НЕТ ЖЕ, ОН ЖЕ ЕЩЁ ЖИВ!
Еле-еле
Вот же...
ЭХ, А МНЕ НУЖНО ИДТИ ПРОДОЛЖАТЬ ВЧЕРАШНИЙ УРОК...
СМОТРИ ОСТОРОЖНЕЙ, ЧТОБЫ НЕ ПРЕВРАТИТЬСЯ В КАМЕНЬ!

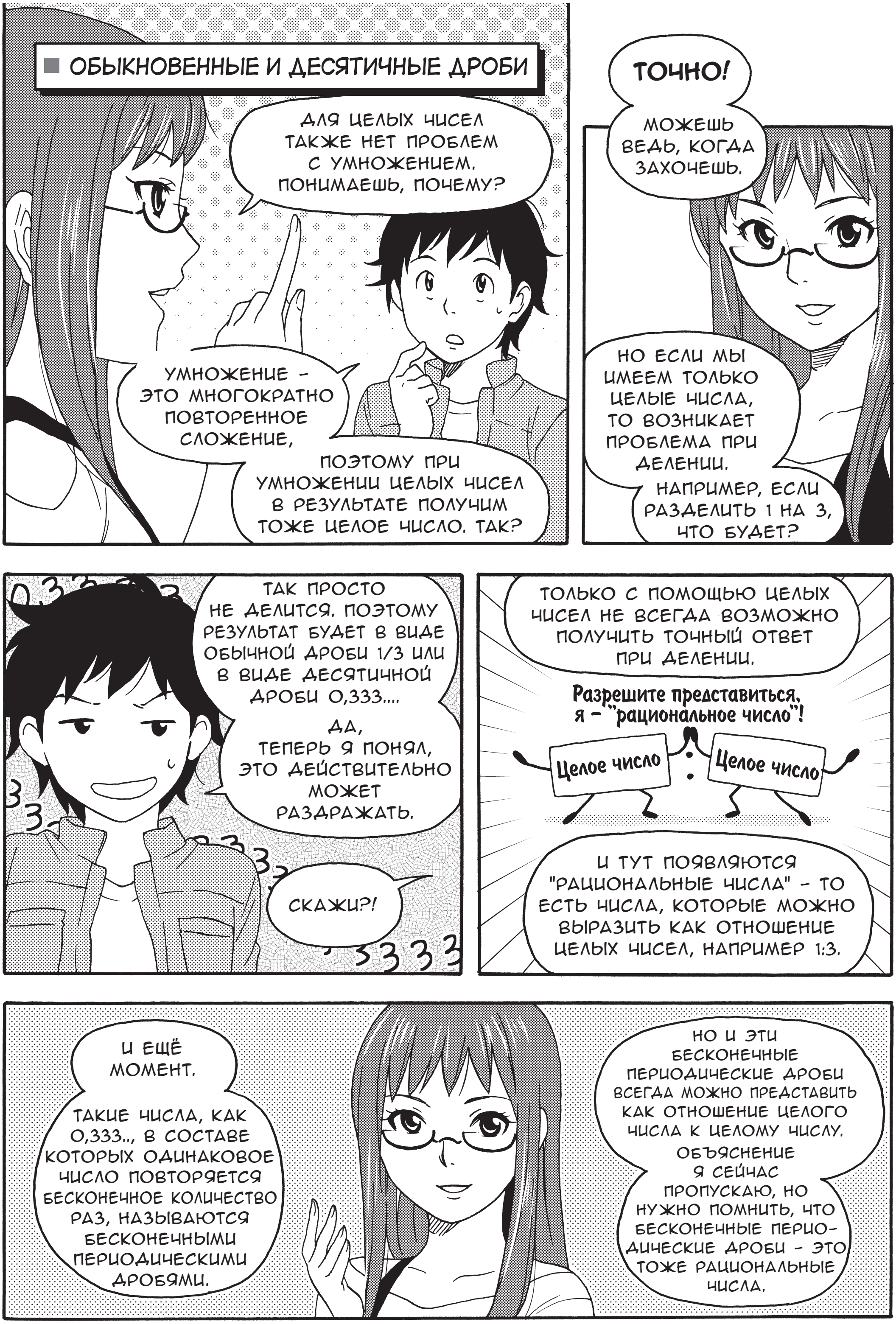

АУДИТОРИЯ ДЛЯ ЗАНЯТИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ХИМУРО
НЯМ
НЯМ
ВАНИЛЬНОЕ
МОРОЖЕНОЕ
......
БАЦ
ДОБРЫЙ ДЕНЬ!
ВЫ ЛЮБИТЕ МОРОЖЕНОЕ?
!!
ЧТО ТЫ ТУТ ДЕЛАЕШЬ?!
БАЦ
БУМ
НО ВЫ ЖЕ САМИ МНЕ СКАЗАЛИ ПРИЙТИ!
ИЗВИНИТЕ... ЕСЛИ ПОМЕШАЛ, Я УЙДУ...
НО Я ХОТЕЛ БЫ КОЕ-ЧТО СПРОСИТЬ...
НУ... РАЗ УЖ СПЕЦИАЛЬНО ПРИШЁЛ, НЕУДОБНО ТЕБЯ ВЫГОНЯТЬ...
ДАВАЙ ПРОДОЛЖИМ ТО, ЧТО МЫ ВЧЕРА НАЧАЛИ.
ТЫ ЖЕ НА САМОМ ДЕЛЕ РАДА, ПОЧЕМУ ОПЯТЬ В ТАКОМ ТОНЕ ГОВОРИШЬ...


А ЧТО ТЫ ХОТЕЛ СПРОСИТЬ?
Мнимая единица i
ЭТО, ПРАВДА, ТАКОЙ БАЗОВЫЙ ВОПРОС...
Я ХОТЕЛ ВЧЕРА РАЗОБРАТЬСЯ, НО, ЧЕСТНО ГОВОРЯ, ТАК И НЕ ПОНЯЛ...
ВОЗВЕДЕНИЕ В КВАДРАТ - ЭТО ВЕДЬ УМНОЖЕНИЕ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ЧИСЕЛ, ТАК?
$i^2 = -1$
ДА.
А ЧИСЛА БЫВАЮТ С "ПЛЮСОМ" И С "МИНУСОМ", ТАК?
СКРИП-СКРИП
ДА, ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ.
СКРИП-СКРИП
НУ ВОТ, Я СКОЛЬКО НИ ДУМАЛ, НЕ ПОЙМУ, КАК ЖЕ МОЖЕТ ПОЛУЧИТЬСЯ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО ПОСЛЕ ВОЗВЕДЕНИЯ В КВАДРАТ...
плюс x плюс = плюс
минус x минус = плюс
?
ЭТО ПОТОМУ, ЧТО ТЫ ДУМАЕШЬ В ГРАНИЦАХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ.
Вещественные числа
?
?
....
НУ ЧТО Ж, НАЧНУ ОБЪЯСНЕНИЕ С ОСНОВЫ ОСНОВ...

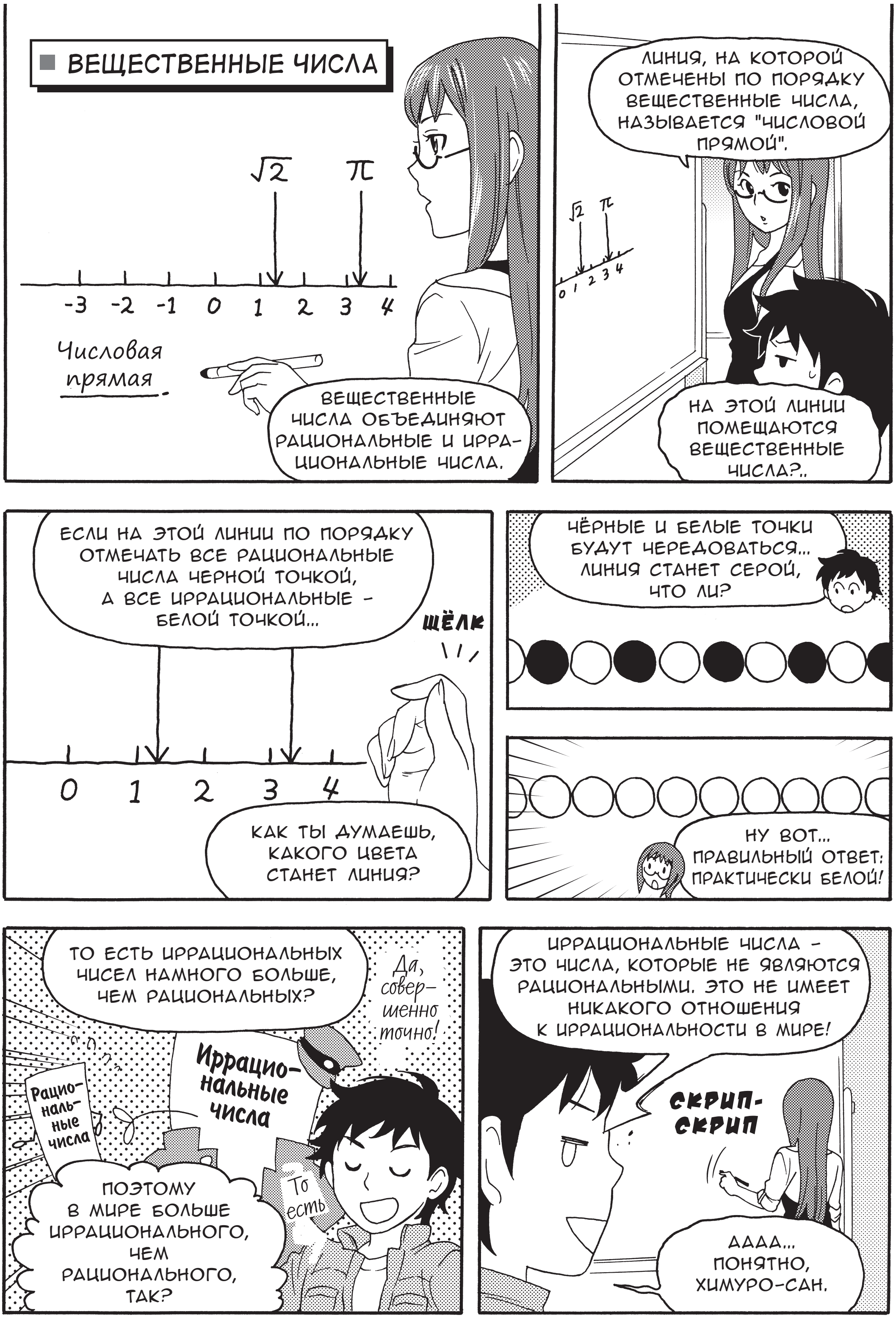
1. ВИДЫ ЧИСЕЛ

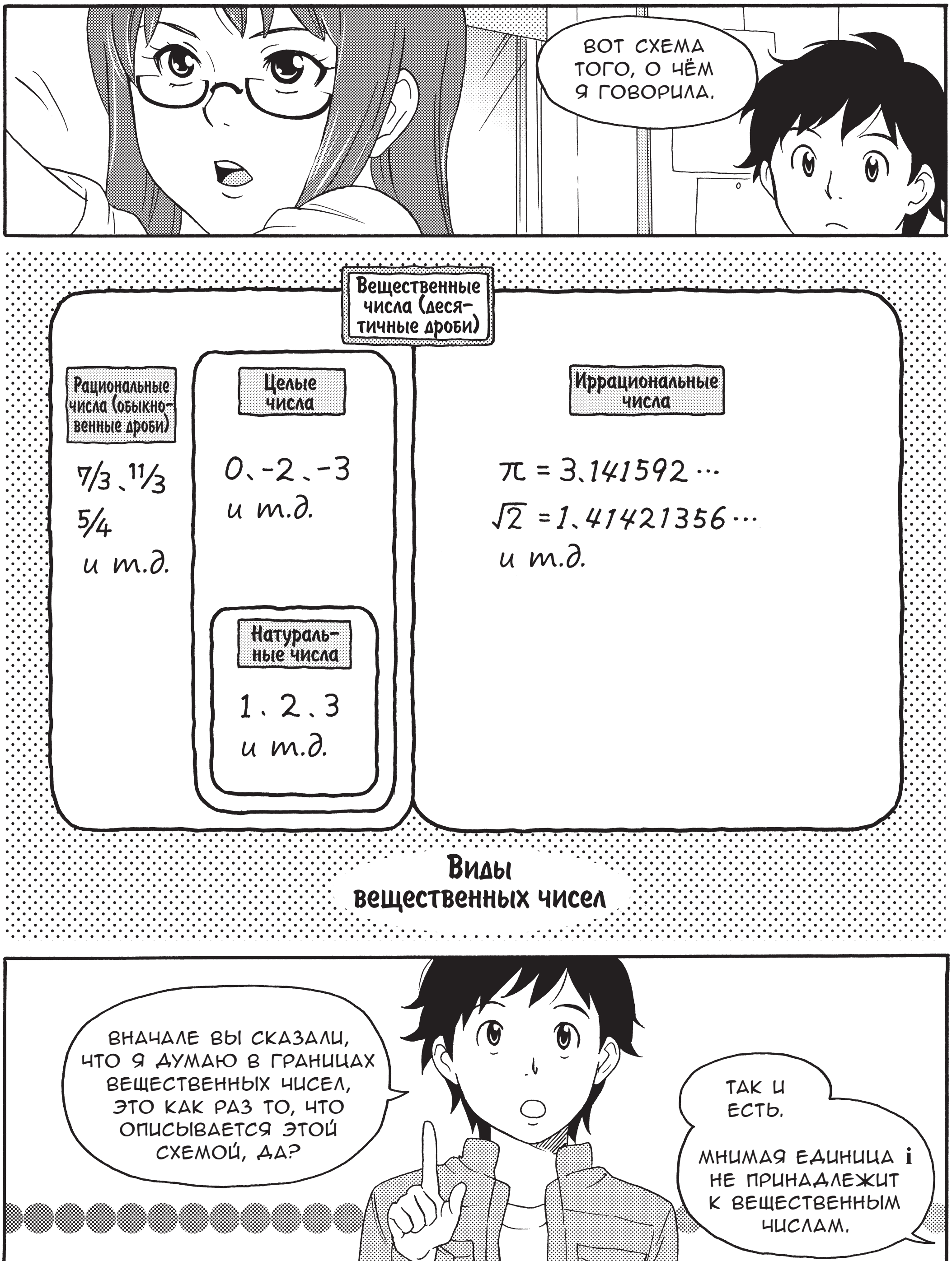


СНАЧАЛА ЛЮДИ ОТКРЫЛИ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.
мороженое
мороженое
мороженое
НАТУРАЛЬНЫЕ И ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА
ЭТО ЧИСЛА, КОТОРЫЕ ИСПОЛЬЗУЮТ ДЛЯ СЧЁТА ПРЕДМЕТОВ.
ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ЭТО 1, 2, 3... ДА? ВОТ БЫ БЫЛИ ТОЛЬКО НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ТОГДА НЕ БЫЛО БЫ НИКАКИХ ПРОБЛЕМ...
мо ро же
А ВОТ И НЕТ.
4 − 6 = ?
ЕСЛИ БЫ БЫЛИ ТОЛЬКО НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ТО НЕВОЗМОЖНО БЫЛО БЫ ИЗ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ВЫЧЕСТЬ БОЛЬШЕЕ.
ЕСЛИ МОЖНО СЛОЖИТЬ 4 + 6, НО ПОЧЕМУ-ТО НЕЛЬЗЯ ВЫЧЕСТЬ 4 − 6, ЭТО УЖАСНО БЕСИТ!
Мир, в котором нет отрицательных чисел! Бесит!!
И ЧТОБЫ ЭТО ТАК НЕ РАЗДРАЖАЛО, ПРИДУМАЛИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ДА?
НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, НОЛЬ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА ВМЕСТЕ НАЗЫВАЮТСЯ "ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА" (INTEGER). В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ НОЛЬ ИНОГДА ОТНОСЯТ К НАТУРАЛЬНЫМ ЧИСЛАМ.
Группа "Целые числа"
Мы выступаем как "Целые числа".
отрицательные числа
0
натуральные числа
Объединившись с натуральными числами...
ВОТ ОНО ЧТО.
МОЖНО СЧИТАТЬ, ЧТО ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА "РАСШИРЯЮТ" ПОНЯТИЕ О НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ. ЧИСЛА СОЗДАЛИ ЛЮДИ, ПОЭТОМУ И ДЕЛАТЬ С НИМИ ОНИ МОГУТ ЧТО УГОДНО.
В ЛЮБОМ СЛУЧАЕ, БЛАГОДАРЯ ЦЕЛЫМ ЧИСЛАМ МОЖНО БЕЗ ПРОБЛЕМ ПРОИЗВОДИТЬ СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ.


ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ
ДЛЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ТАКЖЕ НЕТ ПРОБЛЕМ С УМНОЖЕНИЕМ. ПОНИМАЕШЬ, ПОЧЕМУ?
УМНОЖЕНИЕ – ЭТО МНОГОКРАТНО ПОВТОРЕННОЕ СЛОЖЕНИЕ,
ПОЭТОМУ ПРИ УМНОЖЕНИИ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ В РЕЗУЛЬТАТЕ ПОЛУЧИМ ТОЖЕ ЦЕЛОЕ ЧИСЛО. ТАК?
ТОЧНО!
МОЖЕШЬ ВЕДЬ, КОГДА ЗАХОЧЕШЬ.
НО ЕСЛИ МЫ ИМЕЕМ ТОЛЬКО ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА, ТО ВОЗНИКАЕТ ПРОБЛЕМА ПРИ ДЕЛЕНИИ.
НАПРИМЕР, ЕСЛИ РАЗДЕЛИТЬ 1 НА 3, ЧТО БУДЕТ?
ТАК ПРОСТО НЕ ДЕЛИТСЯ. ПОЭТОМУ РЕЗУЛЬТАТ БУДЕТ В ВИДЕ ОБЫЧНОЙ ДРОБИ 1/3 ИЛИ В ВИДЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ 0,333....
ДА, ТЕПЕРЬ Я ПОНЯЛ, ЭТО ДЕЙСТВИТЕЛЬНО МОЖЕТ РАЗДРАЖАТЬ.
СКАЖИ?!
ТОЛЬКО С ПОМОЩЬЮ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ НЕ ВСЕГДА ВОЗМОЖНО ПОЛУЧИТЬ ТОЧНЫЙ ОТВЕТ ПРИ ДЕЛЕНИИ.
Разрешите представиться, я – "рациональное число"!
Целое число
Целое число
И ТУТ ПОЯВЛЯЮТСЯ "РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА" – ТО ЕСТЬ ЧИСЛА, КОТОРЫЕ МОЖНО ВЫРАЗИТЬ КАК ОТНОШЕНИЕ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ, НАПРИМЕР 1:3.
И ЕЩЁ МОМЕНТ.
ТАКИЕ ЧИСЛА, КАК 0,333.., В СОСТАВЕ КОТОРЫХ ОДИНАКОВОЕ ЧИСЛО ПОВТОРЯЕТСЯ БЕСКОНЕЧНОЕ КОЛИЧЕСТВО РАЗ, НАЗЫВАЮТСЯ БЕСКОНЕЧНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ.
НО И ЭТИ БЕСКОНЕЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРОБИ ВСЕГДА МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ КАК ОТНОШЕНИЕ ЦЕЛОГО ЧИСЛА К ЦЕЛОМУ ЧИСЛУ.
ОБЪЯСНЕНИЕ Я СЕЙЧАС ПРОПУСКАЮ, НО НУЖНО ПОМНИТЬ, ЧТО БЕСКОНЕЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРОБИ – ЭТО ТОЖЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

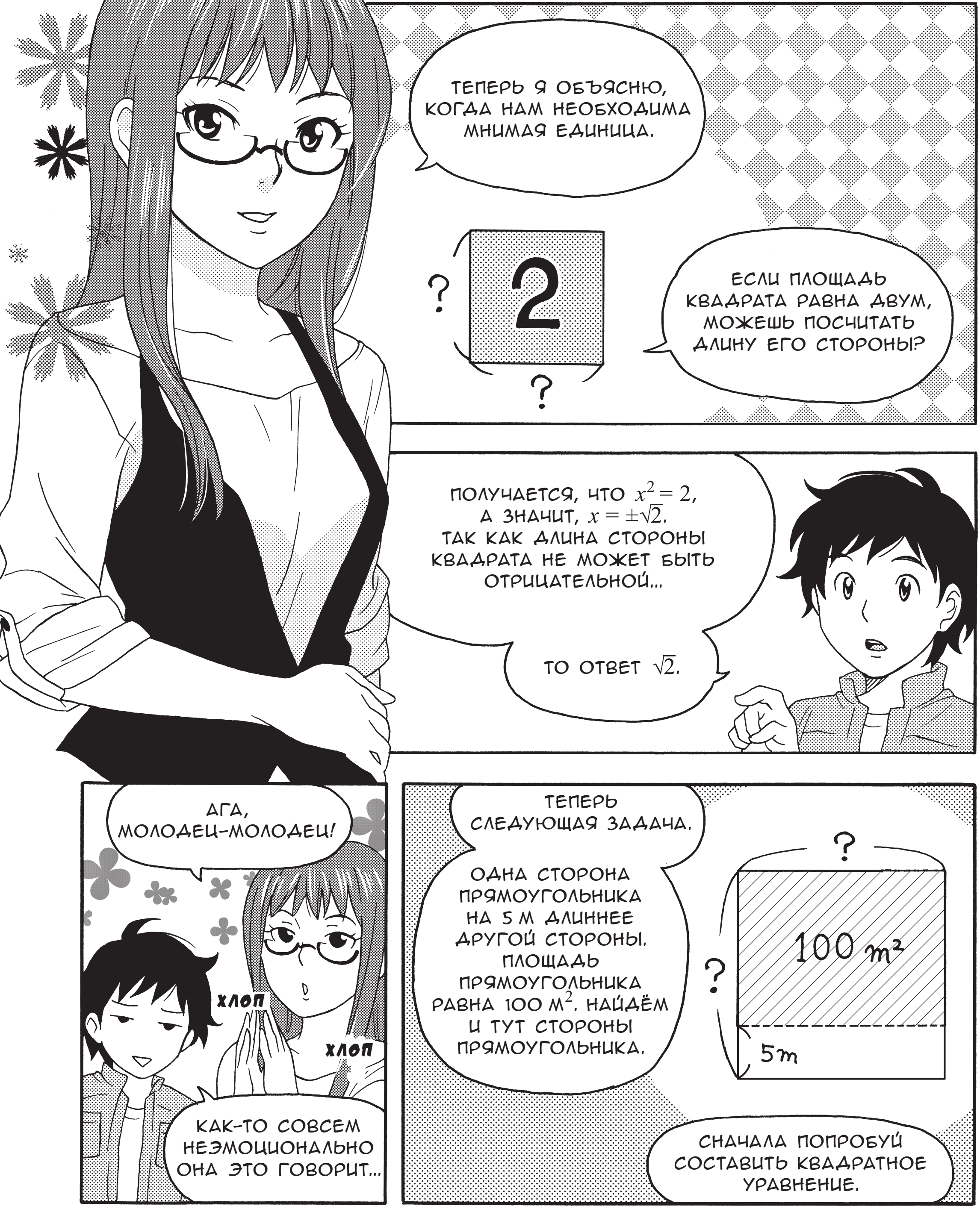

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА
А ЧТО, ЕСТЬ ЧИСЛА, КОТОРЫЕ НЕЛЬЗЯ ПРЕДСТАВИТЬ В ВИДЕ СООТНОШЕНИЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ?
ХОРОШИЙ ВОПРОС! ИТАК...
1m
ТЫ ЗНАЕШЬ, КАК ПОСЧИТАТЬ ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ КРУГЛОГО ПРУДА С РАДИУСОМ 1 МЕТР?
ГХМ... ПЛОЩАДЬ ОКРУЖНОСТИ РАВНА πR², СЛЕДОВАТЕЛЬНО, ПОЛУЧИТСЯ ПРИМЕРНО 3,14 М².
Так?
ВСЕГО ДВЕ ЦИФРЫ ПОСЛЕ ЗАПЯТОЙ? Я ВОТ ПОМНЮ ПРИМЕРНО 20 ЦИФР.
В КАЖДОМ ВЫПУСКЕ НАЙДЁТСЯ ОДИН ТАКОЙ ЧЕЛОВЕК...
3.14159265358979323846264338327...
ЧИСЛО π В ЕГО ДЕСЯТИЧНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ НИКОГДА НЕ ЗАКАНЧИВАЕТСЯ, И ОНО НЕ ЯВЛЯЕТСЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДРОБЬЮ.
ПОЭТОМУ ЕГО НЕЛЬЗЯ ПРЕДСТАВИТЬ В ВИДЕ СООТНОШЕНИЯ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ.
Мы "иррациональные числа"!
π
√2
КРОМЕ π, ТАКИМ ЯВЛЯЕТСЯ, НАПРИМЕР, √2 = 1,41421356...
ТАКИЕ ЧИСЛА НАЗЫВАЮТСЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ.

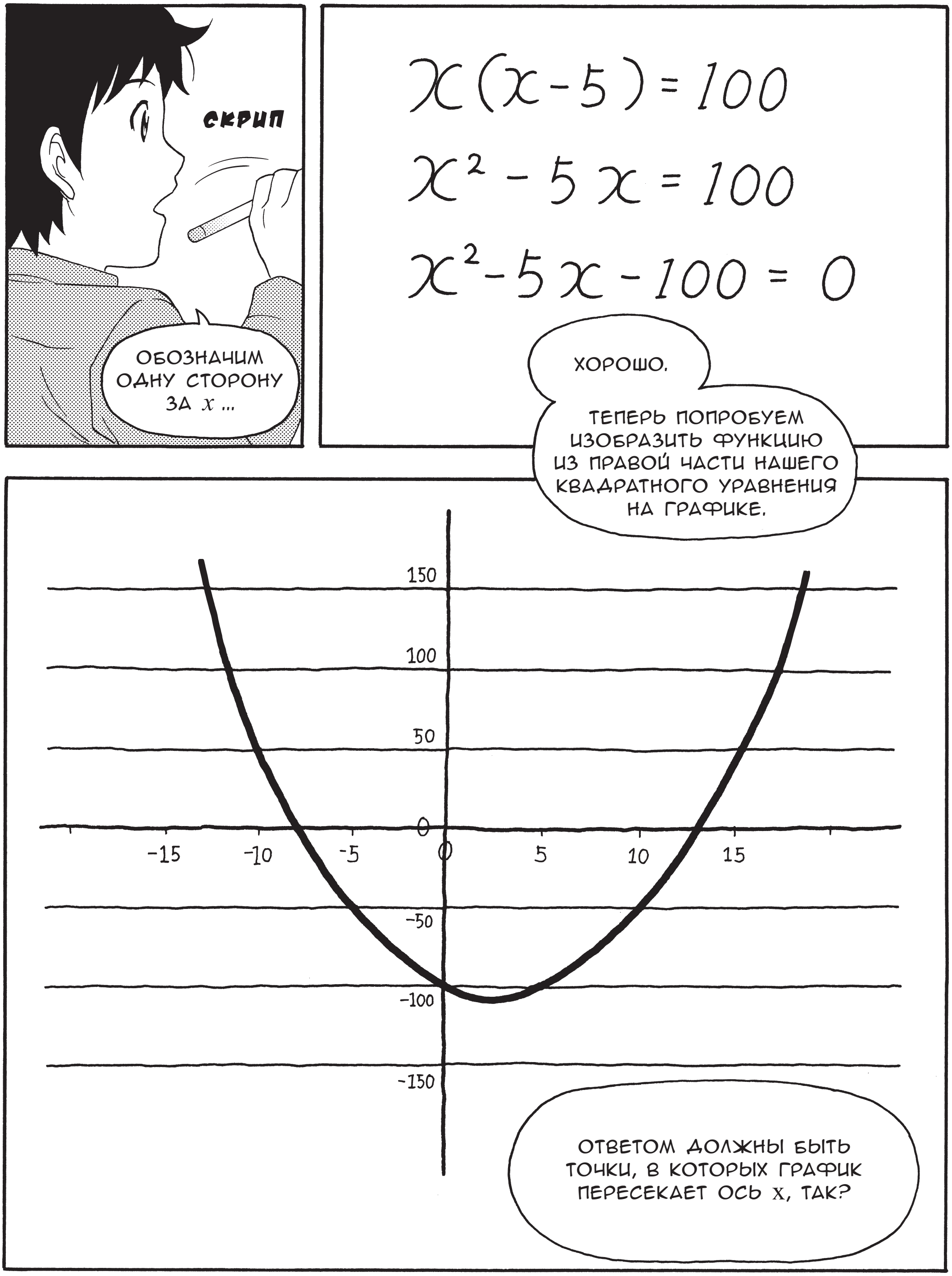

■ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА
$\sqrt{2}$ π
-3 -2 -1 0 1 2 3 4
Числовая прямая
ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА ОБЪЕДИНЯЮТ РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.
ЛИНИЯ, НА КОТОРОЙ ОТМЕЧЕНЫ ПО ПОРЯДКУ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА, НАЗЫВАЕТСЯ "ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ".
НА ЭТОЙ ЛИНИИ ПОМЕЩАЮТСЯ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА?..
ЕСЛИ НА ЭТОЙ ЛИНИИ ПО ПОРЯДКУ ОТМЕЧАТЬ ВСЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА ЧЕРНОЙ ТОЧКОЙ, А ВСЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ – БЕЛОЙ ТОЧКОЙ...
ЩЁЛК
0 1 2 3 4
КАК ТЫ ДУМАЕШЬ, КАКОГО ЦВЕТА СТАНЕТ ЛИНИЯ?
ЧЁРНЫЕ И БЕЛЫЕ ТОЧКИ БУДУТ ЧЕРЕДОВАТЬСЯ... ЛИНИЯ СТАНЕТ СЕРОЙ, ЧТО ЛИ?
НУ ВОТ... ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ: ПРАКТИЧЕСКИ БЕЛОЙ!
ТО ЕСТЬ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ НАМНОГО БОЛЬШЕ, ЧЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ?
Да, совершенно точно!
Иррациональные числа
Рациональные числа
То есть
ПОЭТОМУ В МИРЕ БОЛЬШЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО, ЧЕМ РАЦИОНАЛЬНОГО, ТАК?
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА – ЭТО ЧИСЛА, КОТОРЫЕ НЕ ЯВЛЯЮТСЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ. ЭТО НЕ ИМЕЕТ НИКАКОГО ОТНОШЕНИЯ К ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ В МИРЕ!
СКРИП-СКРИП
АААА... ПОНЯТНО, ХИМУРО-САН.

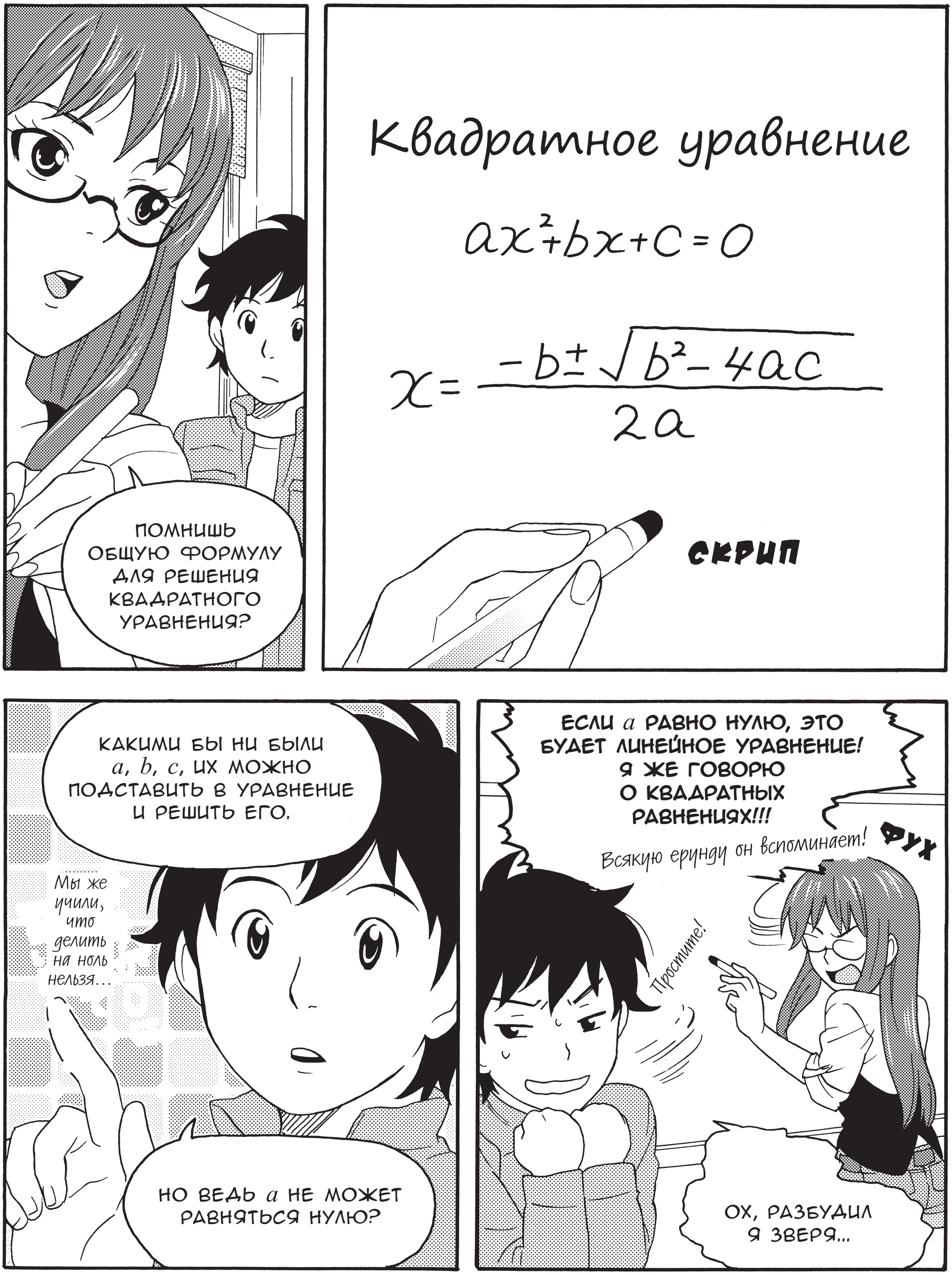


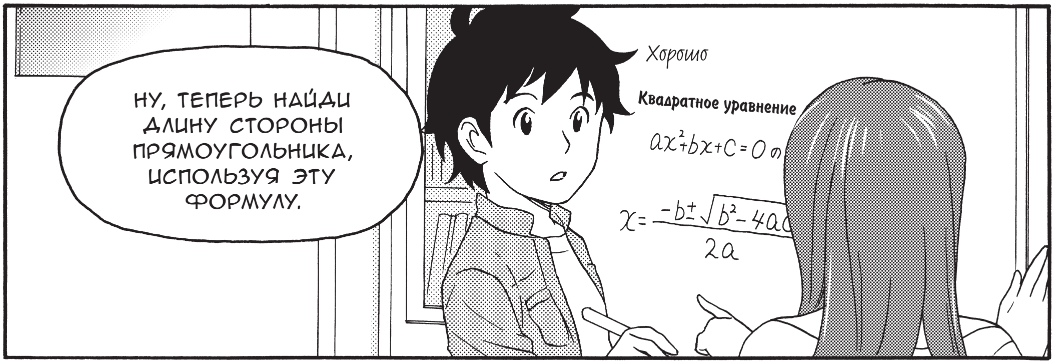
ВОТ СХЕМА ТОГО, О ЧЁМ Я ГОВОРИЛА.
Вещественные числа (десятичные дроби)
Рациональные числа (обыкновенные дроби)
7/3、11/3
5/4
и т.д.
Целые числа
0、-2、-3
и т.д.
Натуральные числа
1、2、3
и т.д.
Иррациональные числа
π = 3、141592…
√2 = 1、41421356…
и т.д.
Виды вещественных чисел
ВНАЧАЛЕ ВЫ СКАЗАЛИ, ЧТО Я ДУМАЮ В ГРАНИЦАХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ, ЭТО КАК РАЗ ТО, ЧТО ОПИСЫВАЕТСЯ ЭТОЙ СХЕМОЙ, ДА?
ТАК И ЕСТЬ.
МНИМАЯ ЕДИНИЦА i НЕ ПРИНАДЛЕЖИТ К ВЕЩЕСТВЕННЫМ ЧИСЛАМ.

2. ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ




СКРИП
ОБОЗНАЧИМ ОДНУ СТОРОНУ ЗА x ...
$x(x-5) = 100$
$x^2 - 5x = 100$
$x^2 - 5x - 100 = 0$
ХОРОШО.
ТЕПЕРЬ ПОПРОБУЕМ ИЗОБРАЗИТЬ ФУНКЦИЮ ИЗ ПРАВОЙ ЧАСТИ НАШЕГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАФИКЕ.
150
100
50
0
−50
−100
−150
−15
−10
−5
0
5
10
15
ОТВЕТОМ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ТОЧКИ, В КОТОРЫХ ГРАФИК ПЕРЕСЕКАЕТ ОСЬ X, ТАК?


Квадратное уравнение
$ax^2+bx+c=0$
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Помнишь общую формулу для решения квадратного уравнения?
СКРИП
Какими бы ни были a, b, c, их можно подставить в уравнение и решить его.
Мы же учили, что делить на ноль нельзя...
Но ведь a не может равняться нулю?
Если a равно нулю, это будет линейное уравнение! Я же говорю о квадратных равнениях!!!
Всякую ерунду он вспоминает!
ФУХ
Простите!
Ох, разбудил я зверя...



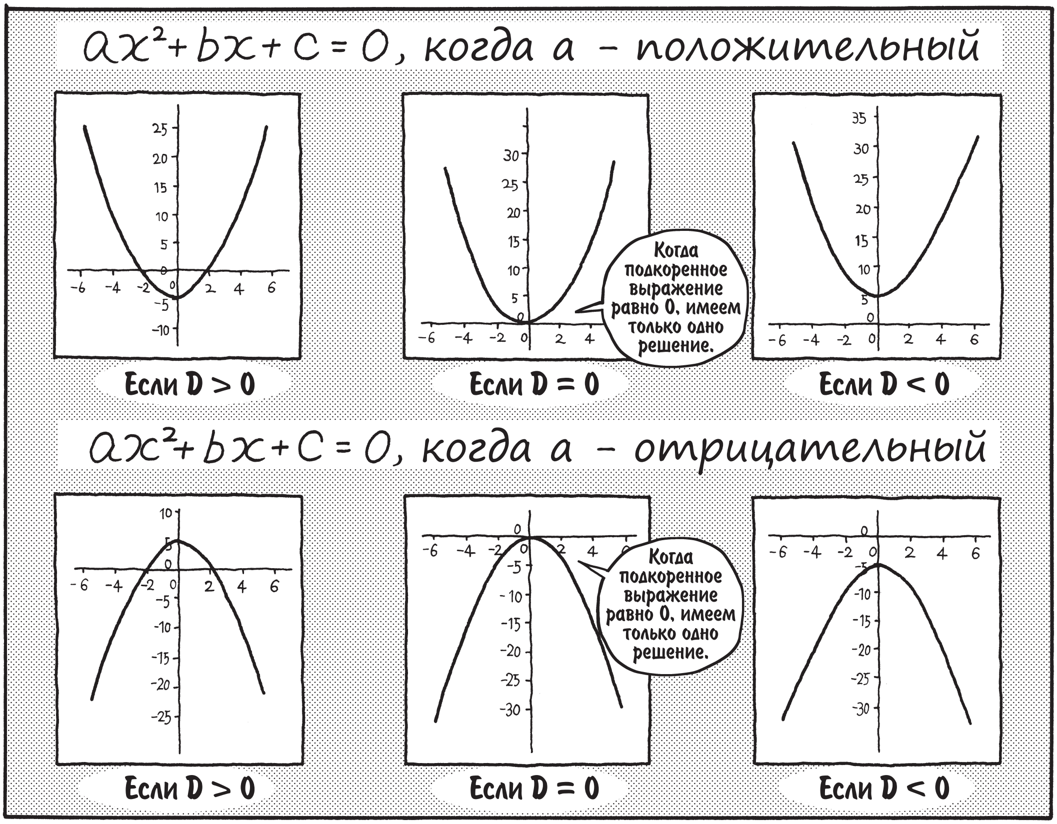
$a=1$ 、 $b=-5$ $c=-100$

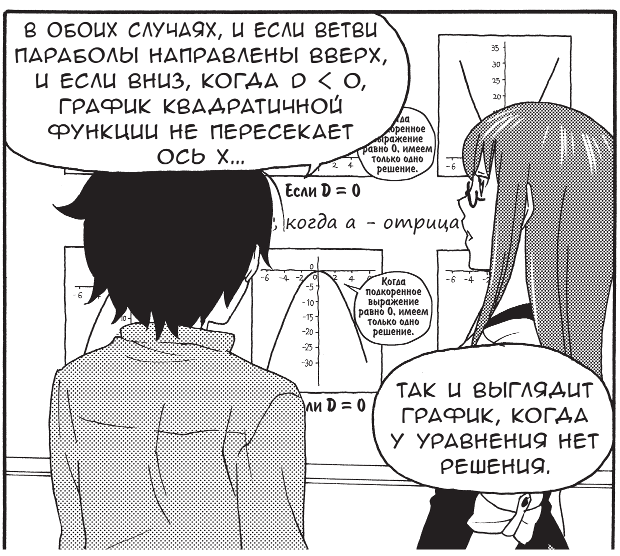
Подставим эти значения:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times(-100)}}{2\times1}=\frac{5\pm\sqrt{25+400}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{425}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25\times17}}{2}=\frac{5\pm5\sqrt{17}}{2}$$


ХОРОШАЯ РАБОТА!
ЭТО БЫЛО КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ, КОТОРОЕ ИМЕЕТ РЕШЕНИЕ. А БЫВАЮТ ТАКИЕ, КОТОРЫЕ НЕЛЬЗЯ РЕШИТЬ.
ВЖИХ
ЭТО ТЕ, КОТОРЫЕ ВАС РАЗДРАЖАЮТ, ДА?
ОПРЕДЕЛИТЬ, ИМЕЕТ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЕ ИЛИ НЕТ, МОЖНО, ЗНАЯ ЕГО ДИСКРИМИНАНТ D. ЕСЛИ ЗНАЧЕНИЕ D ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ...
СКРИП
ТО УРАВНЕНИЕ НЕЛЬЗЯ РЕШИТЬ.
Если дискриминант
$D = b^2 - 4ac < 0$,
то решения нет.
ДИСКРИМИНАНТ ОБОЗНАЧАЕТСЯ D ПО ПЕРВОЙ БУКВЕ СЛОВА "DISCRIMINANT".
КОГДА D МЕНЬШЕ НУЛЯ, ЭТО ОЗНАЧАЕТ, ЧТО В ПОДКОРЕННОМ ВЫРАЖЕНИИ ПОЛУЧАЕМ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО.
В ПОДКОРЕННОМ ВЫРАЖЕНИИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО...
АГА, ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ЗДЕСЬ ПОЯВЛЯЕТСЯ МНИМАЯ ЕДИНИЦА, ДА?!
STOP
НЕ ТОРОПИСЬ.
СНАЧАЛА ПОСМОТРИМ НА ГРАФИКИ.


СКРИП
Направление ветвей параболы на графике квадратичной функции зависит от знака старшего коэффициента a. Если он положительный, ветви параболы направлены вверх, и наоборот. Рассмотрим графики для обоих случаев.


$ax^2+bx+c=0$, когда a – положительный
Когда подкоренное выражение равно 0, имеем только одно решение.
Если D > 0
Если D = 0
Если D < 0
$ax^2+bx+c=0$, когда a – отрицательный
Когда подкоренное выражение равно 0, имеем только одно решение.
Если D > 0
Если D = 0
Если D < 0


В обоих случаях, и если ветви параболы направлены вверх, и если вниз, когда D < 0, график квадратичной функции не пересекает ось X...
Так и выглядит график, когда у уравнения нет решения.


В конце концов, что же это значит, когда нет решения?