Содержание

Вступительное слово от издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге, – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте **www.dmkpress.com**, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу **http://dmkpress.com/authors/publish_book/** или напишите в издательство по адресу **dmkpress@gmail.com**.

Скачивание исходного кода примеров

Скачать файлы с дополнительной информацией для книг издательства «ДМК Пресс» можно на сайте **www.dmkpress.com** или **www.дмк.рф** на странице с описанием соответствующей книги.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг – возможно, ошибку в основном тексте или программном коде, – мы будем очень благодарны, если вы сообщите нам о ней. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Если вы найдете какие-либо ошибки в коде, пожалуйста, сообщите о них главному редактору по адресу **dmkpress@gmail.com**, и мы исправим это в следующих тиражах.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательство «ДМК Пресс» очень серьезно относится к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты **dmkpress@gmail.com**.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие

Немного математики никогда не повредит практичному человеку.
Я самоучка, и это замедлило меня.

– Хиггстон Рейнберд (Higgston Rainbird),
изобретатель первой машины времени[1]

Однажды утром около трех лет назад я сел с горячей чашкой кофе и распахнул *Boston Globe*[2] того дня. После прочтения самого поучительного раздела (комиксов, конечно же, особое внимание уделил *Arlo and Janis*[3]), я обратился к разделу «Мнение редакции». Там я нашел возмутительное – действительно, невероятно возмутительное! – письмо, которое показалось мне гораздо более нелепым, чем все, что я только что прочел в комиксах. *Письмо* под названием «Кому вообще нужно это знать?» было написано в знак протеста против необходимости хороших знаний в *математике* для сдачи CPT[4] (college placement test). Письмо содержало следующие строки:

> Круто, если вы знаете, как решать квадратные уравнения, где есть корень квадратный из минус единицы. И это знание необходимо для некоторых профессий. Но почему это необходимо для прохождения курсов начального уровня, которые открывают двери к хорошим рабочим местам? ... Продвинутая *алгебра* – это новая латынь. Ее иногда применяют, но в целом это препятствие, о которое спотыкается множество молодых людей, которые могли бы быть успешными экспертами в своих областях, но у них нет никаких шансов, ведь они не

[1] Из рассказа Р. А. Лафферти (R. A. Lafferty) «Дождевая птица» (Rainbird // Galaxy Science Fiction. December 1961.

[2] *Boston Globe* – американская ежедневная газета, крупнейшая в Бостоне. – *Прим. ред.*

[3] *Arlo and Janis* – американский комикс Джимми Джонсона. Публикуется с 1985 г. – *Прим. ред.*

[4] Аналог нашего ЕГЭ для проверки знаний старшеклассников. – *Прим. ред.*

знают, как решать квадратные уравнения. Многие из тех, кто умеет решать квадратные уравнения, могли бы использовать свое время продуктивнее и изучить такие жизненно важные навыки и знания, как, например, умение рассуждать[1].

Что ж! Что вы можете сказать на это, кроме того что это полная ерунда? Теперь авторы этого письма почти наверняка ответят: «Это только твое мнение, приятель, и это ты ошибаешься». После того как я успокоился, я понял, что подобные споры вряд ли изменят мнение многих людей. И поэтому я не стал писать возмущенное письмо редактору в ответ – но я так же понял, что более эффективным ответом могла бы быть убедительная демонстрация силы *математических рассуждений*, применимых к реальному миру, которым авторы этого письма так по праву обеспокоены. Вот о чем эта книга – продолжение моей предыдущей книги *In Praise of Simple Physics* (Princeton University Press, 2016). Это сборник сочинений, каждое из которых не очень длинное и иллюстрирует способность математики (алгебры, тригонометрии, геометрии, а иногда и элементарного вычисления вместе с небольшой помощью от моего ноутбука) в сочетании с фундаментальными физическими законами обеспечить понимание реальных задач. Эти задачи не похожи на вычислительные упражнения в учебниках, предназначенных лишь для практики в манипулировании абстрактными символами. Напротив, почти все они значимы не только в математике, но и в физике. А также каждое эссе заканчивается как минимум одним вопросом *вам* для анализа и обдумывания.

Достойный процент эссе специально включает квадратичные вычисления (и еще более высокого порядка), и эти вычисления – в частности, то, почему я думаю, что авторы письма в *Boston Globe* были совершенно неправы. После прочтения этой книги, я думаю, вы согласитесь со мной. Как я уже писал, я представляю свою аудиторию как читателей, которые изучали математику и физику в средней школе и студенческие годы серьезно (а в мире только обучающихся на первых курсах математического профиля миллион), но кто, по тем или иным причинам, не стал физиком-математиком. Тем не менее сегодня это юристы, биологи, химики, бухгал-

[1] Для тех, кто любит проверять цитаты, письмо можно найти (предположительно сейчас – только на устройстве для чтения микрофильмов в вашей местной библиотеке) на странице A15 от 13 августа 2015 г. выпуска *Boston Globe*.

теры, программисты, инженеры, врачи и поэты (возможно, даже голливудские сценаристы, наряду с несколькими профессиональными футболистами, вероятно). И они помнят то удовольствие, которое получаешь, осмысливая мир с помощью математического анализа. Это то, что на самом деле делают физики-математики. Если вы тоже такой человек, то я написал эту книгу для вас – о том, как думают физики-математики.

Обилие книг с различными подходами и исследованиями на математические темы в книжных магазинах показывает, что значительная часть людей по крайней мере *осознает важность* предмета. В другой форме поп-культуры – в фильмах – похожая картина. Например, «Умница Уилл Хантинг» (1997), в котором интегралы Фурье текут через начальные титры; «Игры разума» (2001), в котором аллюзии на эзотеричную теорию игр распиханы тут и там; «Человек, который познал бесконечность» (2015), который начинается с изображений загадочных уравнений из писем индийского гения *Рамануджана* (Ramanujan, 1887–1920), отправленных в 1913 году всемирно известному английскому математику *Г. Х. Харди* (G. H. Hardy, 1877–1947); и «Скрытые фигуры» (2016), со множественными упоминаниями астродинамики. На телевидении у нас был, конечно, сериал «4исла» (2005–2010) и совсем недавно первый эпизод «Однажды ночью» (The Night Of, 2016), которая начинается с того, как студент яростно делает заметки, пока его преподаватель пишет на доске (математически корректно!) и читает лекцию по *теореме Стокса* из дифференциального векторного исчисления.

Различие между чистой математикой и чистой физикой часто неявное, и есть некоторые особенно талантливые люди, которые могут работать на самых высоких уровнях в обеих сферах. Одним из таких людей был американский физик-математик польского происхождения *Марк Кац* (Mark Kac, 1914–1984), который во введении к своей изящной автобиографии «Загадки шанса» (*Enigmas of Chance*. Harper & Row, 1985) пишет об этом различии с глубоким пониманием:

> В математике, когда вы открываете что-то, у вас возникает чувство, что это всегда было там. В физике у вас есть ощущение, что вы сделали настоящее открытие… Если занятия математикой или наукой рассматривать как игру, то можно сказать, что в математике вы соревнуетесь против себя или других математиков; в физике же ваш противник – природа, и ставки от этого выше.

Моя цель при написании данной книги состояла в том, чтобы предоставить конкретные примеры того, о чем только что говорил Кац.

Теперь вы можете подумать: очевидно, что математический физик не может функционировать без математики. Тем не менее отношения между математикой и физикой не всегда были гладкими. Цитирую швейцарского физика-теоретика *Реза Йоста* (Res Jost, 1918–1990):

> Отношения между математикой и физикой меняются со временем. Прямо сейчас и в течение последних нескольких лет царит гармония и медовый месяц. Тем не менее я видел другие времена, времена разводов и ожесточенных сражений, когда сестринские науки объявили друг друга бесполезными или даже хуже. Следующий обмен мнениями между известным физиком-теоретиком и не менее известным математиком мог бы быть типичным еще пятнадцать или двадцать лет назад. Физик говорит: «Я не пользуюсь математикой. Всю математику, в которой я когда-либо нуждаюсь, я придумываю за одну неделю». Математик отвечает: «Вы, должно быть, имеете в виду те семь дней, которые понадобились Господу, чтобы создать мир».[1]

Что ж, несмотря на такие конфликты, в этой книге мы просто предположим, что математика имеет важное значение для работы физиков. Но даже в этом случае вы может хорошенько задуматься о том, насколько именно глубоко мы окунемся в математику в этой книге. Кажется очевидным априори, что мы должны быть хотя бы немного математичными: в конце концов, в книге со словом «*математические*» в названии разве вы не почувствуете себя надутыми, или даже откровенно обманутыми, если не увидите уравнения здесь и там? Ну, вы, конечно, согласны, что это имеет смысл, но, спросите вы, будет ли много действительно сложных уравнений? Краткий ответ: если вы изучали математику на уровне средней

---

[1] Из эссе Йоста *Mathematics and Physics since 1800: Discord and Sympathy* («Математика и физика с 1800 года: раздор и симпатия»), из книги в *The Fairy Tale about the Ivory Tower: Essays and Lectures* (in German) («Сказка о башне из слоновой кости: эссе и лекции» (на немецком языке)), Springer, 1995. Йост не уточнял, кто именно был тем «известным физиком-теоретиком» и «не менее известным математиком», но фактически такой обмен мнениями состоялся во время лекции, которую Кац дал в Калифорнийском техническом институте; физиком (в аудитории) был Ричард Фейнман. Кац и Фейнман знали друг друга с конца 1940-х гг., когда они были коллегами в Корнелльском университете.

школы, тогда вам пора. *Алгебра* в старшей школе, тригонометрия, геометрия и понимание того, что такое *производная* и *интеграл*, – вот все, что вам нужно. Хорошо, это короткий ответ. Позвольте мне теперь дать вам конкретный пример с той математической сложностью, с которой вам надо уметь справляться.

Я выбрал этот конкретный пример именно потому, что он использует только рассуждения на уровне средней школы, и все же я готов поставить долларов пять, что даже профессиональным математикам, возможно, придется потратить немного времени, чтобы решить это. Надеюсь, что этот пример доносит мысль, что мы будем обсуждать проблемы, требующие лишь относительно бесхитростного математического анализа, но тем не менее приводит к возможности успешно решать нетривиальные физические вопросы. Итак, вот задача:

> Докажите, что произведение любых последовательных m натуральных чисел всегда делится на $m!$, то есть на m-факториал, где $m! = m(m - 1)(m - 2)\dots(3)(2)(1)$.

Это утверждение говорит, например, что (17)(18)(19)(20)(21)(22)(23) делится на 7!, что вы можете легко проверить, выполнив очевидные сокращения. Но подтверждение конкретными примерами, независимо от того, сколько бы вы их ни решили, не является доказательством того, что требование всегда верно для всех возможных m. Может показаться, что на самом деле это самая трудная задача, но это не так. Вот один способ решить ее.

Начнем с того, что утверждение очевидно верно для случаев $m = 1$ и $m = 2$. Случай $m = 1$ говорит о том, что любое одно целое число всегда делится на $1! = 1$, – и я надеюсь, для вас это тривиально! Случай $m = 2$ говорит, что произведение любых двух последовательных целых чисел (одно из которых тогда должно быть нечетным, а другое четным) делится на $2! = 2$, и, конечно, 2 разделит четное целое число. Однако для $m > 2$ все уже не так очевидно.

Что делать? Использовать метод индукции, особенно любимый математиками. То есть мы будем считать, что это истинно для случая $m = n - 1$, где n – некоторое целое число больше 2. Тогда мы покажем, что из этого предположения следует, что случай $m = n$ так же верен. Поскольку мы уже знаем, что утверждение верно для

$m = 2$, тогда это должно быть верно для $m = 3$, что, в свою очередь, говорит, что это верно для $m = 4$ и т. д., до бесконечности. Это математический аналог того, как если бы для левитации вам было бы достаточно тянуть за собственные шнурки. Физики не могут этого сделать, но математики могут! Начнем с определения функции $\varphi_n(r)$ как произведения n последовательных натуральных чисел, начиная с r:

$$\varphi_n(r) = r(r + 1)(r + 2)\cdots(r + n - 1).$$

В частности,

$$\boxed{\varphi_n(1) = 1(2)(3)\cdots(n) = n!.}$$

Поскольку

$$\varphi_n(r + 1) = (r + 1)(r + 2)\cdots(r + n - 1)(r + n),$$

то

$$\varphi_n(r + 1) - \varphi_n(r) = [(r + 1)(r + 2)\cdots(r + n - 1)]\,[(r + n) - r],$$

или

$$\varphi_n(r + 1) - \varphi_n(r) = [(r + 1)(r + 2)\cdots(r + n - 1)]n.$$

Число справа в квадратных скобках – это произведение из $n - 1$ последовательных целых чисел, и поэтому, по нашему предположению, делится на $(n - 1)!$. Это:

$$[(r + 1)(r + 2)\cdots(r + n - 1)] = \text{произведение } (n - 1)!,$$

и поэтому

$$\varphi_n(r + 1) - \varphi_n(r) = \{\text{произведение } (n - 1)!\}n = \text{произведение } n!,$$

что означает, что

$$\boxed{\varphi_n(r + 1) = \varphi_n(r) + \text{произведение } n!}$$

Для $r = 1$ этот результат означает, что $\varphi_n(2) = \varphi_n(1) + \text{произведение } n!$.

Но так как $\varphi_n(1)$ сама эквивалентна $n!$ (посмотрите на формулу во второй рамке), то

$$\varphi_n(2) = \text{произведение } n!.$$

Но тогда

$$\varphi_n(3) = \varphi_n(2) + \text{произведение } n! \\ = \text{произведение } n! + \text{произведение } n! = \text{произведение } n!.$$

И так далее для $\varphi_n(4)$, $\varphi_n(5)$ ... и так далее до бесконечности! То есть для r – любого положительного четного числа

$$\varphi_n(r) = \text{произведение } n!.$$

И вот мы закончили. Умно придумано, не правда ли?[1]

Физик сможет оценить такую симпатичную демонстрацию, как и любой математик, но он или она также может противостоять искушению возгордиться после этого. Например, в своей автобиографии Кац рассказывает откровенную историю о комментарии, сделанном физиком математику в знаменитой радиационной лаборатории MIT:

> «Вы можете сохранить свое гильбертово пространство», – говорит физик. – «Я хочу ответ в вольтах»[2]. Это будет задавать тон остальной части этой книги.

Кац, почти вся карьера которого протекала в академических кругах, имел международную репутацию первоклассного аналитика вероятностей, но во время Второй мировой войны он также работал неполный рабочий день в Радиационной лаборатории, изучая физические проблемы, вызванные электронным шумом в радаре. Такие разносторонние таланты не обязательно будут оценены теми, чьи способности ограничены только одной сферой деятельности. Например, когда Кац после войны опубликовал статью в журнале по прикладной физике, основываясь на своей

---

[1] Это не самовосхваление. Я столкнулся с данным решением несколько лет назад, когда читал учебник по элементарной алгебре XIX в. английского математика У. У. Рауса Болла (W. W. Rouse Ball, 1850–1925): *Elementary Algebra*. Cambridge University Press, 1890. P. 415. Было ли это его оригинальным открытием или он, в свою очередь, обнаружил его еще в более ранней работе, я не знаю.

[2] Этим физиком был Сэмюэль Гоудсмит (Samuel Goudsmit, 1902–1978), который известен как главный научный руководитель миссии «Алсос» (USA Alsos mission) сразу после июня 1944 г., когда Европа вторглась в Нормандию. Целью миссии было раскрыть детали нацистского химического вещества и подробности программ биологического, ракетного и атомного оружий. А математиком был знаменитый эксцентричный Норберт Винер (Norbert Wiener, 1894–1964).

работе на радаре, он получил открытку от друга – блестящего венгерского математика *Пола Эрдеша* (Paul Erdös, 1913–1996) – с одним-единственным предложением: «Я молюсь за вашу душу».

Чтобы максимизировать ваше удовольствие, книга структурирована как последовательность постановки задач со всеми их решениями, собранными вместе в самом конце. То есть вы можете попробовать свои силы в каждой задаче самостоятельно, прежде чем читать мое решение, но если вы застряли или просто хотите сравните свой подход с моим, вы можете обратиться к разделу с решениями. (Один физик, который посмотрел на ранний черновик этой книги, думал, что читатели просто прочитают задачи, а затем сразу решения, на что я ответил: «А разве это плохо?» Да, так тоже нормально. В конце концов, это ваша книга!) Чтобы показать вам, как это будет работать, рассмотрим следующую задачу по математике.

Задача 1. Вавилонский математик, ставший эллином[1], Диофант Александрийский, который, как считается, жил в 250 г. н. э., т. е. на шесть веков позже Евклида – сегодня вспоминается[2] как создатель следующего класса задач: дан один полином (так называемое *диофантово уравнение*) в n переменных, существуют ли у него какие-либо целочисленные положительные решения? Например, каковы все положительные целые значения (если таковые имеются) для x и y таких, что

$$72x + 694y = 1\,001\,001?$$

Аналогично, каковы положительные целочисленные значения (если они есть) для x, y и z таких, что

$$x^3 + 2y^3 = 4z^3?$$

Чтобы ответить на эти два вопроса (первый, несмотря на большие коэффициенты, легкий, а второй, несмотря на малые коэффици-

[1] Эллины – так называли себя жители Древней Греции. – *Прим. ред.*

[2] Немного известно о жизни Диофанта, кроме того, сколько ему было лет, когда он умер. Это из-за загадки, датируемой IV в., которая, вероятно, появлялась в каждом вводном алгебраическом тексте и звучит так: «Его детство длилось 1/6 его жизни; его борода выросла на 1/12 позже; еще через 1/7 он женился, и у него родился сын 5 лет спустя; сын дожил до половины возраста своего отца, а отец умер 4 года спустя сына». Итак, если Диофант умер в возрасте x, то у нас получится $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$, и я предоставляю вам самим найти решение.

енты, не такой простой), требуются только элементарные понятия четности и нечетности. Если вы застрянете, то решения для обоих вопросов приведены в самой первой записи раздела решений.

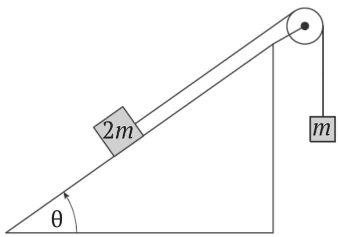


Рис. 1. Две массы
движутся с постоянной скоростью

Задача 2. Задача такого типа часто возникает во время теоретического анализа. Используя только *алгебру* (без дополнительных вычислений!), *выведите разложение степенного ряда* $\sqrt{(1+x)} = c_0 + c_1x + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + \cdots$. Что здесь есть c? Вы можете найти это разложение в справочнике по математике, но физик-математик должен знать, как вывести это с нуля. Что, если, например, ответ является ключом к спасению с необитаемого острова, и все, что у вас есть, – это палка, чтобы исписать песчаный пляж? (Не смейтесь, это, по крайней мере, мыслимая ситуация!) Решение – вторая запись в одноименном разделе. И так как это книга по математической физике, третья задача – физическая.

Задача 3. На рис. 1 масса $2m$, находящаяся на наклонной плоскости с углом θ, соединена с помощью нити и колесика с массой подвеса m. Постоянный *коэффициент кинетического трения* (coefficient of kinetic friction) между массой на наклонной поверхности и этой поверхностью μ[1]. Две массы движутся с постоянной скоростью. (Это подсказка, чтобы прийти к мысли о втором законе Ньютона, знаменитом «сила – это масса умноженная на ускорение». Каково соотношение между θ и μ? В частности, можете сами вы-

[1] Напомним, что если движущаяся масса применяет силу F_n (скажем, ее вес) в виде нормали к поверхности, по которой она движется, и если масса испытывает сопротивление силы трения (то есть силы, противоположной направлению движения) вдоль поверхности F_r, то $\mu = F_r/F_n \geq 0$ и называется кинетическим коэффициентом трения.

яснить эти соотношения (уделите особое внимание на интервале $0 \le \mu < \frac{1}{2}$) и комментируйте все, что угодно, что найдете особенно интересным. Анализ – третья запись в разделе решений.

Хоть аналитические методы, используемые в этой книге, и будут отчасти просты для большинства читателей, иногда мы все же будем немного хитрее. Чтобы проиллюстрировать, что я имею в виду под словом трюк, рассмотрим следующую небольшую головоломку, которую я впервые услышал в средней школе. Старый фермер умер и завещал всех коров в своем хлеву своим трем сыновьям: Алу, Бобу и Чаку. Ал должен был получить половину коров в хлеву, Боб должен был получить одну треть коров в хлеву, а Чак должен был получить одну двенадцатую коров в хлеву. Проблема заключалась в том, что когда фермер умер, коров в сарае было 11! Никто не мог выполнить последние пожелания фермера, пока его брат (явно физик-математик в отставке, у которого к тому же было несколько своих коров) не решил проблему. Вот что он сделал:

1) он поместил одну из его собственных коров в хлев. Теперь их стало 12;
2) Ал получил 6 коров (1/2 от 12 коров в хлеву), осталось 6 коров;
3) Боб получил 4 коровы (1/3 от 12 коров в хлеву), осталось 12 коров;
4) Чак получил 1 корову (1/12 от 12 коров в хлеву), осталась 1 корова;
5) физик-математик в отставке забрал последнюю оставшуюся корову в хлеву, ту самую, что он поместил в хлев в пункте 1, и пошел домой.

Обратите внимание, что даже если физик-математик на самом деле не имел бы ни одной коровы, он мог бы просто положить воображаемую корову в сарай и затем, на этапе (5), забрать свою воображаемую корову обратно. В этом и состоит трюк, о котором я говорил выше, и мы будем делать такие вещи дальше время от времени[1]! Разве математика не прекрасна?

---

[1] Как математики любят говорить, уловка, которую вы можете использовать более одного раза, – это метод. В конце этого предисловия я дам вам еще две сложные задачи, обе древние. Их происхождение датируется I в. н. э. в китайской математической литературе. И первую, и вторую можно решить с помощью метода «воображаемой коровы». Физикам-математикам эти задачи должны тоже понравиться.

Просто чтобы вы не думали, что я буду уделять слишком много внимания уловкам, позвольте мне показать вам еще один «серьезный» пример полезности квадратных уравнений для физиков-математиков. Это удивительно, как часто при чтении технической статьи по физике в журналах встречается предложение, которое звучит примерно так: «Теперь, если мы применим неравенство Коши–Шварца[1] к нашему последнему результату, станет сразу очевидно, что…» Говоря о неравенстве Коши–Шварца:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ могут быть любыми реальными функциями, какими вы пожелаете, если существуют их определенные интегралы. Это общая теорема удивительного значения для физиков-математиков; один математик назвал ее «исключительно мощным оружием»[2]. Затем математик очень правильно написал: «Есть много случаев, когда люди, которые знают об использовании этой формулы, будут сиять, пока их менее удачливые братья будут барахтаться дальше». Позже в этой книге я приведу неравенство Коши–Шварца в одной из дискуссионных задач, но как (может быть, вам уже сейчас это интересно) мы докажем его? Ну, все, что нужно знать, – это квадратное уравнение. Вот как доказывается.

С λ в качестве произвольного параметра, безусловно, верно, что

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2 dx \ge 0,$$

потому что интеграл любой реальной квадратичной функции не может быть отрицательным (подумайте о пространственной интерпретации определенного интеграла). Развернем этот интеграл в деталях, получим:

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\lambda^2 \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)\,dx \ge 0.$$

---

[1] Названное в честь французского математика *Августина-Луи Коши* (Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857) и немецкого математика *Германа Шварца* (Hermann Schwarz, 1843–1921). Чтобы понять физическое значение этого неравенства, все, что вам действительно нужно знать, – это то, что под определенным интегралом функции $h(x)$ на интервале $a \le x \le b$ называется площадь под кривой $y = h(x)$ при изменении x от a до b.

[2] *Ralph Palmer Agnew*. Differential Equations. McGraw-Hill, 1960. P. 370.

Эти интегралы определенные, и они имеют определенные значения.

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = A,$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = B,$$

$$\int_a^b g^2(x)\,dx = C,$$

то есть получаем

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0.$$

Это квадратное неравенство для λ. Знак ≥ означает физически, что график слева, как функция от λ, никогда не пересекает ось λ (представьте ее горизонтальной). То есть левая сторона – это кривая, которая всегда выше (или, самое большее, просто касается[1]) оси λ. «Не пересекая ось λ» означает, что нет реальных решений (точки пересечения = решения) для λ к

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0.$$

Формула решения квадратного уравнения говорит нам, что

$$\lambda = \frac{-2B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 2AC}}{A}.$$

Тогда условие отсутствия реальных решений будет выглядеть так:

$$B^2 - AC < 0,$$

что, конечно, дает комплексные решения. Это

$$B^2 < AC,$$

или

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))^2\,dx < \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx,$$

[1] Конечно, касание происходит, когда знак ≥ становится частным случаем равенства.

что и является *неравенством Коши–Шварца*. Авторы письма в *Boston Globe* теперь (я надеюсь) с энтузиазмом стремятся пересмотреть ошибочность своих аргументов!

Как я уже писал ранее, все конкретные примеры в этом предисловии были выбраны с целью проиллюстрировать то, как думают физики. Это довольно смелое утверждение, и поэтому позвольте мне закончить еще тремя примерами, чтобы подтвердить его. Во-первых, наблюдая за природой, кажется, что нет такой вещи, как *сила разрыва*[1]. Идея преемственности в физике очень важна, и ее можно использовать для простых решений там, где в противном случае было бы гораздо труднее. В качестве примера представьте себе человека, который собирается подняться на холм, начиная с *A* (низ холма) и заканчивая в *B* (вершина холма). Вы ничего не знаете о том, как он идет (может быть, иногда он останавливается на некоторое время, иногда он идет медленно, иногда он идет быстрым шагом, а иногда он даже спускается вниз по склону). Все, что вы знаете, – это то, что, начиная с *A* в 10 часов утра, он прибывает в *B* в 11 часов. То есть прогулка в гору занимает ровно 60 минут.

Он останавливается на ночь в *B*, а затем, на следующее утро, ровно в 10 часов он идет вниз по склону, по тому же пути, по которому он шел во время восхождения в предыдущий день. Он прибывает в *A* в 11 часов. То есть обратная поездка занимает так же ровно 60 минут. Опять же, вы ничего не знаете о том, как он делает спуск.

Когда все это сказано, физик-математик может сразу сделать следующий вывод: на пройденном пути есть хотя бы одно место, которое человек прошел в одно и то же время во время спуска, как и время, в которое он прошел то же самое место во время восхождения. Физик может сделать это утверждение, не написав ни одного уравнения, а, скорее, должен только осознавать *непрерывность*. Вот как. На рис. 2 мы видим два графика, каждый из кото-

---

[1] Когда я пишу это, я на самом деле цитирую двух известных физиков-математиков: Ричарда Фейнмана и доктора философии Принстонского университета, Джона Уилера (John Wheeler, 1911–2008), который говорил о преемственности физических сил в известной статье 1949 г. на тему особенно загадочных парадоксов путешествий во времени (см. мою книгу *Machine Tales: The Science Fiction Adventures and Philosophical Puzzles of Time Travel*. Springer, 2017. P. 264–269). Вы можете найти больше информации об этих двух очень важных фигурах в физике XX века в книге Пола Хальперна (*Paul Halpern*. The Quantum Labyrinth: How Richard Feynman and John Wheeler Revolutionized Time and Reality. Basic Books, 2017).

рых показывает местоположение (измеренное от A вдоль пути) человека в зависимости от времени. Один участок предназначен для восхождения, а другой – для спуска. Каждый график непрерывен, и нет никаких других условий[1]. Невозможно нарисовать эти два графика, не имея хотя бы одной точки пересечения (большой **X**), и такая точка находится на одинаковом расстоянии от точки A для каждого из графиков.

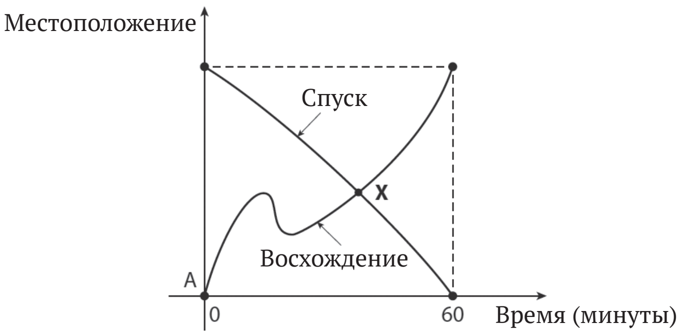


Рис. 2. **X** – точка, отражающая одно и то же место в одно и то же время

Ни единого уравнения, только один график и физические размышления.

Тем не менее мы можем сделать этот почти минимальный анализ еще лучше с изначально загадочной (для большинства людей) проблемой, которую можно решить только с помощью описания (и логичных доводов). Отметьте n точек на листе бумаги, где n – любое целое положительное число (если $n \geq 2$). Затем столько раз, сколько вы хотите, выберите любые две точки и соедините их линией. Любая точка может быть выбрана несколько раз или вообще ни разу. Когда вам надоест выбирать пары точек и рисовать линии, остановитесь. Затем точки можно разделить на два набора: набор точек, которые излучают четное количество линий, и набор точек, которые излучают нечетное количество линий. Докажите, что в этом втором наборе всегда будет четное количество точек.

[1] Ни один из графиков не должен повторяться по оси времени. Уилер и Фейнман использовали аргумент о непрерывности в условиях путешествия во времени, но мы чуть более консервативны.

С чего же начать? Ну, я думаю, что следующий анализ является прекрасной иллюстрацией того, как математический физик подошел бы к такому вопросу. Представьте, что рядом с каждой из n точек находится счетчик, показывающий, сколько линий в данный момент излучается от точки. Таким образом, до того, как нарисованы какие-либо линии, все счетчики показывают ноль, а общее количество всех точек равно нулю. Теперь нарисуйте линию, соединяющую любые две точки. Счетчики для этих двух точек увеличиваются на 1, а общее количество всех точек равно 2. Нарисуйте еще одну линию. Счетчики для этих двух точек увеличиваются на 1, поэтому общее количество для всех точек равно 4 и т. д. В результате чего общее количество для всех точек всегда является четным числом. Когда закончите рисовать линии, счетчик для каждой отдельной точки будет отображать либо нечетное число, либо четное число. Сумма отображений для этих точек с четными счетчиками, конечно, будет четной (сумма любого числа четных чисел является четной). Таким образом, сумма значений для этих точек с нечетными счетчиками также будет четной (эта сумма представляет собой общую сумму по всем точкам, которая является четной, за вычетом суммы по четным счетчикам, которая, как мы только что обнаружили, тоже является четной), и, конечно, четное минус четное – так же четное. Итак, у нас есть число (назовем его N) точек, каждая из которых имеет счетчик, отображающий нечетное число, причем сумма этих отображений является четной. Итак, раз N нечетное $=$ четное, и, следовательно, N должно быть четным, потому иначе не сходится (нечетное число нечетное количество раз $=$ нечетное).

Как можно оспорить что-то, настолько чертовски логичное?

В качестве заключительного примера физического мышления в математике (но теперь с учетом некоторой реальной математики) рассмотрим так называемую теорему о среднем значении, тему, обсуждаемую всеми первокурсниками. Предположим, что функция $f(y)$ непрерывна в интервале $a \leq y \leq b$ и что она имеет производную всюду на этом интервале. То есть $f(y)$ представляет собой то, что математики называют гладкой кривой. Предположим далее, что мы берем любые две точки в этом интервале, скажем, y_1 и y_2, и рисуем хорду, соединяющую $f(y_1)$ и $f(y_2)$, как показано на рис. 3.

Теорема о среднем значении утверждает, что существует конкретное значение y – назовем его y^* – такое, что наклон хорды равен $f'(y^*)$ – наклону касательной к кривой при $y = y^*$, где f' – производная от $f(y)$. Теорема не говорит, где именно находится y^*, только то, что она существует. Это пример математического утверждения, которое физик-математик объявил бы «очевидным». Однако оно имеет далеко не самые тривиальные последствия.

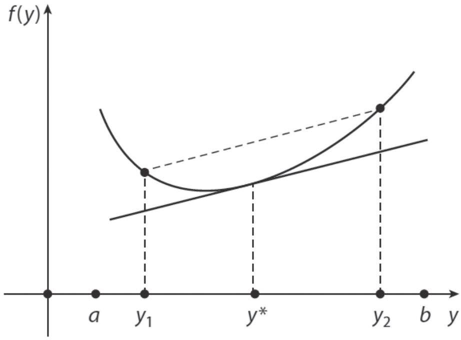


Рис. 3. Хорда (пунктирная)
и касательная (сплошная) к кривой

Рассмотрим, например, использование этой теоремы для получения неочевидного явно логарифмического неравенства, которое мы будем использовать позже в этой книге. Если мы определим $f(y)$ как естественную логарифмическую функцию, то есть

$$f(y) = \ln(y),$$

то

$$f'(y) = \frac{1}{y}.$$

График $f(y)$ показан на рис. 4, где мы рассматриваем интервал $1 \le y \le 1 + x$ для $x \ge 0$. Теорема о конечных приращениях говорит, что в интервале от 1 до $1 + x$ существует $y = y^*$ такой, что

$$\frac{1}{y^*} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{(1+x) - 1} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Следовательно,

$$\ln(1+x) = \frac{x}{y^*},$$

где y^* находится где-то (помните, мы не знаем, где) в интервале от 1 до $1 + x$. Если мы заменим y^* (где бы он ни был) на большее значение (например, на правый конец интервала $1 + x$), то очевидно, что левая часть предыдущего равенства станет $\geq$, а если мы заменим y^* на меньшее значение (левый конец интервала, 1), то станет ясно, что левая часть равенства становится $\leq$. Итак, у нас есть

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{(1+x)}$$

и

$$\ln(1+x) \leq x.$$

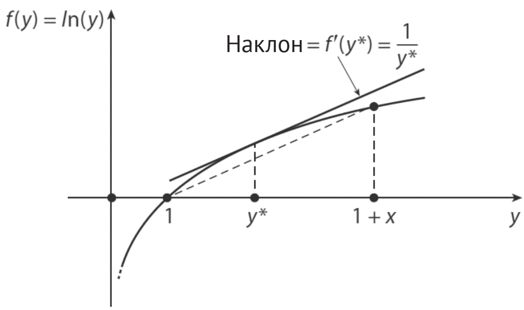


Рис. 4. Функция натурального логарифма
с хордой и касательной

Тогда, объединяя эти неравенства, получим:

$$\boxed{\frac{x}{(1+x)} \leq \ln(1+x) \leq x, \quad x \geq 0.}$$

Этот результат[1] станет важным для нас во время обсуждения задачи 15.

Наконец, в качестве завершения данного предисловия позвольте мне кое-что сказать о компьютерных программах, включенных в эту книгу для иллюстрации алгоритмов, решающих задачи, которые мы не можем решить аналитически, – они разбросаны по

[1] Справедливость двойного неравенства легко продлить до $x > -1$, но я оставлю это вам, для вашего же удовольствия.

всей книге. Все они написаны на MATLAB, языке программирования, который обычно преподают студентам-инженерам. Я использую MATLAB, потому что я профессор электротехники на пенсии, и MathWorks (создатель MATLAB) любезно предоставил мне лицензию на бесплатный запуск MATLAB на моем персональном домашнем компьютере. Вы можете сказать: «Как мило с вашей стороны, профессор Нахин, но у меня нет MATLAB – и что мне делать?»

Вот мой ответ: изучите описания алгоритмов, приведенные в книге, а затем напишите свой собственный код на выбранном вами языке. Математики, кажется, особенно любят Mathematica, в то время как физики, кажется, одинаково любят и MATLAB, и Mathematica. (Один из ранних рецензентов этой книги предложил Python, который имеет преимущество в том, что он доступен с лицензией с открытым исходным кодом от MIT.) Просто помните: компьютерный язык – это просто инструмент. Если ваш компьютер работает только на бейсике, не беспокойтесь об этом. Результат – вот что важно. Все мои коды MATLAB написаны очень низкоуровневым способом, с использованием только общеизвестных, распространенных команд (IF, WHILE, FOR и т. д.), и поэтому их легко преобразовать практически на любой другой язык. Чтобы дать вам представление о возможностях компьютеров (и MATLAB, и других языков программирования) в изучении математических вопросов, я включил короткий «учебник на примерах» в конце книги (сразу после раздела с решениями), который вы можете прочитать в любое время.

Цифровой компьютер уже давно зарекомендовал себя как незаменимый инструмент при изучении физических систем, поведение которых в противном случае было бы ненаблюдаемым. Такое отсутствие наблюдаемости, например, может быть результатом практических ограничений, как, например, недостаток денег и/или времени (например, диффузия нейтронов в новом и дорогом ядерном реакторе или эволюция галактических структур в ньютоновской механике через огромные промежутки времени). Однако с помощью соответствующей физики, запрограммированной в компьютер, нам фактически не нужно строить стенку реактора, чтобы определить, каким будет поток, и, что еще более важно, мы можем быть почти что богоподобными и управлять вселенной быстрее, чем в реальном времени. (Или даже обратно во времени!)

Еще интереснее, пожалуй, будут те задачи, в которых фундаментальная физика отличается от того, что мы считаем реальным миром (характер силового взаимодействия и законы сохранения энергии могут быть изменены так же легко, как можно набирать новые строки компьютерного кода). Эту возможность, включающую то, что некоторые могут назвать невозможной физикой, я буду называть здесь представлением о воображаемых системах, и применение компьютеров ко многим таким задачам хорошо известно физикам. Например, в задаче 17 вы найдете пример этого с симуляцией таинственного NASTYGLASS.

Пожалуй, легко отмахнуться от этого как просто еще одного инструмента для физиков, инженеров и математиков, как можно сказать о карандашах, ручках и бумаге, но я думаю, что компьютеры и языки программирования – это нечто гораздо большее. Влияние компьютеров на нашу повседневную жизнь экспоненциально возросло, и, безусловно, этот взрывной рост будет продолжаться: математическая физика станет лишь одной из бесчисленных областей человеческой жизни, где мы ощутим значение этого роста.

Еще три сложные задачи (решения – в конце книги)

Первые две из этих трудных задач – задачи 4 и 5 – были взяты из классического текста колледжа «Элементарная теория чисел» Дэвида М. Бертона[1]. Профессор Бертон приводит некоторые числовые ответы в конце своей книги, но не дает никаких указаний о том, как вывести эти числа. Это и будет вашей задачей. Не пускайтесь в лобовую атаку, но потратьте несколько минут, чтобы найти хитрость. *Подсказка*: подумайте о воображаемых коровах!

Задача 4. При удалении яиц в корзине по 2, 3, 4, 5, 6 одновременно остаются, соответственно, 1, 2, 3, 4, 5 яиц. Когда их вынимают по 7 за раз, ни одного не остается. Найдите первые три числа количества яиц, которые могут быть при этом в корзине.

Задача 5. Задача с корзиной яиц часто приводится в следующей альтернативной форме: одно яйцо остается, когда яйца из-

[1] Профессор Бертон (Professor Burton, 1930–2016), почетный профессор математики в Университете Нью-Гемпшира, был моим коллегой и другом на протяжении десятилетий. Мы провели вместе немало часов в течение многих лет, обсуждая проблемы написания статей по истории математики, и мне очень приятно как воспроизвести эти две проблемы из его книги, так и рекомендовать *Elementary Number Theory* (McGrawHill, в многочисленных редакциях) всем, кто любит математику.

влекаются из корзины по 2, 3, 4, 5 или 6 одновременно; но яиц не осталось, если их удалить по 7 за раз. Найдите первые три числа количества яиц, которые могут быть в корзине.

Задача 6. Вот сложный вопрос, который связывает математику и некоторую интересную «физику» рисования прямой линии в бесконечной плоскости. Каждая из бесконечности точек на плоскости, имеющих целочисленные координаты, называется *точкой решетки* (lattice point). Например, (0, 0), (–3, 2) и (91, 674) являются точками решетки. Точка $(\pi, \sqrt{2})$ не является точкой решетки. Докажите, что бесконечно длинная прямая линия, проведенная случайным образом, проходит ровно через нулевую точку решетки, ровно через одну-другую точку решетки или через бесконечное количество точек решетки. (Невозможно нарисовать прямую линию, которая точно проходит через любое конечное число точек решетки, кроме 0 или 1.) Математика средней школы – это все, что вам потребуется (и не так уж много).

Задача 7. И наконец, чтобы завершить это предисловие, приведу физический вызов, на который можно ответить, не написав ни одного уравнения. Представьте, что вы стоите на поверхности Луны, вытянув руку прямо от вашего тела ладонью вверх. В вашей ладони мяч для гольфа. Быстрым движением запястья вы отправляете мяч вверх с некоторой начальной скоростью. Мяч поднимается, все время замедляясь (из-за силы тяжести), и через некоторое время t_u достигает некоторой максимальной высоты. Затем он начинает опускаться с постоянно увеличивающейся скоростью (из-за силы тяжести) и в конце концов снова падает в вашу руку после падения в течение дополнительного времени t_d. Поскольку на Луне нет воздуха (сопротивления), $t_u = t_d$. Теперь предположим, что вы проводите этот же эксперимент на Земле, где есть воздух (сопротивление). Объясните, почему $t_u \neq t_d$. Даже так, объясните, почему $t_u < t_d$. Вам не нужно знать какую-либо подробную физику аэродинамического сопротивления (о ее зависимости, например, от мгновенной скорости мяча). *Подсказка*: подумайте о сохранении энергии, и почему именно на Луне?

Позвольте мне завершить это предисловие словами Ричарда Фейнмана из стихотворения, составленного им (в заданном эссе по самоанализу) для занятий по философии, которые он посещал, когда в конце 1930-х гг. учился в Массачусетском технологическом институте:

I wonder why. I wonder why.
I wonder why I wonder.
I wonder why I wonder why
I wonder why I wonder[1]!

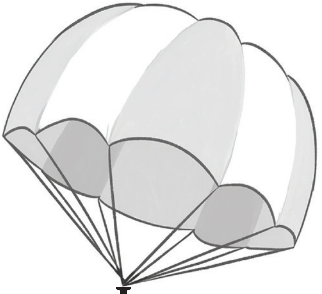
Фейнман рассказывает читателем, чем он вдохновлялся, когда писал свой полусерьезный шутливый стих, в своей книге 1985 г. *Surely You're Joking, Mr. Feynman*[2]. Но великий американский математик польского происхождения *Станислав Улам* (Stanislaw Ulam, 1909–1984) вспомнил эти слова в своей автобиографии 1976 г. *Adventures of a Mathematician* («Приключения математика») как часть довольно серьезного разговора, который он вел с Фейнманом, когда оба были в Лос-Аламосе в США. Программа атомной бомбы во время Второй мировой войны. В какой-то момент Фейнман произнес этот же стих Уламу таким образом, чтобы произвести глубокое впечатление на математика, и не без оснований. Это слова, которые удачно описывают любопытную природу разума физика-математика. Я надеюсь, что то, что вы прочтете здесь, если у меня все получится, вызовет у вас те же чувства.

Пол Дж. Нахин
Эксетер, Нью-Гэмпшир

Для обеспечения теоретических расчетов, выполненных в этой книге, использовались пакеты программного обеспечения, разработанные *The MathWorks, Inc.* из Натика, штат Массачусетс (в частности, MATLAB 8.1 Release 2013a и Symbolic Math Toolbox 5.10), работающие на ПК начиная с Windows 7. Это программное обеспечение устарело, но все команды, используемые в этой книге, работают и с более новыми версиями и, вероятно, будут продолжать работать с более новыми версиями еще несколько лет. Компания MathWorks, Inc. не гарантирует точность текста в этой книге. Использование данной книги или обсуждение MATLAB по этой книге не означает одобрения или спонсорства The MathWorks, Inc., конкретного педагогического подхода или конкретного использования MATLAB либо программного обеспечения Symbolic Math Toolbox.

[1] Мне интересно, почему. Мне интересно, почему.
Мне интересно, почему мне интересно.
Мне интересно, почему мне интересно, почему интересно.
Мне интересно, почему мне интересно.

[2] *Фейнман Р. Ф.* Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман. М.: АСТ, 2017.



I
ЗАДАЧИ

Задача 1

Военный вопрос: катапульта войны

Наша первая проблема имеет военный колорит. Представьте себе: армия вторжения столкнулась с огромной, прямо-таки очень высокой оборонительной стеной. (Представьте, что это Стена в «Игре престолов», та, что под защитой Ночного дозора.) Чтобы проломить стену, захватчики решают атаковать, запустив массивные снаряды, чтобы поразить стену настолько высоко, насколько это вообще возможно. (Действительно, очень подлое и отвратительное нападение! Но подобные атаки – не такое уж и редкое явление в древние времена. Представьте себе катапульту, бросающую деревянные бочки, полные свежего коровьего помета, и/или трупы животных и даже солдат вверх на стену, а еще лучше через нее.) Допустим, что пусковое устройство (*катапульта*, пушка, что угодно) дает каждому снаряду «дульную» скорость V, пусковая установка находится на расстоянии D от основания стены, а g – ускорение силы тяжести. Вы должны рассчитать *угол запуска* θ, максимизирующий высоту h точки удара снаряда о стену (см. рис. 31.1). Действительно, какова эта максимальная высота? Вдобавок каково время полета, от запуска до удара, снаряда, когда h максимизировали? Во всех ваших расчетах игнорируйте влияние сопротивления воздуха. Примечание: эту задачу можно решить, используя только алгебру, немного касаясь тригонометрии/геометрии и квадратного уравнения. Никаких вычислений не требуется (кроме знания того, что расстояние является интегралом скорости). Производные также не требуются.

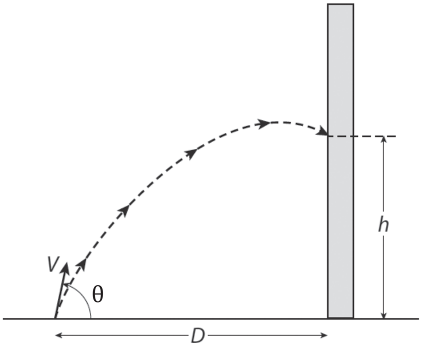


Рис. 31.1. Каким будет θ для максимальной h с известными V и D?

Задача 2

Невозможная, на первый взгляд, задача, или Шокирующая снежная головоломка

Прежде чем я расскажу вам о нашей второй задаче, которая также будет включать в себя квадратное уравнение, позвольте мне сначала рассказать вам небольшую математическую шутку, которую вы, возможно, слышали в старших классах. Медведь просыпается однажды утром и, чувствуя себя немного голодным, решает посмотреть, что у него есть на завтрак. Он прогуливается на 1 километр на юг, а затем, не видя ничего интересного, меняет направление и бежит на 1 километр на запад. Снова не найдя ничего вкусного, он решает опять попробовать новое направление и путешествует еще на 1 километр севернее. Вычеркивая очередное направление из списка возможных и думая, что он набрал лишнего жирка за зиму (а также замечая, что он теперь внезапно вернулся в свою комфортную берлогу), он ворчит про себя «черт с ним» и возвращается в постель. Итак. Какого цвета медведь?

Когда большинство студентов впервые сталкиваются с этой историей, они, как правило, шокированы фразой «Какого цвета медведь?», потому что вопрос кажется нелогичным. На самом деле это не так, и все это, я считаю, отличный способ познакомить студентов с тем, как сферическая геометрия отличается от геометрии на плоскости. Ответ, конечно, заключается в том, что медведь белый, потому что есть только одно место на сферической Земле, где могла бы находиться берлога такого медведя (Северный полюс, где водятся только белые медведи). Если медведь начал свое путешествие с Северного полюса, то любое направление оттуда – на юг, на километр на запад и на километр севернее возвращает медведя обратно на Северный полюс и в его постель.

В этой истории есть один забавный финальный поворот, который часто упускают, – Северный полюс на самом-то деле не единственная точка на Земле, где может начаться подобная медвежья прогулка. Такая прогулка могла бы состояться и вблизи южного полюса (но, конечно, там нет медведей никакого цвета вообще, поэтому «белый медведь» – это действительно правильный ответ). Чтобы посмотреть на эту другую возможность медвежьей прогулки, взгляните на рис. 32.1, на котором изображен Северный полюс (наверху) и альтернативная прогулка (внизу). Суть того, как это все работает, заключается в следующем.

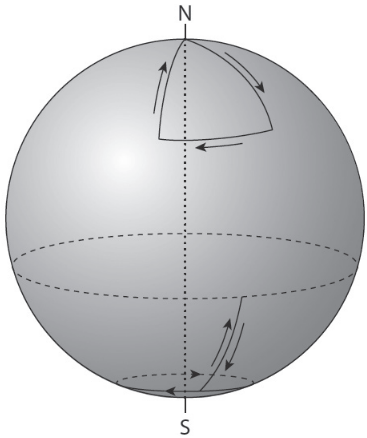


Рис. 32.1. Геометрия «прогулки»
(не в масштабе!)

Маленькая окружность чуть выше Южного полюса такова, что ее длина составляет 1 километр. Итак, начиная с любой точки на большой окружности, которая располагается одним километром выше над маленькой, если вы идете на 1 километр на юг вниз к маленькой окружности, затем 1 километр на запад вокруг маленького окружности, то это, конечно, возвращает вас к вашей начальной точке на маленькой окружности, и поэтому заключительная часть прогулки (1 километр на север) возвращает вас прямо туда, откуда вы начали. На самом деле эта идея работает, если маленькая окружность имеет длину $1/n$ километров, где n – любое положительное целое число. Достаточно кому-то просто пройти по маленькому кругу n раз. Существует целая бесконечность таких маленьких кругов, и для каждого из них есть более крупный круг в 1 километре к северу. Таким образом, есть много мест рядом с Южным полюсом, чтобы можно было совершить подобную прогулку, но только на Северном полюсе живут медведи, доступные для такого путешествия.

Хорошо, это была забавная математическая задача, но давайте оставим ее пылиться на полке ради следующей математической головоломки прямиком из физики, которую вам точно стоит увидеть. Однажды утром начинает идти снег с постоянной скоростью. Ровно в полдень снегоочиститель начинает расчищать длинную прямую дорожку. Плуг убирает снег с постоянной скоростью (некоторый фиксированный объем снега в час). Водитель, человек наблюдательный, замечает, что за второй час расчистки он проходит ровно половину расстояния, пройденного за первый час. Когда же пошел снег?

И опять, я думаю, у вас шок! Кажется, что условие задачи говорит нам очень мало, и нет никакой информации о том, сколько снега падает в час, нет информации о том, насколько широка лопасть плуга или скорость плуга, и нет информации о том, насколько далеко плуг проходит за первый час. Можно ли решить эту проблему на самом деле? Ответ – да, и вы даже можете рассчитать, когда начал падать снег, причем с точностью до секунды. Вам нужно будет выполнить немного первокурсных математических вычислений, а также решить квадратное уравнение, но это, несмотря на первоначальные проявления, четко определенная проблема. И это, я думаю, прекрасный пример того, как математические рассуждения и некоторые разумные физические предположения могут осветить путь сквозь непроглядную снежную бурю кажущейся двусмысленности.

Задача 3

Две математические задачи: алгебра и дифференциальные уравнения спешат на помощь

Теперь изменим темп. Вы не удивитесь, узнав, что математические физики – как правило, довольно хорошие математики (или, по крайней мере, они хорошие *прикладные* математики). Вот две первоклассные математические задачи (ученик старшей школы, отлично разбирающийся в интегралах, возможно, тоже сможет тут преуспеть), которые часто встречаются математическим физикам. Первая требует только знания *алгебры*, в то время как вторая требует некоторого базового вычисления.

(1) Предположим, что a, b и c – длины сторон некоторого (любого) треугольника. (Здесь важно слово треугольник.) Необходимо показать, что $ABC \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$. *Подсказка*: решающим наблюдением здесь является тот физический факт, что кратчайшее расстояние между двумя точками на плоскости является прямой линией.

(2) Большинство математических физиков не могут прожить и дня без выполнения хотя бы одного интегрирования. Вот довольно маленький интеграл, который выглядит так просто, что на первый взгляд вы можете подумать, что это почти что тривиальная задача, но немного раздумий покажут вам, что у нее есть неожиданный поворот, который обычно не рассматривается в программе для первокурсников. Для начала позвольте мне сделать два определения, просто чтобы убедиться, что вы понимаете суть. Для x, любого числа, давайте запишем

$$[x] = \text{целая часть } x$$

и

$$\{x\} = \text{дробная часть } x.$$

Например, если $x = 3{,}6173$, то $[x] = 3$ и $\{x\} = 0{,}6173$. Связь между $[x]$ и $\{x\}$ легко записать как, очевидно, $x = [x] + \{x\}$, и поэтому $\{x\} = x - [x]$. Имея все это в виду, оцените

$$\int_0^1 x\left\{\frac{1}{x}\right\}dx = ?.$$

Подсказка: существует точное выражение для ответа, с числовым значением 0,17753....

Вам будет полезно узнать, что $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}dx = \frac{\pi^2}{6}$ – это результат великого швейцарского математического физика *Леонарда Эйлера* (Leonhard Euler, 1707–1783), и вывод этого результата в 1734 г. сделал его знаменитым в мире математики. Теперь, если вы чувствуете себя действительно уверенными в своих математических силах, вам стоит попробовать свои силы в следующем:

Дополнительная задача: очевидным продолжением после нашего первоначального интеграла является вычисление $\int_0^1 x^2\left\{\frac{1}{x}\right\}^2 dx$. Это приведет вас не только к $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ – сумме, которую вывел Эйлер, но и к $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ – сумме, которую Эйлер не мог рассчитать (и никто другой не был в состоянии сделать этого по сей день, кроме как оценить ее численно как 1,2020569...). Общая сумма

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n}$ с $n > 1$ записывается математиками как $\zeta(n)$ и называется дзета-функцией. Эйлер сумел вычислить *точные выражения* для $\zeta(n)$, когда n – любое четное положительное целое число, – в задаче 24 я покажу вам, как это сделать современным способом, используя математику, которую все студенты-физики, математики и инженеры проходят к концу второго года обучения в колледже, – но $\zeta(n)$ для всех нечетных положительных целых значений $n > 1$, и теперь, в течение почти трех столетий после Эйлера, полностью ставит в тупик лучших математиков мира. (При $n = 1$ еще за столетия до Эйлера было известно, что дзета-функция взрывается, то есть суммируется до бесконечности.) Итак, когда вы оцените $\int_0^1 x^2\left\{\frac{1}{x}\right\}^2 dx$, оставьте свой ответ в значениях $\zeta(2)$ и $\zeta(3)$. *Подсказка*: числовое значение интеграла равно 0,051. *Еще одно обобщение*: $\int_0^1 x\left\{\frac{1}{x}\right\}dx$ – это $\int_0^1 x^n\left\{\frac{1}{x}\right\}dx$ для n – любого положительного целого числа. Посмотрим, сможете ли вы сделать это еще более общим интегралом (ваш ответ должен, для $n = 1$, сводиться к вашему первому результату).

Задача 4

Задача побега: увернуться от грузовика

Вот довольно маленькая задачка, которая, помимо использования квадратных уравнений еще раз, предлагает вам способ максимизировать ваши шансы выжить в опасной ситуации. Представьте, что вы бежите по центру прямой городской улицы на максимальной скорости V_y. Внезапно вы начинаете осознавать, что за вами на скорости $V_t > V_y$ едет широкофюзеляжный грузовик. Если вы не уберетесь с дороги, вас задавят! Итак, когда грузовик находится на расстоянии S позади вас, вы решаете, что вам лучше уйти с улицы, и для этого вы продолжаете бежать на полной скорости, но теперь под углом θ к вашему первоначальному пути (то есть в сторону страницы), как показано на рис. 34.1.

Каким должен быть θ, чтобы максимизировать расстояние от центра улицы? И для этого наилучшего θ на каком расстоянии вы будете от центра улицы, когда грузовик проедет мимо вас? Если это расстояние больше половины ширины грузовика, то вы выживете. (Примечание: выбор угла $\theta = 90°$ – угла, который вы можете сначала выбрать, потому что он перемещает вас прямо от центра улицы, – не является правильным, потому что хотя $\theta < 90°$ и не перемещает вас прямо от центра улицы, а перемещает вас немного в сторону, но он также заставляет вас двигаться в направлении прямо вниз по улице и от грузовика.) Теперь, в частности, если вы бежите со скоростью 15 миль в час (вы довольно хороший бегун!), а грузовик движется со скоростью 60 миль в час, и вы начинаете свою попытку сбежать, когда грузовик (который имеет ширину 8 футов) находится в 75 футах позади вас. Вы выживете? Поменяется ли ваш ответ, если вы бегаете со скоростью всего 4 мили в час?

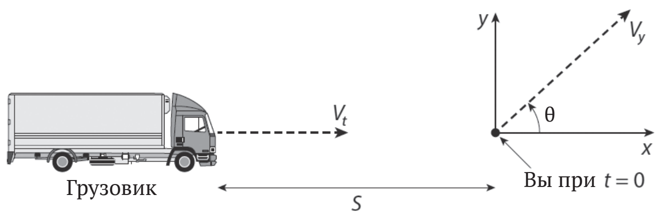


Рис. 34.1. Математическая физика спешит на помощь!

Задача 5

Снова катапульта: туда, куда не попадут даже мертвые коровы

Вот вариация первой задачи, в которой у нас была катапульта, бросающая снаряд в стену. В этой версии забудьте на время о стене. Мы начинаем с катапульты при $x = 0$, которая бросает/стреляет/швыряет снаряд с начальной скоростью V под углом θ. Существует некоторый угол запуска, при котором дальность полета снаряда максимальна (вы, вероятно, уже знаете, что угол для максимальной дальности составляет 45°, но если нет, это легко показать). Назовем этот максимальный диапазон R, который легко выразить в значениях только V и ускорения силы тяжести g. Теперь введем стену высоты H. Катапульта находится слева от стены на расстоянии D. То есть стена находится в точке $x = D$. Снаряд должен пройти через стену и приземлиться с другой стороны, и вы должны найти место, где он *не может* приземлиться. Отклонимся от темы: понятие «бросать вещи» не исчезло с развитием современного оружия. *Военно-воздушные силы* вновь встретили понятие метания, например когда они столкнулись с задачей сбрасывания *атомных бомб* и проблемой избегания взрыва своего собственного устройства. Одним из решений было *бомбардирование* с большой высоты. Когда самолет, показанный на рис. 35.1, приближался к наземной цели, он переходил в вертикальный набор высоты и разворачивался в обратном направлении. Когда самолет набирал высоту, он выпускал бомбу, которая затем перемещалась сначала вверх и вперед, а затем вниз на цель. Эта задержка детонации была достаточной для того, чтобы бомбардировщик завершил свой подъем и разворот, а затем *ушел от взрыва*. Такой акробатический маневр возможен для современных высокоэффективных реактивных истребителей-бомбардировщиков (атомные бомбы с мощностью до нескольких сотен килотонн могут быть вполне безопасно сброшены подобным способом), но не для массивных поршневых самолетов *B*-29, которые бомбили Хиросиму и Нагасаки в 1945 г. Позже в книге я буду обсуждать математическую физику альтернативного маневра эвакуации, используемого медленными и тяжелыми бомбардировщиками в атаках 1945 г. Существует множество видеороликов бросков бомб на YouTube в интернете, сделанных с помощью компьютерных программ-имитаций полета на самолете (*Digital Combat Simulator – DCS*), доступных через Amazon для ПК.

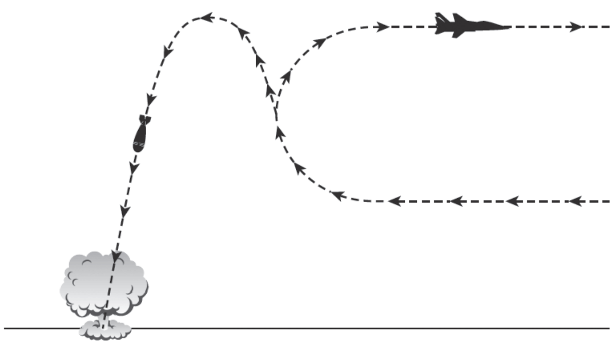


Рис. 35.1. Бомбометание и уход от атомного взрыва