УДК 530.1
ББК 22.31
К88

Кук М.

К88 Ловкость ума / пер. с анг. В. С. Яценкова. – М.: ДМК Пресс, 2020. – 400 с.: ил.

ISBN 978-5-97060-862-3

Эта книга – настоящий путеводитель по парадоксам, начиная с древнейших (Ахиллес и черепаха) и заканчивая современными (кот Шрёдингера и парадокс Тьюринга). Как утверждают авторы, парадокс – это «магия в вашей голове». Что делать, если интуиция подсказывает одно, а логика диктует другое? Остроумные примеры, собранные под одной обложкой, – отличное средство тренировки внимательности, памяти и математических навыков. Некоторые из парадоксальных предположений ошибочны, другие можно подтвердить, но в любом случае для их проверки вам понадобятся терпение и смекалка.

Издание адресовано всем, кого интересуют нестандартные математические задачи.

УДК 530.1
ББК 22.31

ISBN 978-0-2620-4346-5 (анг.)
ISBN 978-5-97060-862-3 (рус.)

Аристотелю, прародителю логики;
Ричарду Фейнману, чьи исследования спасли жизнь моего отца;
моему отцу, чья любознательность сияет ярче звезд

Содержание

Об авторе

Мэтт Кук – доктор философии, экономист, автор бестселлеров и фокусник. Среди его работ – триллер «Саботаж» и книга о предпринимательском успехе «Звезда стартапа», которую он написал в Стэнфордском университете. Пройдя обучение искусству фокусов во всемирно известной школе Magic Castle, он выступает по всему миру и любит увлекательные дискуссии и лекции в сопровождении фокусов. Он был одним из основателей организации «Здравый смысл США», первой организации по поддержке прозрачности данных и информации. Он был удостоен награды президента Джорджа Буша за поддержку военных. Мэтт Кук – опытный пианист и композитор, исполнительный продюсер фильмов и обладатель докторской степени в Университете Пенсильвании.

О соавторах

Николас Дж. Лаурита (*автор главы о классической физике*) родился в Оушенсайде, штат Нью-Йорк, и вырос в Лейкленде, штат Флорида. Он получил степень бакалавра в области прикладной физики в Университете Южной Флориды по президентскому гранту и получил диплом с отличием. Проводил исследования в аспирантуре по физике в Университете Джона Хопкинса, где занимался изучением низкоэнергетической электродинамики квантовых магнитов. Будучи аспирантом, заслужил стипендию Оуэна Шоларса, получил премию Роуленда за инновации и выдающиеся достижения в области преподавания и был удостоен двухкратной Национальной награды за достижения молодых ученых. В 2017 году докторр Лаурита поступил в Институт квантовой информации и материи (IQIM) при Калифорнийском технологическом институте в качестве получателя престижной стипендии IQIM. Его исследования по-прежнему сосредоточены на использовании света для изучения электродинамики квантовой материи. Он опубликовал множество статей в авторитетных рецензируемых журналах и выступал на выдающихся конференциях по всему миру. В настоящее время проживает в Лос-Анджелесе со своей женой Николь и собакой Пеппер.

Эйдан Чатвин-Девис (*автор главы о специальной теории относительности, соавтор главы о квантовой механике*) – канадско-французский физик-теоретик. Он получил степень бакалавра и магистра по прикладной математике в Университете Ватерлоо, а также степень доктора физики в Калифорнийском технологическом институте в 2018 году. Его научные интересы находятся на пересечении гравитации и квантовой информации, что дает ему возможность исследовать проблемы в таких разных областях, как космология, голография, возникновение пространства-времени и физика черных дыр. В настоящее время он является докторантом в Институте теоретической физики им. К. Ю. Лёвена в Бельгии. Помимо физики, любит играть на кларнете, учиться говорить и читать по-японски, а также ходить в походы по пустыне.

Майкл Кофлин (*соавтор главы о квантовой механике*) – в 2012 году с отличием окончил колледж Карлтон в Нортфилде, штат Миннесота, получив двойную степень по физике и математике. Он удостоился престижной стипендии Черчилля для обучения в Кембриджском университете, получив степень магистра астрономии в 2013 году. В сентябре 2016 года доктор Кофлин получил докторскую степень по физике в Гарвардском университете, работая с профессором Кристофером Стаббсом, и защитил диссертацию под названием «Гравитационно-волновая астрономия в эпоху LSST». В настоящее время он является получателем гранта им. Дэвида и Эллен Ли в области физики, математики и астрономии в Калифорнийском технологическом институте. В течение почти десятилетия он был членом научного коллектива LIGO, а в последнее время принимал участие в проектах телескопических наблюдений, таких как Большой синоптический обзорный телескоп (LSST), проект исследования неба Zwicky Transient Facility (ZTF), панорамный обзорный телескоп и система быстрого реагирования (Pan-STARRS), система оповещения о столкновении Земли с астероидами (ATLAS), и работает на стыке гравитационно-волновой теории и физики времени. Является соавтором более ста публикаций, в том числе более двадцати – в качестве ведущего или второго автора. Помимо занятий наукой, танцует в ансамбле бальных танцев Калтеха и работает волонтером на научных вечерах в местных начальных школах вместе с командой LIGO по образованию и работе с общественностью.

Грант Сандерсон (*популяризатор науки*) является создателем популярного канала YouTube 3blue1brown, у которого более 1 млн подписчиков и 45 млн просмотров. Цель канала – привлечь больше поклонников математики. Видеоролики охватывают различные темы по математике, начиная с материалов, ориентированных на школьников, таких как серии по исчислению и линейной алгебре, и заканчивая темами, выходящими за рамки стандартных учебных программ. Канал также содержит материалы по смежным областям, таким как нейронные сети, криптовалюта и квантовая физика. Сандерсон изучал математику и информатику в Стэнфордском университете. После окончания университета он занялся программированием визуальных отображений, поясняющих сложные математические идеи. В 2015 году стал лауреатом программы поиска талантов в Академии Хана и в итоге был приглашен как «специалист по многопараметрическому исчислению». Он сотрудничал с Ханом до конца 2016 года в качестве автора и создателя видео, параллельно разрабатывая материалы для канала 3blue1brown.

Благодарности

Благодаря этой книге я впервые отошел от написания любимых триллеров. Художественные книги – это чистое творчество. Романист создает персонажей и переживает приключения вместе с ними. Работа над этой книгой состояла из поиска и открытий. Я словно блуждал по огромному лабиринту, состоящему из разных частей.

Внутри лабиринта видно лишь несколько стен и углов, а его сложность можно оценить только сверху. Я благодарен всем, кто меня поддержал, когда мне было нужно посмотреть на задачу с высоты птичьего полета.

Диана Циммерман (Diana Zimmerman) и Боб Дориан (Bob Dorian), благодаря вам я сделал первые шаги по лабиринту. Как руководители подросткового клуба «Волшебный замок», вы помогли мне понять параллели между ловкостью рук и ловкостью ума.

Джим Спелдинг (Jim Spalding), вы познакомили меня с замечательными математическими парадоксами для старшеклассников. Ваша демонстрация парадокса Росса–Литтлвуда побудила меня купить охапку трубок и теннисных мячей, но, увы, ни в одном магазине страны не нашлось необходимого инвентаря.

Натаниэль Сагман (Nathaniel Sagman) и Форте Шинко (Forte Shinko), вы помогли мне понять все нюансы парадокса Банаха–Тарского. Спасибо.

Эйдан Чатвин-Дэвис (Aidan Chatwin-Davies), Майкл Кофлин (Michael Coughlin) и Николас Лаурита (Nicholas Laurita), ваша страсть к просвещению заставила вас рискнуть участием в этой книге, когда она едва выходила за рамки набросков. Грант Сандерсон (Grant Sanderson), когда вас попросили ответить на исторически сложный вопрос о математической философии, вы мгновенно отреагировали: «Когда начинать?» Спасибо каждому из вас за то, что вы поделились своими знаниями и предоставили оригинальный материал для этой книги. Наше сотрудничество было восхитительным.

Александр Диаконеску (Alexandru Diaconescu), лабиринт был бы намного длиннее без вашей помощи в наборе текста. Я бла-

годарен за вашу надежную помощь в решении проблем, и особенно за вашу дружбу.

Виктория Скурник (Victoria Skurnick), мой литературный агент, ваша мудрость изменила мой взгляд на карандаш. Теперь я лучший друг ластика. Спасибо, что помогли мне отточить искусство письма.

Джерми Мэтьюз (Jermey Matthews), большое спасибо вам и вашим коллегам из MIT Press за то, что вы увидели нечто особенное в связи между парадоксом и искусством фокусов. Для меня большая честь работать с вами.

Катя (Katja) и Николь Гислер (Nicole Gisler), мои милые швейцарские друзья, вы показали мне с высоты птичьего полета не только Альпы – из кабины самолета для лыжников на «вершине Европы», – но и лабиринты жизни.

Росс Ашкенази (Ross Askanazi), Вадим Канофьев, Фидель Эрнандес (Fidel Hernandez), Эван Миязоно (Evan Miyazono) и Джон Чжан (Jon Zhang): вы вдохновляете меня искать лабиринты и таинственные сокровища. И когда мы работаем над загадками после полуночи в местной закусочной, вы заставляете персонал заведения задуматься о том, чтобы брать плату за аренду помещения.

Члены моей семьи, ваша поддержка – величайшая ценность в моей жизни. Вы вдохновляете меня на каждом шагу. Спасибо вам от всего сердца. Моя любовь к вам является доказательством парадокса Кантора: не бывает самой большой бесконечности.

Введение

Мы слышали всякие шутки и бред,
Но верной отгадки по-прежнему нет!
Парадокс, парадокс,
самый гениальный парадокс.
А-ха-ха-ха-ха-ха-ха,
Вот так парадокс!

– Гилберт и Салливан,
оперетта «Пираты Пензанса»

Парадокс – это воистину сложный магический трюк. Цель мага – создать видимость противоречия: вытащить кролика из пустой шляпы, нарушить правила логики и физики. Однако парадокс не требует материальных предметов, таких как кролики или шляпы. Парадокс работает абстрактно, со словами, символами и понятиями. Это магия, которая обитает в вашей голове.

Большинство людей могут объяснить трюк фокусника, используя обобщения. Они могут не знать всех тонкостей фокуса, но они знакомы с понятиями обмана зрения, ловкости рук и отвлечения внимания. Парадокс достигает того же эффекта, но вы ничего не можете коснуться. Здесь нет ловкости рук – только ловкость ума.

Парадокс – это иллюзия противоречия, набор из двух или более противоречивых утверждений или рассуждений, каждое из которых имеет вид безупречной логики и аргументации. Реальность не допускает противоречий; парадокс концептуально существует лишь в сознании наблюдателя. Парадокс создает видимость нестыковок в устройстве Вселенной, но он никогда не отражает истинную несогласованность. Любой парадокс может быть решен, если правильно применить логику для устранения противоречия.

Вопрос о том, существуют ли какие-либо «реальные» парадоксы, возникает от неумения разделять парадоксы и противоречия. Иллюзия противоречия – это исключительно когнитивное явление; реальных противоречий нет. Парадоксы существуют точно так же, как существуют трюки фокусника и другие источники ментальных противоречий. Существование реального парадокса не означает существование настоящего противоречия, так же как существование реальных фокусников не означает существование настоящей магии.

Принцип непротиворечивости был впервые сформулирован Аристотелем в его «Метафизике», книга IV («Гамма»). Аристотель считал, что принцип непротиворечивости – самая жесткая аксиома во Вселенной. Согласно Аристотелю, непротиворечивость – это аксиома, которая делает возможными разум, знания и научные исследования. Данный принцип, по его словам, распространяется на все области и предметы без исключения. Это не гипотеза, которую можно вывести логически или продемонстрировать экспериментально, а скорее абсолютная и неизбежная истина, на которую опираются дедукция и наблюдение. Иными словами, это необходимая предпосылка для любой рациональной философии. Аристотель полагал, что любой мыслитель, отвергающий непротиворечивость, непременно откажется от умных мыслей, рассуждений и действий и будет обречен жить в мире постоянно ускользающей истины и ложных споров.

Аристотель был блестящим и необычайно плодовитым мыслителем, чьи познания охватывали философию, физику, геологию, психологию, биологию, медицину, искусство, лингвистику и многие другие предметы. Его учения и труды оказали глубокое влияние на цивилизацию и рациональное мышление. Среди его достижений была концепция формальной логики. Его древнегреческие предшественники действительно передали потомкам богатое интеллектуальное наследие, но логика была, пожалуй, величайшим достижением чистого разума. Аристотеля часто называют «отцом логики» и «отцом западной философии».

Эпистемология – это отрасль философии, связанная с развитием теории познания. Эпистемология отвечает на вопросы: что такое знание, что делает его достоверным и как его получить? Чтобы понять связь между нашим разумом и нашим существованием, нам важно определить и осознать понятия разума, рациональности и логики. Русско-американский философ Айн Рэнд определяет *разум* как «способность отождестлять и интегрировать материал, предоставляемый человеческими чувствами», в понятия и абстракции. Она считала разум одной из трех высших ценностей человека наряду с целью и самооценкой. Она отметила, что разум – это метод, с помощью которого мы узнаем природу мира и начинаем понимать реальность. Айн Рэнд определяет *рациональность* как следствие признания и принятия разума в качестве «единственного источника знаний, единственного судьи ценностей и единственного руководства к действию».

В своей знаменитой речи, завершающей великое произведение Айн Рэнд «Атлант расправил плечи», Джон Галт определяет логику с точки зрения ее отношения к противоречию:

> «Логика есть искусство непротиворечивого отождествления. Противоречий не существует. Атом есть то, что он есть. Ни атом, ни Вселенная не могут быть противоречием тому, чем они являются. Равным образом часть не может противоречить целому. Ни одно понятие, сформулированное человеком, не является подлинным, пока человек не сможет без противоречий включить его в общую сумму своих знаний. Прийти к противоречию значит признать ошибку в своих рассуждениях; отстаивать противоречие – значит отрицать собственный разум и изгнать себя из реальности».

Из рациональности вполне естественно следуют активное мышление и интеллектуальные потребности. *Активное мышление* влечет за собой критическую оценку идей и готовность обновлять свои убеждения – даже основные убеждения – в соответствии с логикой и разумом. *Интеллектуальные потребности* – это желание обострить ум, развить свои рациональные способности посредством целенаправленных упражнений ума. Эти добродетели держатся на любознательности, желании учиться и понимать. Любознательность также проявляет себя как дискомфорт при виде явного противоречия.

Цель этой книги – научить вас находить рациональный контекст, с помощью которого вы разрешаете кажущееся противоречие. В рассуждениях и пояснениях применяются разные виды логики. Изучая примеры парадоксов, попытайтесь классифицировать логику. Дайте ей название. Вы используете математические принципы? Формальную логику? Что это за логика? Вы уточняете, расширяете и обобщаете концепции, которые сформировали до вас? Вы создаете новые концепции? Вы ищете ясность и конкретику в неоднозначных формулировках? Вы оспариваете скрытые предположения? Постановка таких вопросов может сделать вас более эффективным учеником и мыслителем. Разрешение парадокса – это одно, а понимание *природы* решения – другое. Это значит не просто учиться и думать; это значит обучаться учению и думать о мышлении.

Давайте разберем пример того, как можно расширить процесс мышления. Возьмем два явно противоречивых утверждения: (1) Фредерик прожил двадцать один год и (2) у Фредерика было ровно пять дней рождения. Именно этот «самый гениальный парадокс» упоминается в комедийной оперетте Гилберта и Салливана «Пираты Пензанса» про мальчика по имени Фредерик, которого обещали выпустить из пиратского плена в его «двадцать первый год». Фредерик, оказывается, родился 29 февраля. Противоречие возникает из предположения, что одна и та же календарная дата достигается каждые 365 дней. Большинство людей неявно приравнивают «количество прожитых лет» к «количеству календарных дней рождения». Выводы опирались на ошибочное предположение. Существуют високосные годы. Дело закрыто. Парадокс разрешен.

Но так ли это? Мы можем копнуть глубже. Почему существуют високосные годы? Время, за которое Земля совершает один оборот вокруг Солнца, не кратно времени, необходимому Земле для полного оборота вокруг своей оси. Почему мы создаем календарь именно на основании цикла вращения Земли? Благодаря этому люди могут распределять свои действия между естественными циклами сна и бодрствовать при естественном освещении. Чтобы совершить один оборот вокруг Солнца, Земле требуется приблизительно 365,25 дня. Без поправки в виде 29 февраля високосного года календарные даты быстро перестанут соответствовать положению Земли на орбите вокруг Солнца. Со временем календарь сойдет с ума. Через 728 лет весна станет осенью, а лето станет зимой. Почему это имеет значение? Существуют очевидные бытовые причины для совпадения календаря с ожидаемыми температурами и другими сезонными изменениями. Среди них способность человека избегать голода за счет сбора урожая строго в нужное время.

Юлий Цезарь ввел високосный год более двух тысячелетий назад, в 46 г. до н. э., по совету своего астронома. Еще раньше необходимость високосного года открыли египтяне. «Самый гениальный парадокс», возможно, даже более гениален, чем думали Гилберт и Салливан, когда писали свою комедию. Бедственное положение Фредерика на самом деле связано с древнейшим сельским хозяйством и другими аспектами цивилизации, которые исторически извлекали выгоду из точного календаря. Полное разрешение парадокса требует понимания устройства календаря и исследования истории понятий «день», «сезон» и «год». Только глубоко изучив отношения между этими понятиями и их значение для человека, можно разобраться, *почему* первоначальное предположение о том, что одна и та же календарная дата обязательно достигается каждые 365 дней, является ложным.

В этой книге вы найдете именно такой анализ. Распутать противоречие – это половина задачи, а другая половина заключается в ответе на вопрос: «На чем основано решение?»

Американский логик и философ Уиллард Ван Орман Куайн разделил парадоксы на три класса: *правдивый* (veridical), *обманный* (falsidical) и *антиномический* (antinomocial). Правдивый парадокс предлагает веский аргумент, из которого следует абсурдно звучащий, но действительно правдивый результат. «Самый гениальный парадокс» является правдивым, потому что у Фредерика на самом деле было всего пять дней рождения, несмотря на его двадцать один год жизни. Обманный парадокс приводит к абсурдному результату при помощи логики, которая кажется здравой, но на самом деле является ошибочной. Например, используя запрещенное деление на ноль, можно доказать, что $1 = 0$; в данном случае неверны и доказательство, и результат, поэтому такой пример относится к обманным парадоксам. Наконец, антиномический парадокс, чаще называемый антиномией, приводит к противоречию, опираясь на разумные понятия, которые считаются стандартными и общепринятыми. Антиномии заставляют нас подвергать сомнению и пересматривать эти рамки. Одна из самых известных антиномий – парадокс лжецов, самоопровержение которого сводится к фразе: «Это предположение ложно».

Парадоксы будут широко варьироваться по сложности и степени, в которой наличие определенных математических понятий может быть полезным или необходимым. Эта книга адресована любознательным читателям с любым уровнем подготовки, которые выстраивают опыт чтения в соответствии с накопленными навыками и аппетитом к сложным задачам. Я рекомендую читателям сосредоточиться на тех частях книги, которые кажутся недосягаемыми. Как правило, если идея кажется недосягаемой, напряженные усилия делают ее понятной. Именно так происходит обучение. Если вам захочется пропустить часть главы, потому что новые знания кажутся слишком чуждыми, попробуйте еще раз просмотреть введение к текущей главе. Каждое введение написано так, чтобы служить своего рода подготовительным курсом для главы. Если вы все еще не готовы освоить материал главы, спокойно переходите к другим частям книги, которые вы находите более интересными, – это не помешает понять остальную книгу.

Книга состоит из глав, каждая из которых посвящена определенному классу парадоксов. Главы также разбиты на разделы, посвященные отдельному парадоксу, хотя иногда в одном разделе описывается множество связанных парадоксов. Каждый раздел начинается с изложения имеющегося у нас парадокса, набором взаимно исключающих утверждений и, наконец, обсуждением и решением, призванным помочь вам понять источник когнитивного противоречия. Некоторые парадоксы было трудно отнести к одному классу (главе), но для каждого из них было принято единственное решение. В конце книги вы найдете перечень обозначений.

Главы охватывают широкий спектр областей, включая математику, логику, философию, общественные науки и физику. Главы по физике были написаны Эйданом Чатвин-Дэвисом, Майклом Кофлином и Николасом Лауритой или вместе с ними. Последняя глава включает в себя эссе и стихотворение Гранта Сандерсона. Я воспользовался вкладом многочисленных рецензентов и сделал все возможное, чтобы избежать ошибок, но некоторые, возможно, проскочили через мои сети. Прошу читателей сообщать мне о любых обнаруженных ошибках. Перечень ошибок будет размещен на моем личном веб-сайте **www.visitmatt.com**.

Парадокс – это особенность повседневной жизни. Он не всегда может быть математическим или иным образом академическим по своей природе, но мы сталкиваемся с парадоксами с удивительной, если не разочаровывающей частотой, чаще всего в сфере человеческого поведения. Читая эту книгу, вы обнаружите, что трудно найти еще больший парадокс, чем жизнь сама по себе. Вы должны обладать особым любопытством. Пусть эти парадоксы доставят вам удовольствие, дорогой читатель, и покажут, как работает ваш разум.

От издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв прямо на нашем сайте www.dmkpress.com, зайдя на страницу книги, и оставить комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com, при этом напишите название книги в теме письма.

Если есть тема, в которой вы квалифицированы, и вы заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу http://dmkpress.com/authors/publish_book/ или напишите в издательство по адресу dmkpress@gmail.com.

Скачивание исходного кода примеров

Скачать файлы с дополнительной информацией для книг издательства «ДМК Пресс» можно на сайте www.dmkpress.com на странице с описанием соответствующей книги.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы удостовериться в качестве наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг – возможно, ошибку в тексте или в коде, – мы будем очень благодарны, если вы сообщите нам о ней. Сделав это, вы избавите других читателей от расстройств и поможете нам улучшить последующие версии данной книги.

Если вы найдете какие-либо ошибки в коде, пожалуйста, сообщите о них главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com, и мы исправим это в следующих тиражах.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательства «ДМК Пресс» и MIT Press очень серьезно относятся к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконно выполненной копией любой нашей книги, пожалуйста, сообщите нам адрес копии или веб-сайта, чтобы мы могли применить санкции.

Пожалуйста, свяжитесь с нами по адресу dmkpress@gmail.com со ссылкой на подозрительные материалы.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, помогающую нам предоставлять вам качественные материалы.

Глава 1

Бесконечность

> Этой точки зрения [на бесконечность], которую я считаю единственно верной, придерживаются лишь немногие. Хотя, возможно, я первый в истории занял эту позицию столь явно, со всеми ее логическими заключениями, но я точно знаю, что не стану последним!
>
> *— Георг Кантор*

Мы не можем увидеть или потрогать бесконечность. Она обитает за пределами восприятия и является чистой абстракцией. Человеку не дано ощутить бесконечность своими органами чувств. Как же тогда мы можем говорить о ней? Напомню, что разум – это процесс, с помощью которого мы объединяем конкретные, чувственные восприятия в понятия, а последние – в еще более высокие абстракции. Разум – это уникальная способность мыслить невещественными понятиями, такими как точки, планы, свобода и смелость, которые никто из людей никогда не видел, но которые мы можем определить и представить.

Бесконечность очень далека от мира вещей и поэтому так сложна для понимания. Нам гораздо проще представить большие, но конечные количества, например количество песчинок на Земле, планктона в океанах или звезд в Млечном Пути. Бесконечность выходит за рамки нашего повседневного понимания чисел и арифметики. Парадоксы в этой главе проистекают из противоречивых свойств бесконечности. Мы начнем с введения в некоторые важные понятия. Читатели, не знакомые с обозначениями, принятыми в теории множеств, могут обратиться к перечню обозначений в конце книги.

Немецкий математик Георг Кантор, в число достижений которого входит создание теории множеств, доказал нечто парадоксальное: бесконечности бывают разных размеров. На самом деле они бывают бесконечного размера. Как ни странно, некоторые бесконечности больше, чем другие, и для любой бесконечности всегда найдется бесконечность побольше.

Чтобы доказать или понять это открытие, мы должны определить надежное понятие *размера* – стандарт, по которому можно измерять количество вещей в коллекции. Концепция должна применяться как к конечным, так и к бесконечным множествам. Числовое количество хорошо подходит для конечных множеств – мы просто считаем элементы. Но концепция числового количества не может справиться с бесконечностью. Нам требуется измерительный инструмент, который обладает большей универсальностью. Нужно как-то расширить понятие размера. Для этого ввели понятие так называемой *мощности множества* (также называется *кардинальностью*, или *кардинальным числом*).

Точно так же, как линейка является осязаемым инструментом, используемым для оценки длины, биекция является инструментом, который математики используют для оценки количества элементов множества. *Биекция* – это взаимно однозначное соответствие между элементами двух множеств, то есть способ связывания каждого элемента в каждом множестве с ровно одним элементом в другом множестве, при этом ни один элемент не остается непарным. Если между двумя множествами можно установить биекцию, считается, что они имеют одинаковую мощность. Равная мощность двух множеств не означает, что каждое мыслимое соответствие между ними будет взаимно однозначным. Это просто означает, что биекция возможна. Если биекция невозможна, то множества имеют неравную мощность.

Наименьший бесконечный кардинал, именуемый *алеф-ноль* и обозначаемый как $\aleph_0$, – это число, представляющее размер множества натуральных чисел. Это множество называется *счетным*, потому что если вы начнете считать натуральные числа одно за другим, любое заданное число будет достигнуто за конечное время. Это не значит, что вы когда-нибудь перестанете считать, но каждое натуральное число – это число, которое вы в конечном итоге отсчитаете. Целые числа, натуральные числа, нечетные числа, четные числа, простые числа и рациональные числа – все они являются счетными по одной и той же причине. Они могут быть расположены в списке так, что любой заданный элемент будет достигнут или «подсчитан» за конечное время.

По определению биекция может быть задана между любыми двумя счетными бесконечными множествами, но не всегда очевидно, как организовать такую биекцию. Некоторые множества могут казаться меньше, чем другие, но на самом деле имеют одинаковую мощность. Возьмите, например, счетные числа и нечетные положительные числа. Счетные числа: {1, 2, 3, …}, нечетные числа: {1, 3, 5, …}. Нечетные числа являются подмножеством счетных чисел, тогда как эти два множества могут иметь одинаковую мощность? Мы можем показать, что это так, выстроив два списка чисел в ряд и сопоставив n-е элементы друг с другом:

$$\begin{array}{l} 1 \leftrightarrow 1 \\ 2 \leftrightarrow 3 \\ 3 \leftrightarrow 5 \\ 4 \leftrightarrow 7 \\ 5 \leftrightarrow 9 \\ \vdots \end{array}$$

Что, если бы мы хотели сопоставить целые числа со счетными числами? Это кажется труднее сделать, потому что счетные числа имеют четкую отправную точку, а целые числа бесконечно идут как в отрицательном, так и в положительном направлениях. Это нормально. Мы можем либо переставить счетные числа в список без начальной точки, либо переставить целые числа в список с начальной точкой, а затем сопоставить список счетных чисел со списком целых чисел. В качестве демонстрации давайте используем последний метод и расположим целые числа в список с начальной точкой следующим образом (целые числа слева, начиная с нуля):

$$\begin{array}{r} 0 \leftrightarrow 1 \\ -1 \leftrightarrow 2 \\ 1 \leftrightarrow 3 \\ -2 \leftrightarrow 4 \\ 2 \leftrightarrow 5 \\ \vdots \end{array}$$

Тот факт, что мы можем сопоставлять подмножества и супермножества, сам по себе парадоксален! Натуральные числа, нечетные числа, четные числа, простые числа и целые числа можно сопоставить друг с другом – или, по определению, с любым другим множеством, которое также является счетным.

Объединение любых двух счетных бесконечностей остается счетным. Чтобы убедиться в этом, представьте, что вы берете два счетных бесконечных множества и перечисляете их элементы в двух бесконечных списках A и B. Расположите элементы в каждом списке так, чтобы у каждого списка была начальная точка и он продолжался вечно. Создайте новый список C, который поочередно перечисляет объединение всех элементов. Если бы мы читали записи в списке C одну за другой, мы все равно достигли бы любой данной записи за конечное время; и мы могли бы объединить элементы в C с элементами в A или B, как было сделано ранее. Объединение A и B все еще счетно. Отсюда следует, что объединение любого конечного числа счетных множеств остается счетным.

Является ли декартово произведение n счетных множеств счетным? Декартово произведение множеств определяется как множество всех n наборов элементов, которые могут быть сформированы с использованием элементов из исходных наборов. В форме записи множеств это выглядит так:

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_\mathrm{n} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n}) \mid x_i \in X_i \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Например, колода из 52 игральных карт представляет собой декартово произведение набора мастей и набора рангов:

Полная колода = {♠, ♥, ♣, ♦} × {A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K}.

Что, если мы возьмем декартово произведение конечного числа счетных бесконечных множеств? Наше новое множество все еще будет счетным. Чтобы понять, почему, давайте начнем с декартова произведения двух счетных бесконечных множеств A и B и попытаемся найти способ счетного перечисления элементов их декартова произведения. Начнем с размещения элементов A и B в соответствующих списках перечисляемых элементов, таких что $a_i \in A$ и $b_i \in B$. Создадим двумерный массив со списком A по оси X начиная с элемента a_1 и списком B по оси Y начиная с элемента b_1. Теперь создадим список элементов из

$C = A \times B$, чей n-й элемент сформирован путем сопряжения координат n, как показано на схеме:

$$\begin{array}{c|ccccccccc}
b_5 & 11 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & \\
b_4 & 7 & & 12 & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
b_3 & 4 & & 8 & & 13 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
b_2 & 2 & & 5 & & 9 & & 14 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
b_1 & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 \\
\hline
 & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5
\end{array}$$

Таким образом, первый элемент в вашем списке C – это (a_1, b_1), второй элемент – (b_2, a_1) и т. д., так как вы продолжаете перечислять элементы, следуя диагоналям вашего массива $A \times B$. Миссия выполнена. Ваше новое множество C счетное бесконечное. Читая список C, вы достигнете любого данного элемента за конечное время, потому что в конечном итоге вы достигнете каждой диагонали за конечное время – и каждая диагональ содержит конечное число элементов. Отсюда следует, что декартово произведение любого числа счетных бесконечностей все еще счетно.

Наибольший бесконечный кардинал – это *мощность континуума*. *Континуум* – это множество вещественных чисел. Кардинальное число этого множества обозначают символом $\mathfrak{c}$ или $2^{\aleph_0}$. Используя прием диагонализации, Кантор показал, что невозможно составить полный, исчерпывающий список всех вещественных чисел. Следовательно, эта бесконечность и все большие бесконечности являются «неисчислимыми».

Чтобы понять логику Кантора, представьте, что вы пишете бесконечный список всех иррациональных чисел в двоичном виде. Предположим, что после огромных, изнурительных усилий вы считаете, что завершили список и включили в него все иррациональные числа. Пометьте каждое число в том порядке, в котором оно приведено в списке: назовите первое число n_1, второе n_2 и т. д. Теперь определите функцию $f()$, которая берет ваш упорядоченный список и выводит число, где n-й разряд противоположен n-му разряду n-го числа в вашем списке. Поскольку функция выводит иррациональное число, которое отличается от любого другого иррационального числа в вашем списке по крайней мере одним разрядом, следовательно, этого нового числа нет в списке. Первоначальный список нельзя считать полным. Двоичная версия этого доказательства распространяется на любое другое основание.

Вот пример, иллюстрирующий прием диагонализации:

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
n_1 = & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
n_2 = & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\
n_3 = & 0 & 1 & \boxed{0} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
n_4 = & 0 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\
n_5 = & 1 & 1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\
n_6 = & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
n_7 = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & \ldots \\
n_8 = & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & \ldots \\
n_9 = & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Применяя функцию $f()$ к этому списку, мы получаем вывод 101000100…, который по построению не может появиться в исходном списке, поскольку он отличается от каждого числа n_i по крайней мере i-м разрядом.

Из приема диагонализации мы узнаем, что невозможно создать взаимно однозначное соответствие или биекцию между натуральными числами и вещественными числами. Всегда найдутся вещественные числа без партнеров. Таким образом, набор вещественных чисел имеет бо́льшую мощность. Эта бесконечность действительно больше, и ее нельзя сосчитать.

Теперь вы готовы принять вызовы бесконечности. (Для более продвинутых читателей замечу: вам может быть интересно, существует ли *алеф-один* или $\aleph_1$, и если да, то почему он не следует определению $\aleph_0$. Действительно, такое число алеф существует. Значение $\aleph_1$ охватывает понятие порядковых чисел, которое вводится в главе 7. Фактически $\aleph_1$ является следующим по величине бесконечным кардиналом после $\aleph_0$. Вопрос о том, одинаковы ли $\aleph_1$ и $\mathfrak{c}$, сложен. Это предмет *гипотезы континуума*, которая утверждает, что не существует множества, мощность которого находится строго между целыми числами и вещественными числами. Было доказано, что как саму гипотезу, так и ее отрицание можно добавить в качестве аксиомы к наиболее часто используемым основам математики, не вызывая противоречий. Таким образом, гипотеза континуума формально «неразрешима». Хотя согласно гипотезе континуума $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, эти числа все еще концептуально отличаются.)

1.1. Бесконечный отель Гильберта

Следующий мысленный эксперимент был впервые представлен Дэвидом Гильбертом в лекции 1924 года. Представьте себе отель с бесконечно большим количеством комнат, пронумерованных в порядке возрастания (№ 1, № 2 и т. д.). Каждая комната в отеле занята гостем. Новый гость подходит к стойке администратора и спрашивает, есть ли свободное место. Умный администратор находит способ заселить нового гостя, не заставляя текущих гостей покинуть отель или делить комнаты: он просит каждого существующего гостя перейти в следующую комнату. То есть гость из № 1 переходит в № 2; гость из № 2 переезжает в № 3 и т. д. Ни один из текущих гостей не остался без комнаты. Мало того, первая комната теперь свободна, и туда можно заселить новичка. Удалось ли администратору найти свободную комнату в полностью забронированном отеле?

Предположение 1

Нет. Невозможно найти свободную комнату в отеле, если все комнаты заняты. Тот факт, что все комнаты заняты, подразумевает, что никакие новые гости не могут быть размещены, потому что в противном случае количество гостей превысит количество доступных мест. Уловка администратора не сработает.

Предположение 2

Да. Уловка, придуманная администратором, действительно сработает. В отеле со счетным бесконечным количеством номеров «все комнаты заняты» не обязательно означает, что «новые гости не могут быть размещены».

Ответ и пояснение

Предположение 2 является верным. Мы можем рассмотреть три множества: (1) множество гостиничных комнат, (2) множество текущих гостей и (3) множество, которое включает в себя всех текущих гостей и новичка. Каждое из этих множеств счетное и имеет одинаковую мощность алеф-ноль. Бесконечности имеют одинаковый размер.

По определению, два набора имеют одинаковую мощность в том и только в том случае, если между ними можно провести биекцию. Соответствие между комнатами и текущими гостями задано в формулировке проблемы: у каждого гостя есть ровно одна комната, и в каждой комнате ровно один гость. Когда прибывает новичок и каждый текущий гость связывается с соседней комнатой, между комнатами отеля и группой всех гостей, включая новичка, создается биекция. По-прежнему у каждого гостя есть точно одна комната, и в каждой комнате расположился точно один гость.

Процесс может быть повторен для размещения миллионов, миллиардов или триллионов новых гостей. Для большего эффекта представьте, что пришло бесконечное множество новых гостей. Можем ли мы разместить их? Действительно, мы и это можем. Все, что нужно сделать администратору, – освободить счетное количество комнат. Это можно сделать бесконечным числом способов. Один из таких способов – освободить комнаты с нечетными номерами. Администратор может попросить всех нынешних гостей встать в очередь, а затем, по одному, по порядку, переместиться в следующую доступную комнату с четным номером. У каждого текущего гостя будет комната, а новая группа гостей сможет занять комнаты с нечетными номерами.

Что, если у нас есть бесконечное количество отелей, состоящих из бесконечного количества комнат? Предыдущие рассуждения остаются в силе, потому что мы располагаем бесконечным количеством людей. Это не было бы справедливо, если бы вложенность бесконечностей сама была бесконечной, поскольку тогда число людей стало бы несчетным. Но до тех пор, пока количество потенциальных гостей счетно бесконечно, консьерж может вместить всех, несмотря на табличку с надписью «Мест нет».

Именно поэтому бесконечный отель Гильберта неизменно зарабатывает пять звезд на самых строгих рейтинговых сайтах. Не забудьте забронировать ваш визит в ближайшее время. Там всегда найдется место для вас.

Закрываем открытые множества

Прием «выталкивания» гостей в бесконечной последовательности можно использовать для создания биекции между закрытым и открытым множествами. Рассмотрим задачу биекции $X = [0, 1]$ с $Y = [0, 1)$. Первое множество закрыто; второе открыто справа. Начнем с сопоставления каждой пары эквивалентных элементов в X и Y. У нас почти однозначное соответствие, за исключением того факта, что $1 \in X$ не имеет сопряжения. Не беда. Сопоставим $1 \in X$ с $\frac{1}{2} \in Y$, «вытолкнув» предыдущее сопряжению последнего. Теперь сопоставим $\frac{1}{2} \in X$ с $\frac{1}{4} \in Y$. Продолжим, сопоставляя каждый $\frac{1}{2^n} \in X$ с $\frac{1}{2^{n+1}} \in Y$. У нас остается взаимно однозначное соответствие между заданными открытым и закрытым множествами, имеющее элементы, «вытолкнутые» вдоль бесконечной последовательности репозиций, так же, как гости в бесконечном отеле Гильберта.

Этот же прием можно использовать для «замыкания» круга, имеющего пропущенную точку на огибающей окружности. Можете ли вы придумать простой способ заполнить «отверстие», не оставляя новых пустот, просто переставив существующие точки на окружности? Вы можете сделать это следующим образом: выберите любое рациональное число d. Расстояние будет измеряться в каком-то одном направлении вращения, по часовой стрелке или против часовой стрелки, вдоль траектории окружности круга начиная с отсутствующей точки. Возьмите точку, расположенную на расстоянии d по периметру круга, и поместите ее в исходное отверстие. Возьмите точку на расстоянии $2d$ и перенесите ее во вновь образовавшееся отверстие; повторяйте это действие так, что каждая точка на расстоянии nd от исходного отверстия отобразится в точку, которая находится на расстоянии $(n - 1)d$. Поскольку d рационально, оно не имеет общего кратного с π. У вас никогда не кончатся новые точки, чтобы заполнить новые отверстия, которые у вас возникают, потому что вы никогда не попадете на одну и ту же точку дважды.

В каждом из этих двух примеров открытый конец закрывается, когда все точки бесконечного ряда выталкиваются на соседнее место, подобно тому, как гости бесконечного отеля выталкиваются в соседнюю комнату. Каждый пример описывает только один из бесчисленного множества бесконечных рядов, которые можно использовать.

1.2. Бесконечный словарь Гипервебстер

Этот мысленный эксперимент предложен Яном Стюартом из Университета Уорвика.

Предположим, что амбициозное издательство решает напечатать словарь настолько обширный, что в него входят не только каждое английское слово, но и каждое «слово», которое может быть составлено с использованием английских букв, независимо от того, действительно ли это слово присутствует в английском словаре. Поэтому в словаре найдутся как обычные слова, такие как PARADOX и SCIENCE, так и бессмысленные наборы букв наподобие XQZDL. Издательство решило включить в словарь каждое возможное слово любой мыслимой длины, даже слова, которые имеют счетную бесконечность букв. Поскольку словарь невероятно обширен, компания называет его Гипервебстер.

Гипервебстер будет содержать все произведения Шекспира и Чосера. Он будет содержать каждую когда-либо написанную книгу и все мыслимые альтернативные окончания, включая то, в котором Ромео и Джульетта живут долго и счастливо. Он будет содержать вашу полную биографию и биографию каждого из ваших предков, полную стенограмму мыслей за всю вашу жизнь, решение каждой проблемы тысячелетия, исторически точный отчет о падении Римской империи[1] и правильное объяснение происхождения Вселенной. Но и чепухи там будет предостаточно. Каждая возможная строка букв, даже бесконечной длины, будет отображаться в Гипервебстере как одно слово.

Издательство распределяет слова по алфавиту стандартным способом:

A, *AA*, *AAA*, …, *AB*, *ABA*, *ABAA*, …, *AC*, …, *AZ*, *AZA*, …
B, *BA*, *BAA*, …, *BB*, *BBA*, *BBAA*, …, *BC*, …, *BZ*, *BZA*, …
⋮
Z, *ZA*, *ZAA*,…, *ZB*, *ZBA*, *ZBAA*, …, *ZC*, …, *ZZ*, *ZZA*,…

[1] Автор опускает тот факт, что бесконечный словарь будет содержать описания не только прошлых, но и *будущих* событий, что само по себе является парадоксом, далеко выходящим за рамки этой книги. – *Прим. перев.*

Понимая, насколько большой должна получиться книга, издательство решает разделить Гипервебстер на двадцать шесть томов – по одному на каждую начальную букву алфавита. Все слова, начинающиеся с *A*, войдут в том *A*, все слова, начинающиеся с *B*, войдут в том *B*, и т. д. Чтобы избежать избыточности, издательство удаляет первую букву каждого слова в каждом томе, потому что первую букву можно извлечь из заголовка тома. Получается такое содержимое томов:

Том A: *A*, *AA*, *AAA*, …, *B*, *BA*, *BAA*, …, *C*, …, *Z*, *ZA*, …
Том B: *A*, *AA*, *AAA*, …, *B*, *BA*, *BAA*, …, *C*, …, *Z*, *ZA*, …
⋮
Том C: *A*, *AA*, *AAA*, …, *B*, *BA*, *BAA*, …, *C*, …, *Z*, *ZA*, …

Издательство в шоке понимает, что тома не только идентичны, но и каждый из них содержит весь оригинальный Гипервебстер. Пытаясь разделить словарь на двадцать шесть меньших книг, издательство фактически создало двадцать шесть копий. Попытка разобрать целое на части привела к многократному созданию целого.

Предположение 1

Последнее достижение издателя логически невозможно; это какое-то мошенничество! Нечто невозможно создать из ничего. Это можно продемонстрировать на простом примере. Представьте себе деконструкцию здания на сырье и материалы. Рассортируйте материалы по типам – болты, доски, кирпичи, бетон и т. д. Теперь попробуйте собрать из этого набора два одинаковых здания. Это невозможно. У вас нет соответствующих строительных материалов. Вы не можете получить больше, чем сумма исходных составляющих. То же самое должно быть верно для бесконечности. Достижение издателя также нарушает очевидную иерархию наборов. Гипервебстер – это «родительское» надмножество, которое содержит все «дочерние» подмножества (тома). Родитель не может родиться от своего ребенка; множество не может быть скрыто внутри его подмножества. Здравый смысл подсказывает нам, что целое не может быть скрыто в одной из его частей. Издатель явно проделал какую-то хитрую манипуляцию.