СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

АЛГЕБРА 5
- Числа, корни и степени 5
- Основы тригонометрии 11
- Логарифмы 15
- Преобразование выражений 17

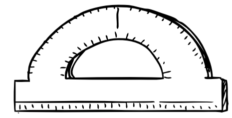
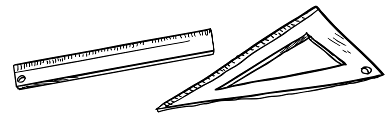
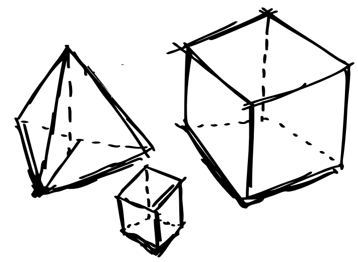
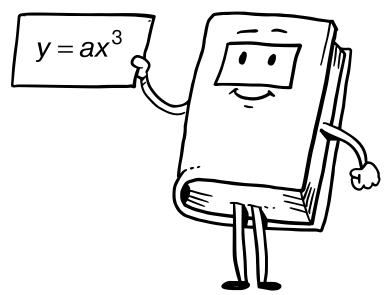
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА 24
- Уравнения 24
- Неравенства 43

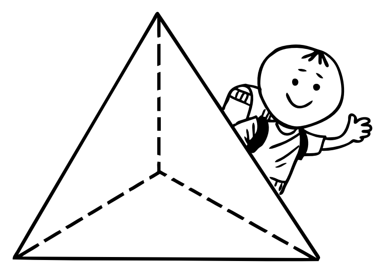
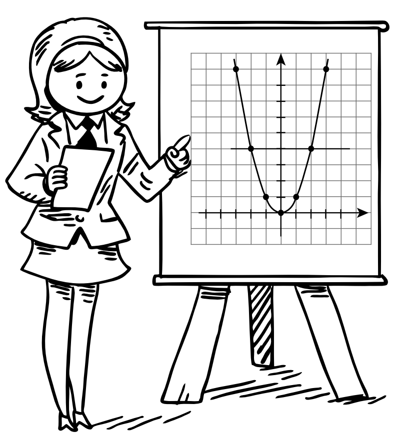
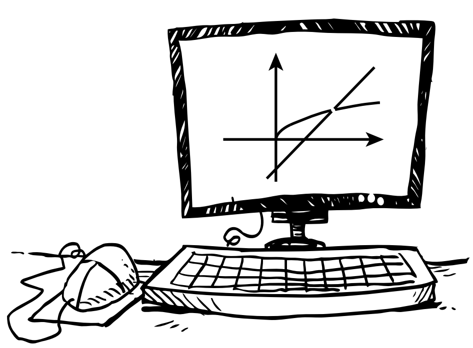
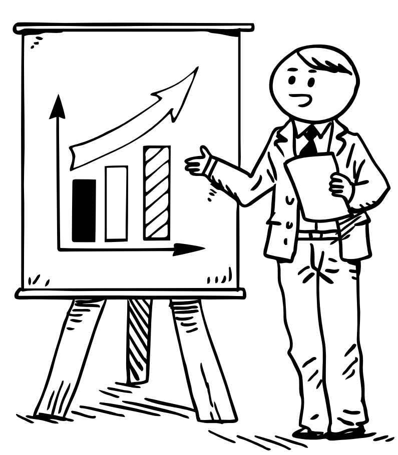
ФУНКЦИИ 57
- Определение и график функции 57
- Элементарное исследование функций 61
- Основные элементарные функции 64

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА 75
- Производная 75
- Исследование функций 79
- Первообразная и интеграл 88

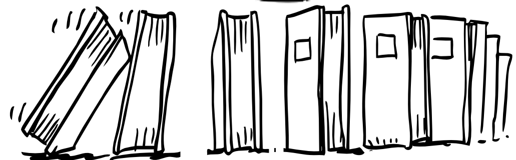
ГЕОМЕТРИЯ 94
- Планиметрия 94
- Прямые и плоскости в пространстве 102
- Многогранники 107
- Тела и поверхности вращения 115
- Измерения геометрических фигур 119
- Координаты и векторы 127

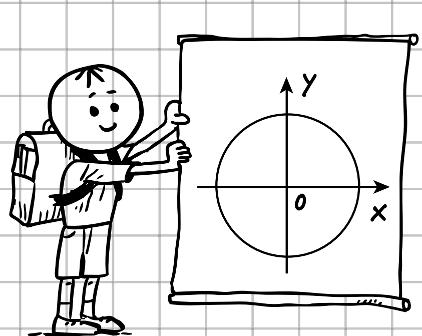
ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ 137
- Элементы комбинаторики 137
- Элементы статистики 140
- Элементы теории вероятностей 141

ВВЕДЕНИЕ



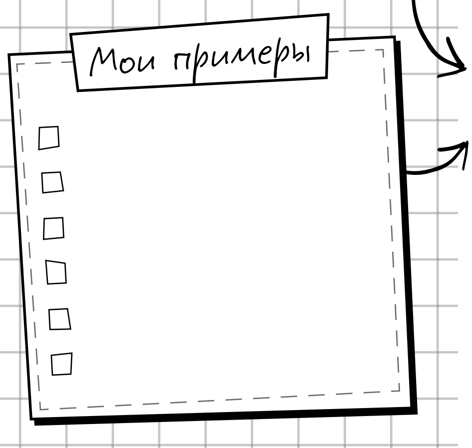


Перед вами необычный справочник, который поможет систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы.

Главное отличие данного пособия от множества других — наличие дудлов. В переводе с английского языка *doodle* — каракули, рисунки на полях тетради, оставленные школьниками. Подобные зарисовки развивают ассоциативное мышление, помогают лучше запомнить полученную информацию, вносят в процесс обучения элемент игры, что делает его увлекательным и, следовательно, более эффективным.

В книге рассмотрены традиционные разделы математики: «Алгебра», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей», которые соответствуют объёму учебного материала, включённого в единый государственный экзамен по математике.

Весь теоретический материал систематизирован, он сопровождается примерами, наглядными схемами и таблицами. Это обеспечит максимальную сконцентрированность внимания, эффективное повторение и качественную подготовку по предмету. Приведённые решения с развёрнутыми разъяснениями позволяют детально разобраться в темах школьного курса и отработать навыки выполнения различных заданий.

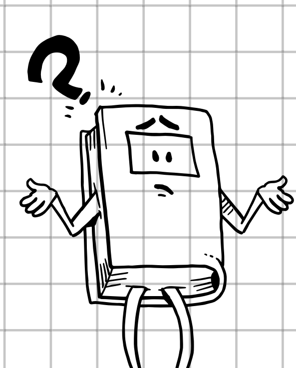


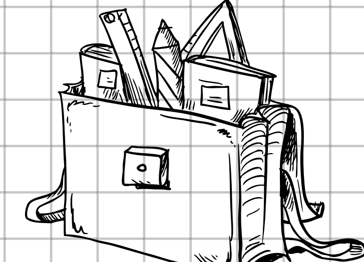
На страницах книги предусмотрены специальные места («Мои заметки», «Мои примеры»), на которых можно делать пометки, приводить свои примеры, дополнять прочитанную информацию собственными рисунками и схемами.

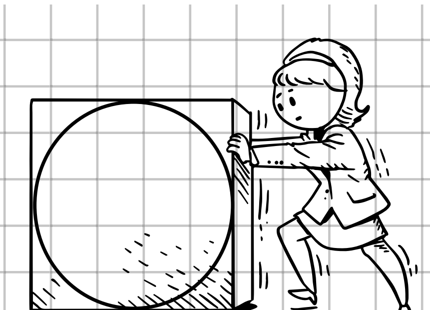
Пособие предназначено для школьников, студентов, учителей школ и преподавателей вузов, а также для всех, кто интересуется математикой.

Надеемся, книга поможет учащимся при подготовке к школьным занятиям, различным формам текущего и промежуточного контроля, выпускникам — к сдаче единого государственного экзамена.

Желаем успехов!

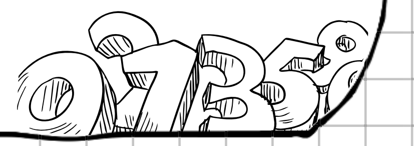






АЛГЕБРА

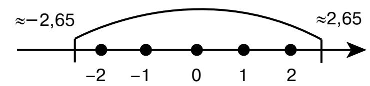
ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ



Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (–1; –2; –3; –4; –5...), и число нуль образуют множество **целых чисел**.

Множество натуральных (лат. *naturalis* — природа) чисел имеет специальное обозначение — *N*; множество целых (нем. *zahl* — число) чисел — *Z*.

Множество чисел задано формулой $x_n = n^2 - 5$, где $n \in Z$. Сколько чисел из данного множества не больше 2?



$n^2 - 5 \le 2,\quad n^2 \le 7,\quad -\sqrt{7} \le n \le \sqrt{7}.$

Ответ: 5.

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степенью числа *a* с натуральным показателем *n*, бóльшим 1, называется произведение *n* множителей, каждый из которых равен *a*.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}}$$

a — основание степени;
n — показатель степени.

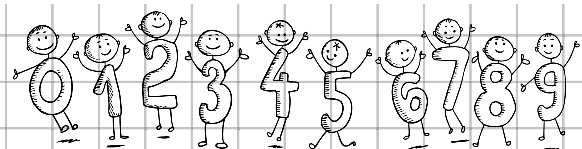


ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ

Десятки	Единицы									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ

a^n	Значения n									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049
4^n	4	16	64	256	1024	4096				
5^n	5	25	125	625	3125	15 625				
6^n	6	36	216	1296	7776	46 656				
7^n	7	49	343	2401	16 807					
8^n	8	64	512	4096	32 768					
9^n	9	81	729	6561	59 049					

Свойства степеней

$a^1 = a$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

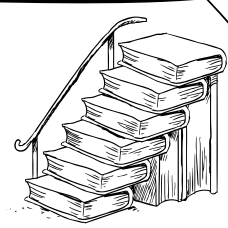
$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, где $a \neq 0$

$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$, где $b \neq 0$

n — чётное число



$a, b > 0$

$(-a)^n = b$ $\qquad$ $-a^n = -b$

✓ $(-3)^4 = 81$ $\qquad$ ✓ $-3^4 = -81$

Основание — отрицательное число

$a^n > 0$, если n — чётное число (2; 4; 6...).

✓ $(-3)^4 = 81$.

$a^n < 0$, если n — нечётное число (1; 3; 5...).

✓ $(-2)^5 = -32$.

ДРОБИ

Число вида $\dfrac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называют обыкновенной дробью.

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде десятичной дроби.

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$, где $c \neq 0$.

ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Выделение целой части из неправильной дроби:

$$\frac{17}{7}=2\frac{3}{7}$$

$$\begin{array}{r|l} -17 & 7 \\ \underline{14} & 2 \\ 3 & \end{array}$$

Перевод обыкновенной дроби в десятичную:

$$\frac{17}{8}=2{,}125;$$

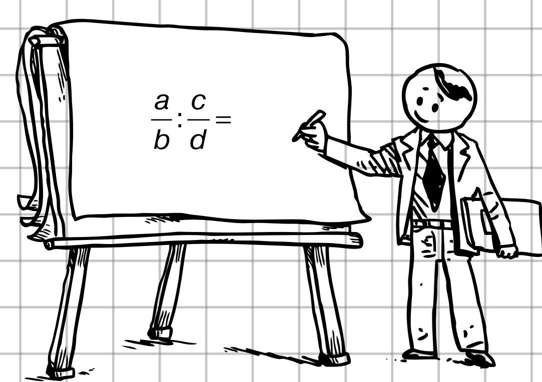
$$\frac{3}{25}=\frac{3\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{12}{100}=0{,}12;$$

$$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 125}{8\cdot 125}=\frac{375}{1000}=0{,}375.$$

$$\begin{array}{r|l} -17 & 8 \\ \underline{16} & 2{,}125 \\ -10 & \\ \underline{8} & \\ -20 & \\ \underline{16} & \\ -40 & \\ \underline{40} & \\ 0 & \end{array}$$

Перевод смешанного числа в неправильную дробь:

$$3\frac{5}{9}=\frac{3\cdot 9+5}{9}=\frac{32}{9}.$$



СЛОЖЕНИЕ (ВЫЧИТАНИЕ) СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

Привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю.

Отдельно выполнить сложение (вычитание) целых частей и отдельно — дробных частей.

- ◈ Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.
- ◈ Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

УМНОЖЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

Записать смешанные числа в виде неправильных дробей.

Найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей.

Первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем.

ДЕЛЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

Делимое умножить на число, обратное делителю.

Записать смешанные числа в виде неправильных дробей.

ДЕЙСТВИЯ С ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

СЛОЖЕНИЕ (ВЫЧИТАНИЕ) ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Уравнять в этих дробях количество знаков после запятой.

↓

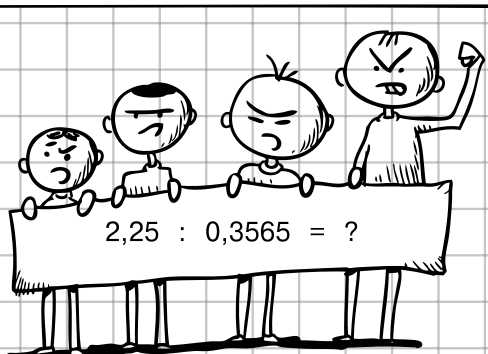
Записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой.

↓

Выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую.

↓

Поставить в ответе запятую под запятой.



УМНОЖЕНИЕ ДВУХ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Выполнить умножение, не обращая внимания на запятые.

↓

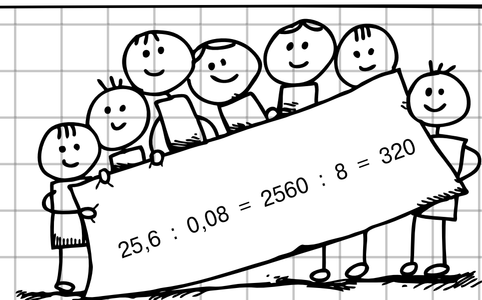
Отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

ДЕЛЕНИЕ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ НА НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО

Разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую.

↓

Поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.



ДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА НА ДЕСЯТИЧНУЮ ДРОБЬ

В делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе.

↓

Выполнить деление на натуральное число.

Мои заметки

ПРОЦЕНТЫ

Процентом (лат. *per cent* — на сотню) называется одна сотая часть величины.

$1\% = \frac{1}{100}$ $\quad 3\% = 0{,}03$ $\quad 0{,}2 = 20\%$

$100\% = 1$ $\quad (3:100)$ $\quad (0{,}2 \cdot 100)$

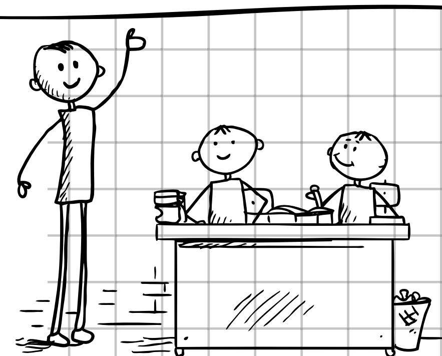
РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Целые и дробные числа (положительные и отрицательные) образуют множество **рациональных чисел**.

Множество рациональных (лат. *ratio* — деление) чисел обозначается Q.

Любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.

Любое рациональное число можно записать в виде конечной десятичной дроби либо бесконечной периодической десятичной дроби.



ДЕЙСТВИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

$-(-a) = a$

СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Сложить их модули.

Поставить перед полученным числом знак «–».

$-2 + (-7) = -(2 + 7) = -9.$

СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ЧИСЕЛ С РАЗНЫМИ ЗНАКАМИ

Из большего модуля слагаемых вычесть меньший.

Поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

$-17 + 11 = -(17 - 11) = -6.$

ВЫЧИТАНИЕ ЧИСЕЛ

К уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

$-2 - (-5) = -2 + 5 = 3;$

$8 - 9 = 8 + (-9) = -1.$

УМНОЖЕНИЕ (ДЕЛЕНИЕ) ДВУХ ЧИСЕЛ С РАЗНЫМИ ЗНАКАМИ

Перемножить (разделить) модули чисел.

Поставить перед полученным числом знак «–».

$-0{,}25 \cdot 4 = -1;$

$-7:2 = -3{,}5.$

УМНОЖЕНИЕ (ДЕЛЕНИЕ) ДВУХ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Перемножить (разделить) модули чисел.

$-7\cdot(-10)=+70=70;$

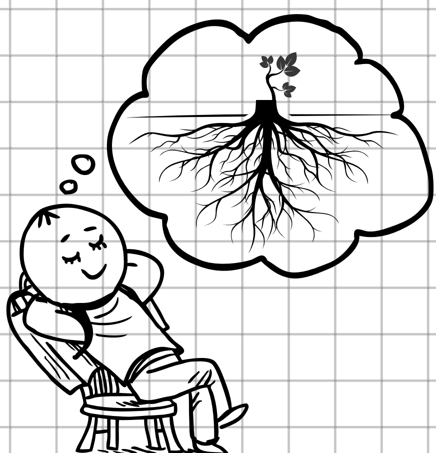
$-42:(-7)=+6=6.$

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a\neq 0 \qquad a^0=1,\ a\neq 0 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n,\ a\neq 0,\ b\neq 0$$

$$\frac{9^{-2}\cdot 36}{16^{-2}\cdot 27}=\frac{\left(3^2\right)^{-2}\cdot\left(3^2\cdot 2^2\right)}{\left(2^4\right)^{-2}\cdot 3^3}=\frac{3^{-4}\cdot 3^2\cdot 2^2}{2^{-8}\cdot 3^3}=$$

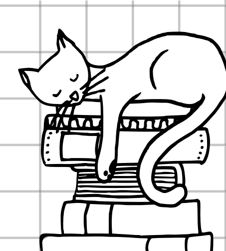
$$=\frac{3^{-2}\cdot 2^2}{3^3\cdot 2^{-8}}=\frac{2^8\cdot 2^2}{3^3\cdot 3^2}=\frac{2^{10}}{3^5}=\frac{1024}{243}.$$



КОРЕНЬ СТЕПЕНИ $n>1$ И ЕГО СВОЙСТВА

Корнем *n*-й степени $(n\in N,\ n>1)$ из действительного числа a называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a.

Если n — чётное число, то $\sqrt[n]{x^n}=|x|$.



$\sqrt[m]{a}$ не существует, если $a<0$ и m — чётное число.

а) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}=|\sqrt{3}-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-\sqrt{3},$

т. к. $\sqrt{5}>\sqrt{3};$

б) $\sqrt{7\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{66}=\sqrt{\frac{22}{3}\cdot 66}=\sqrt{22\cdot 22}=22;$

в) $\sqrt{34^2-16^2}=\sqrt{(34-16)(34+16)}=$

$=\sqrt{18\cdot 50}=\sqrt{9\cdot 2\cdot 2\cdot 25}=3\cdot 2\cdot 5=30.$

Свойства корней *n*-й степени

Для любых $a\geq 0,\ b\geq 0,\ n\geq 2,\ m\geq 2$:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k} \qquad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\ b\neq 0 \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$$

Мои примеры

- ☐
- ☐
- ☐
- ☐
- ☐
- ☐
- ☐
- ☐

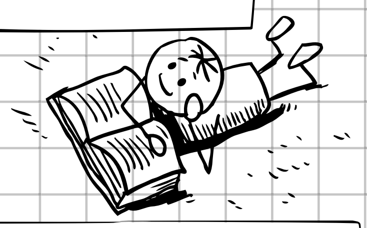
Степень с рациональным показателем и её свойства

Пусть $a>0$, $\frac{m}{n}$ — рациональное число ($n\geq 2$, $m\in Z$, $n\in N$), тогда $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

$a>1$, r — рациональное число.
Если $r>0$, то $a^r>1$.
Если $r<0$, то $0<a^r<1$.

$a>1$, r, t — рациональные числа.
Если $r>t$, то $a^r>a^t$.

$0<a<1$, r, t — рациональные числа.
Если $r>t$, то $a^r<a^t$.



Свойства степени с действительным показателем

При любом $x\in R$ и любом $a>0$ степень a^x является положительным действительным числом: $a^x>0$ при $x\in R$, $a>0$.

Все свойства степени с рациональным показателем верны для степени с действительным показателем.

$$\frac{2^{2\sqrt{3}}}{0{,}25^{2-\sqrt{3}}}=\frac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{3}}}=\frac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(2^{-2}\right)^{2-\sqrt{3}}}=$$
$$=\frac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-2\left(2-\sqrt{3}\right)}}=\frac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-4+2\sqrt{3}}}=2^{2\sqrt{3}-\left(-4+2\sqrt{3}\right)}=$$
$$=2^{2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}=2^4=16.$$

Основы тригонометрии

Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла

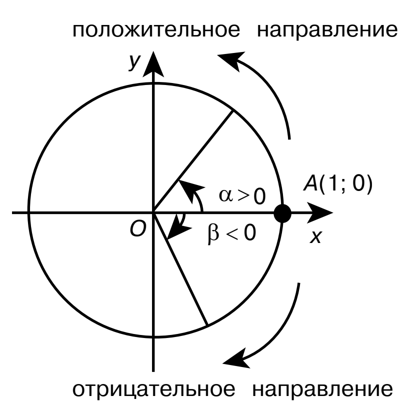
Единичной окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат xOy.

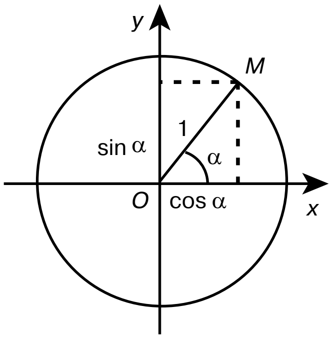
Синусом угла α ($\sin\alpha$) называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

Косинусом угла α ($\cos\alpha$) называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

Тангенсом угла α ($\mathrm{tg}\,\alpha$) называется отношение синуса угла к его косинусу.

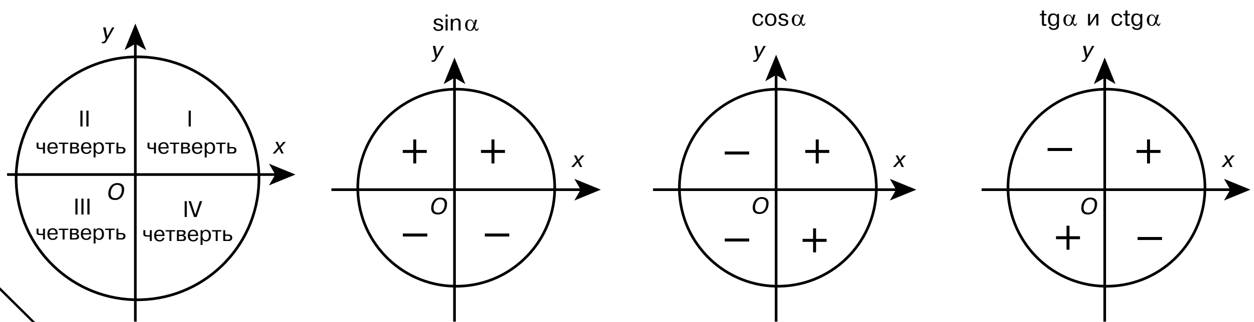
Котангенсом угла α ($\mathrm{ctg}\,\alpha$) называется отношение косинуса угла к его синусу.

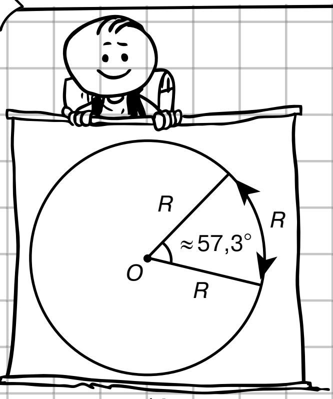




$$\sin\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ЗНАКИ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА



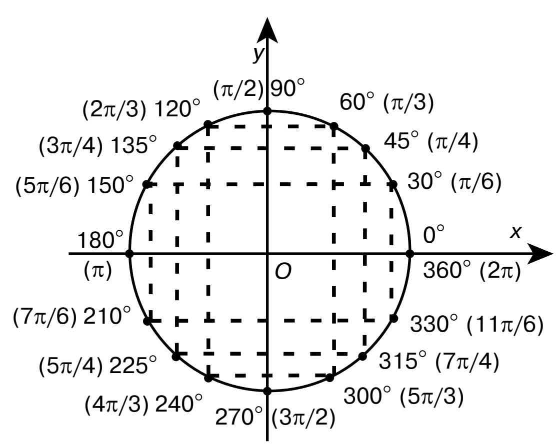


РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется **углом в один радиан**.

$1\text{ рад} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ \qquad 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\text{ рад}$

$\alpha\text{ рад} = \left(\dfrac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^\circ \qquad \alpha^\circ = \dfrac{\pi}{180}\cdot\alpha\text{ рад}$

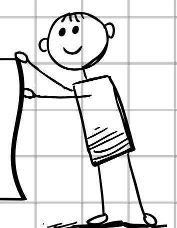


Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

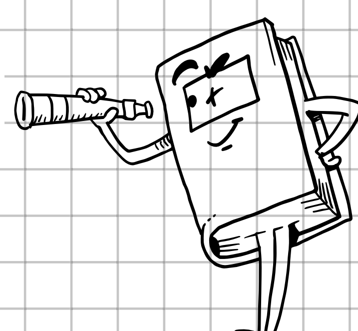
СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ЧИСЛА

α	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\qquad$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} \qquad \cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$$

Знак выражения определяется по четверти (см. с. 12).

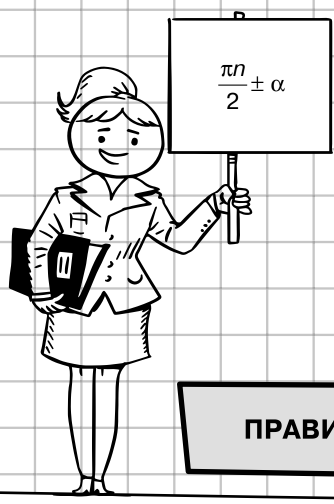
а) $2 - \sin^2 x - \cos^2 x = 2 - \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 2 - 1 = 1;$

б) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{ctg}^2 t = \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + \operatorname{ctg}^2 t =$

$= 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \dfrac{1}{\sin^2 t};$

в) $\operatorname{tg}(-x) \cdot \operatorname{ctg} x - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = -\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - \dfrac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} =$

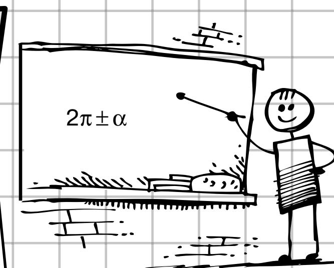
$= -1 - \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = -\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) = -\dfrac{1}{\cos^2 x}.$



ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Если в качестве аргумента тригонометрической функции выступает выражение вида $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha$, где $n \in Z$, то такое тригонометрическое выражение можно привести к более простому виду, используя формулы приведения.

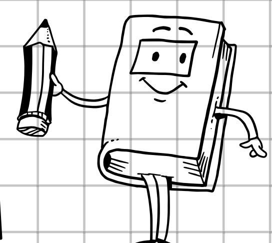
ПРАВИЛА ЗАПИСИ ФОРМУЛ ПРИВЕДЕНИЯ



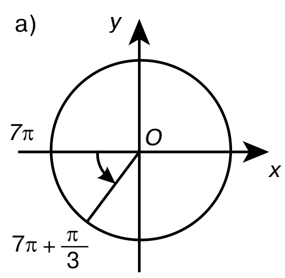
1 В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть, при условии, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

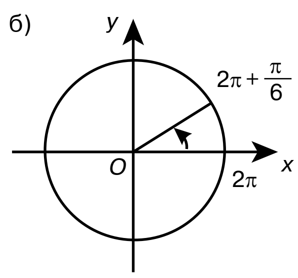
2 Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится аргумент вида $\pi \pm \alpha$ или $2\pi \pm \alpha$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить.

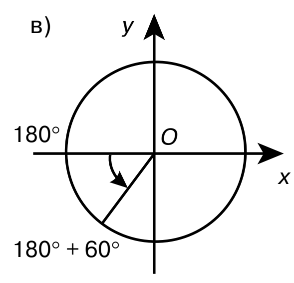
3 Если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится аргумент вида $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то наименование тригонометрической функции следует изменить (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

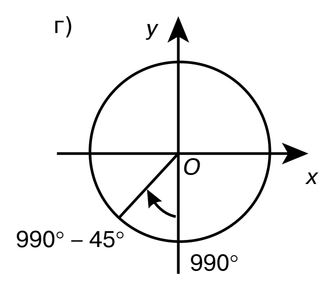


Найдите значение выражения.

а)


б)


в)


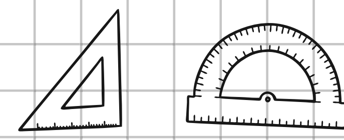
г)


а) $\sin\left(\frac{22\pi}{3}\right) = \sin\left(7\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\mathrm{tg}\left(-\frac{13\pi}{6}\right) = -\mathrm{tg}\frac{13\pi}{6} = -\mathrm{tg}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) $\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2} = -0{,}5$;

г) $\mathrm{ctg}\, 945° = \mathrm{ctg}(990° - 45°) = \mathrm{tg}\, 45° = 1$.



СИНУС, КОСИНУС И ТАНГЕНС ДВОЙНОГО УГЛА

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ $\qquad$ $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

а) $6\sin 15^\circ \cos 15^\circ = 3\cdot(2\sin 15^\circ\cos 15^\circ) =$

$= 3\cdot\sin(2\cdot 15^\circ) = 3\sin 30^\circ = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5;$

б) $\frac{6\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ} = 3\cdot\frac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ} = 3\cdot\operatorname{tg}(2\cdot 15^\circ) =$

$= 3\cdot\operatorname{tg}30^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$

ЛОГАРИФМЫ

Логарифмом положительного числа *b* по основанию *a* $(a > 0,\ a \neq 1)$ называют число c, такое, что $b = a^c$.

$$c = \log_a b$$

$\log_a a = 1$ $\qquad$ $\log_a 1 = 0$ $\qquad$ $\log_a a^c = c$ $\qquad$ $a^{\log_a b} = b$

а) $81^{\log_3 5} = \left(3^4\right)^{\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^4 = 5^4 = 625;$

б) $7^{\frac{1}{2}\log_7 16} = \left(7^{\log_7 16}\right)^{\frac{1}{2}} = (16)^{\frac{1}{2}} = \left(4^2\right)^{\frac{1}{2}} = 4;$

в) $\log_3 \log_5 125 = \log_3 3 = 1$, т. к. $\log_5 125 = 3;$

г) $7^{\log_7 3 + 1} = 7^{\log_7 3}\cdot 7^1 = 3\cdot 7 = 21.$

ЛОГАРИФМ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ЧАСТНОГО, СТЕПЕНИ

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, r — любое действительное число.

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ $\qquad$ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

$\log_a b^r = r\log_a b$ $\qquad$ $\log_{a^r} b = \frac{1}{r}\log_a b$

а) $\log_4 3\frac{1}{2} + \log_4 4\frac{4}{7} = \log_4\left(3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{4}{7}\right) =$

$= \log_4\left(\frac{7}{2}\cdot\frac{32}{7}\right) = \log_4 16 = 2;$

б) $\log_{12}\sqrt[4]{144} = \log_{12}(144)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log_{12}144 =$

$= \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2} = 0{,}5;$

в) $\log_{\sqrt{3}} 27 = \log_{(3)^{\frac{1}{2}}} 27 = 2\log_3 27 =$

$= 2\log_3 3^3 = 2\cdot 3\cdot\log_3 3 = 6\cdot 1 = 6;$

г) $\log_3 3\sqrt{3} = \log_3 3 + \log_3\sqrt{3} = 1 + \log_3 3^{\frac{1}{2}} =$

$= 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} = 1{,}5;$

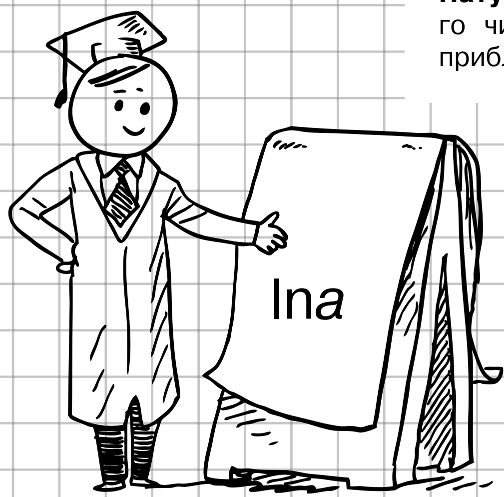
д) $\log_2 81 - 2\log_2 3 + \log_2\frac{2}{9} = \log_2 81 -$

$-\log_2 3^2 + \log_2\frac{2}{9} = \log_2\left(81 : 9\cdot\frac{2}{9}\right) = \log_2 2 = 1.$

ДЕСЯТИЧНЫЙ И НАТУРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМЫ, ЧИСЛО *e*

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10. Обозначают lg*a* вместо $\log_{10}a$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, приближённо равное 2,7. Обозначают $\ln a$ вместо $\log_e a$.

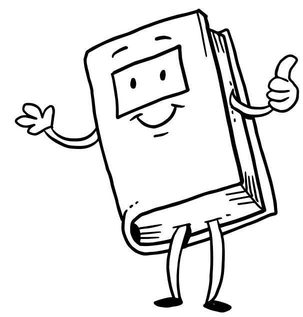


Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1 \qquad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Найдите значение выражения.



а) $\left(15^{\log_7 5}\right)^{\log_5 7} = 15^{\log_7 5 \cdot \log_5 7} = 15^1 = 15;$

б) $\dfrac{\log_7 \sqrt[4]{15}}{\log_7 15} = \log_{15} \sqrt[4]{15} = \log_{15} (15)^{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4} \log_{15} 15 = \dfrac{1}{4} \cdot 1 = \dfrac{1}{4} = 0{,}25;$

в) $8^{\frac{1}{\log_7 8}} = 8^{\log_8 7} = 7;$

г) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_2 7 \cdot \log_7 16) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{\log_7 2} \cdot \log_7 16 \right) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{\log_7 16}{\log_7 2} = \log_{\frac{1}{2}} \log_2 16 = \log_{\frac{1}{2}} 4 =$
$= \log_{2^{-1}} 4 = -1 \cdot \log_2 4 = -1 \cdot 2 = -2;$

д) $\log_3 16 \cdot \log_2 \dfrac{1}{81} = \log_3 2^4 \cdot \log_2 3^{-4} = 4 \cdot (-4) \cdot \log_3 2 \cdot \log_2 3 = -16 \cdot 1 = -16;$

е) $\log_{\sin 45^\circ} 16 = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 16 = \log_{\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^1}} 16 = \log_{2^{\frac{1}{2}-1}} 16 = \log_{2^{-\frac{1}{2}}} 16 = -2 \cdot \log_2 16 = -2 \cdot 4 = -8;$

ж) $\log_3 8 \cdot \log_{16} 27 = \log_3 2^3 \cdot \log_{2^4} 3^3 = 3 \log_3 2 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot 3 \cdot \log_2 3 = \dfrac{9}{4} \log_3 2 \cdot \log_2 3 = 2{,}25 \cdot 1 = 2{,}25;$

з) $\dfrac{\ln\sqrt{3} \cdot \log_{81} 5}{\ln 25} = \dfrac{\ln 3^{\frac{1}{2}} \cdot \log_{3^4} 5}{\ln 5^2} = \dfrac{\frac{1}{2} \ln 3 \cdot \frac{1}{4} \log_3 5}{2 \ln 5} = \dfrac{\frac{1}{8} \ln 3 \cdot \log_3 5}{2 \ln 5} = \dfrac{\frac{1}{8} \log_5 3 \cdot \log_3 5}{2} = \dfrac{\frac{1}{8}}{2} = \dfrac{1}{16} = 0{,}0625;$

и) $\dfrac{\log_{\sqrt{7}} 14}{\log_7 5} - \dfrac{1}{\log_{196} 5} = \dfrac{\log_{7^{\frac{1}{2}}} 14}{\log_7 5} - \log_5 196 = \dfrac{2 \log_7 14}{\log_7 5} - \log_5 14^2 = 2 \log_5 14 - 2 \log_5 14 = 0.$