Посвящается Бену и Норе,
вашим граням, всем вашим ребрышкам.
Люблю вас от вершины до кончиков пальцев

Содержание

От издательства

Отзывы и пожелания

Мы всегда рады отзывам наших читателей. Расскажите нам, что вы думаете об этой книге – что понравилось или, может быть, не понравилось. Отзывы важны для нас, чтобы выпускать книги, которые будут для вас максимально полезны.

Вы можете написать отзыв на нашем сайте www.dmkpress.com, зайдя на страницу книги и оставив комментарий в разделе «Отзывы и рецензии». Также можно послать письмо главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com; при этом укажите название книги в теме письма.

Если вы являетесь экспертом в какой-либо области и заинтересованы в написании новой книги, заполните форму на нашем сайте по адресу http://dmkpress.com/authors/publish_book/ или напишите в издательство по адресу dmkpress@gmail.com.

Список опечаток

Хотя мы приняли все возможные меры для того, чтобы обеспечить высокое качество наших текстов, ошибки все равно случаются. Если вы найдете ошибку в одной из наших книг, мы будем очень благодарны, если вы сообщите о ней главному редактору по адресу dmkpress@gmail.com. Сделав это, вы избавите других читателей от недопонимания и поможете нам улучшить последующие издания этой книги.

Нарушение авторских прав

Пиратство в интернете по-прежнему остается насущной проблемой. Издательства «ДМК Пресс» и Princeton очень серьезно относятся к вопросам защиты авторских прав и лицензирования. Если вы столкнетесь в интернете с незаконной публикацией какой-либо из наших книг, пожалуйста, пришлите нам ссылку на интернет-ресурс, чтобы мы могли применить санкции.

Ссылку на подозрительные материалы можно прислать по адресу электронной почты dmkpress@gmail.com.

Мы высоко ценим любую помощь по защите наших авторов, благодаря которой мы можем предоставлять вам качественные материалы.

Предисловие

Математика – это автомат по переработке кофе в теоремы.
– Альфред Реньи, часто приписывается Паулю Эрдёшу[1]

Весной моего последнего года учебы в колледже я сказал приятелю, что осенью собираюсь получать степень доктора философии по математике. Он спросил: «А что ты собираешься делать в аспирантуре: изучать очень большие числа или вычислять новые знаки числа пи?»

Я на опыте знаю, что публика в большинстве своем очень слабо представляет, что такое математика, и уж, конечно, совершенно не понимает, чем занимаются математики. Люди с удивлением узнают, что в математике по-прежнему создается что-то новое. Они думают, что математика сводится к изучению чисел или что это серия курсов, которая обрывается на математическом анализе.

Но лично меня числа никогда особенно не интересовали. Устный счет – не моя стихия. Я могу посчитать, какую часть счета за обед должен оплатить, и вычислить размер чаевых, не прибегая к помощи калькулятора, но это займет у меня столько же времени, сколько у любого другого человека. А матанализ был самым нелюбимым мной предметом в колледже.

Мне нравится находить закономерности – особенно в визуальных образах – и разбираться в запутанных логических рассуждениях. Книжные полки в моем кабинете забиты сборниками задач и головоломок, на полях которых сохранились мои детские пометки. Передвинуть три спички, чтобы образовалась новая фигура, найти в лабиринте путь, удовлетворяющий определенным условиям, разрезать заданную фигуру на части, из которых можно сложить квадрат, добавить в чертеж три отрезка, чтобы получилось девять треугольников, и другие задачки такого рода. Вот чем для меня является математика.

Из-за любви к пространственным, визуальным и логическим задачам я всегда испытывал влечение к геометрии. Но, учась в колледже, я открыл для себя очарование топологии, которую обычно определяют как изучение нежестких фигур. Сочетание красивой абстрактной теории с конкретными пространственными манипуляциями точно отвечало моим математическим вкусам. Гибкое и свободное топологическое представление о мире вселяло в меня ощущение комфорта существования. По сравнению с ним геометрия казалась такой пуританской и консервативной. Если геометрия облачена в строгий пиджак, то топология носит джинсы и футболку.

Эта книга посвящена истории и прославлению топологии. Рассказ начинается с предыстории – геометрии античной Греции и Возрождения и изучения многогранников. Затем мы перейдем к XVIII и XIX столетиям, когда ученые пытались ухватить идею формы и классифицировать объекты, не ограничиваясь жесткими рамками геометрии. И кульминационной точкой станет современная топология, получившая развитие в начале XX века.

В школе и в вузе мы изучали математику по учебникам. В учебниках математика излагается строгим, логически последовательным образом: определение, теорема, доказательство, пример. Но открывали математику не так. Много лет уходило на то, чтобы понять предмет настолько хорошо, чтобы связно изложить его в учебнике. Математика развивается то медленно и постепенно, то гигантскими скачками, бывают шаги в ложном направлении, за которыми следуют исправления и установление связей. В этой книге мы увидим увлекательный процесс математического открытия в действии – как блестящие умы размышляют, задают вопросы, уточняют, развивают и изменяют работы своих предшественников.

Я не стал просто излагать историю топологии, а взял формулу Эйлера для многогранников в качестве путеводителя. Открытая в 1750-м, формула Эйлера знаменует начало перехода от геометрии к топологии. Мы проследим, как эта формула из любопытного курьеза превратилась в глубокую и полезную теорему.

Формула Эйлера – идеальный путеводитель, потому что заводит в изумительные помещения, куда редко заглядывают посетители. Идя по ее следам, мы познакомимся с самыми интригующими областями математики – геометрией, комбинаторикой, теорией графов, теорией узлов, дифференциальной геометрией, динамическими системами и топологией. С этими красивейшими предметами типичный студент, даже специализирующийся в математике, может никогда не встретиться.

Кроме того, по пути я буду иметь удовольствие представить читателю некоторых величайших математиков всех времен: Пифагора, Евклида, Кеплера, Декарта, Эйлера, Коши, Гаусса, Римана, Пуанкаре и многих других – все они внесли важный вклад в эту область и в математику в целом.

Никаких формальных предварительных знаний для чтения этой книги не требуется. Математики, изучаемой в средней школе, – алгебры, тригонометрии, геометрии – достаточно, но большая ее часть к обсуждаемой теме не имеет отношения. Книга вполне самостоятельна, а в тех редких случаях, когда это необходимо, я буду напоминать читателю факты из этих математических дисциплин.

Но не впадайте в заблуждение – некоторые излагаемые идеи весьма сложны и абстрактны, представить их наглядно нелегко. Читатель должен быть готов воспринимать логические рассуждения и мыслить абстрактно. Чтение математического текста – совсем не то же самое, что романа. Иногда нужно остановиться и обдумать каждое предложение, еще раз прочитать рассуждение, попытаться придумать другие примеры, внимательно рассмотреть рисунки в тексте, представить картину в целом и заглянуть в предметный указатель, чтобы вспомнить точный смысл термина.

Конечно, не будет никаких домашних заданий и выпускного экзамена в конце книги. Вовсе не стыдно пропустить трудные места. Если в каком-то особенно каверзном рассуждении никак не удается разобраться, переходите к следующей теме. Это не помешает восприятию других частей книги. Можете загнуть уголок страницы и вернуться к ней позже.

Я полагаю, что аудитория этой книги отбирается сама собой. Всякий, кто *хочет* ее прочесть, *сможет* это сделать. Эта книга не для всех, но те, кто не в состоянии понять и оценить математику, наверное, не стали бы ей даже интересоваться.

У меня есть одно весьма ценное преимущество – я никогда не писал учебников. Я изо всех сил старался быть честным и строгим в описании математики, но мог позволить себе роскошь опускать докучные детали, которые больше запутывают, чем проясняют. Поэтому я мог вести изложение на более высоком уровне, сосредоточившись на идеях, интуитивном понимании и общей картине. По необходимости я вынужден был ограничиться в этой книге лишь поверхностным обсуждением многих чарующих идей. Если вы захотите узнать больше о рассматриваемых темах или восполнить недостающие детали, то обратитесь к рекомендованной в приложении В литературе.

Хотя эта книга доступна широкой аудитории, я писал ее также для математиков. Местами она пересекается с другими книгами, но я не знаю ни одной, в которой бы содержалась вся изложенная здесь информация. В конце книги приведена обширная библиография, в т. ч. ссылки на многие оригинальные статьи. Это поможет ученым, желающим глубже покопаться в предмете.

Эта книга организована следующим образом. В главах 2, 3, 4, 5 и 6 описывается теория многогранников, существовавшая до Эйлера. В основном речь в них идет о самом знаменитом классе – правильных многогранниках. В главах 7, 9, 10, 12 и 15 представлена формула Эйлера для многогранников и ее обобщения на другие жесткие многогранные тела. Это обсуждение событий, имевших место до середины XIX века. Главы 16, 17, 22 и 23 посвящены топологической интерпретации формулы Эйлера, развитой в конце столетия. Сюда входят обобщения на поверхности и многомерные топологические объекты.

В книге также упоминаются многочисленные приложения формулы Эйлера. В главе 8 описаны ее элементарные применения, в главах 11, 13 и 14 – применения в теории графов. В главах 18, 19, 20 и 21 речь пойдет о поверхностях, их связях с формулой Эйлера, а также о ее применениях к теории узлов, динамическим системам и геометрии.

Надеюсь, что вы испытаете такое же удовольствие от чтения этой книги, какое испытывал я, когда писал ее. Для меня весь этот проект стал гигантской головоломкой – академической «охотой за предметами». Поиск нужных кусочков и соединение их в связную историю было для меня вызовом и источником восторгов. Я люблю свою работу.

Дэйв Ричесон,
колледж Дикинсон,
6 июля 2007

Введение

Философия записана в этой огромной книге, которая постоянно открыта перед нашими глазами (я говорю о Вселенной), но чтобы её понять, надо научиться понимать язык и условные знаки, которыми она написана. Она написана на языке математики, а её буквы – треугольники, круги и другие геометрические фигуры; без них невозможно понять ни слова, без них – тщетное блуждание по темному лабиринту.

– *Галилео Галилей*[1]

Все они прошли мимо нее. Древние греки – такие светила математики, как Пифагор, Теэтет, Платон, Евклид и Архимед, одержимые многогранниками, – прошли мимо. Иоганн Кеплер, великий астроном, так восторгавшийся красотой многогранников, что положил их в основу ранней модели Солнечной системы, прошел мимо. В своем исследовании многогранников математик и философ Рене Декарт находился всего в нескольких логических шагах от ее открытия, но тоже прошел мимо. Все эти и многие другие математики не заметили связи такой простой, что ее можно объяснить любому школьнику, и вместе с тем настолько фундаментальной, что она вошла в плоть и кровь современной математики.

А великий швейцарский математик Леонард Эйлер (1707–1783) мимо не прошел. 14 ноября 1750 г. в письме к своему другу Христиану Гольдбаху (1690–1764), занимавшемуся теорией чисел, Эйлер писал: «Меня поражает, что такое общее свойство стереометрии (геометрии пространственных тел) до сих пор, насколько мне известно, никем не было замечено»[2]. В этом письме Эйлер описал свое наблюдение, а годом позже представил доказательство. Наблюдение настолько фундаментальное и важное, что теперь оно называется *формулой Эйлера для многогранников*.

Многогранником называется трехмерный объект наподобие изображенных на рис. I.1. Он состоит из многоугольных *граней*. Каждая пара соседних граней имеет общий прямолинейный отрезок, называемый ребром, а соседние ребра пересекаются в угловой точке, называемой *вершиной*. Эйлер заметил, что количества вершин, ребер и граней (V, E, F) всегда связаны простым и элегантным арифметическим соотношением:

$$V - E + F = 2.$$

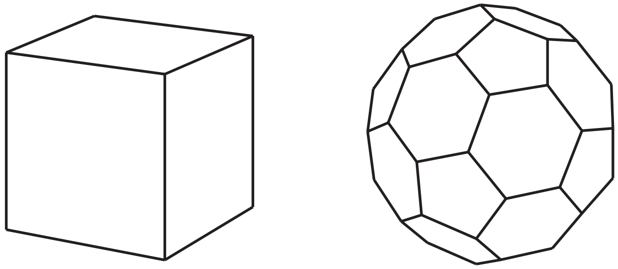

Рис. I.1. Куб и футбольный мяч (усеченный икосаэдр) удовлетворяют формуле Эйлера

Самым известным многогранником, наверное, является куб. Нетрудно посчитать, что у него шесть граней: по одному квадрату сверху и снизу и четыре по бокам. Границы этих квадратов – ребра куба. Всего их насчитывается двенадцать: по четыре сверху и снизу и четыре вертикальных по бокам. Четыре верхних и четыре нижних угла дают нам восемь вершин. Таким образом, для куба имеем $V = 8$, $E = 12$, $F = 6$ и, конечно же,

$$8 - 12 + 6 = 2,$$

как и должно быть. Для многогранника на рис. I.1, напоминающего футбольный мяч, подсчет сложнее, но можно убедиться, что он имеет 32 грани (12 пятиугольных и 20 шестиугольных), 90 ребер и 60 вершин. И снова

$$60 - 90 + 32 = 2.$$

Но открытие Эйлера – только начало истории. Помимо работы по многогранникам, Эйлер создал новую дисциплину *analysis situs*, которая сегодня известна под названием топологии. Геометрия изучает жесткие объекты. Геометров интересует измерение таких величин, как площади, углы, объемы и длины. Топология, получившая популярное прозвище «резиновая геометрия», изучает эластичные фигуры. Объект внимания тополога не обязан быть жесткой геометрической фигурой. Топологов интересует связность, наличие дырок и скрученность. Когда клоун скручивает из надувного шара собаку, его топология не меняется, но геометрические тела совершенно различны. Но когда ребенок протыкает воздушный шарик карандашом, он оставляет в нем зияющую дыру, в результате чего топология изменяется. На рис. I.2 мы видим три примера топологических поверхностей: сфера, тор в виде бублика и перекрученная лента Мёбиуса.

Исследователи, занимавшиеся новой наукой, топологией, были очарованы формулой Эйлера и попытались применить ее к топологическим поверхностям. Возник очевидный вопрос: где расположены вершины, ребра и грани на топологической поверхности? Топологи отбросили жесткие ограничения, налагаемые геометрами, и допустили искривленные грани и ребра. На рис. I.3 мы видим разбиение сферы на «прямоугольные» и «треугольные» области. Это разбиение образовано в результате проведения 12 меридианов, сходящихся в полюсах, и 7 параллелей. На этом изображении глобуса имеется 72 криволинейные прямоугольные грани и 24 криволинейные треугольные грани (последние расположены вблизи полюсов) – всего 96 граней. Имеется также 180 ребер и 86 вершин. Стало быть, как и в случае многогранников,

$$V - E + F = 86 - 180 + 96 = 2.$$

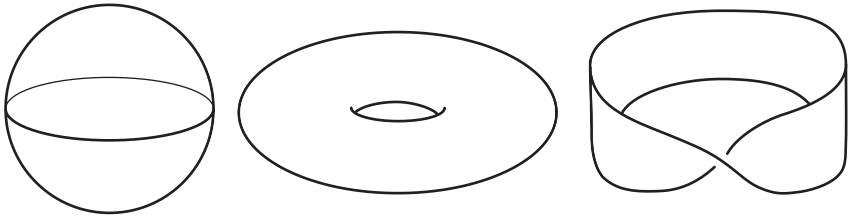

Рис. I.2. Топологические поверхности: сфера, тор и лента Мёбиуса

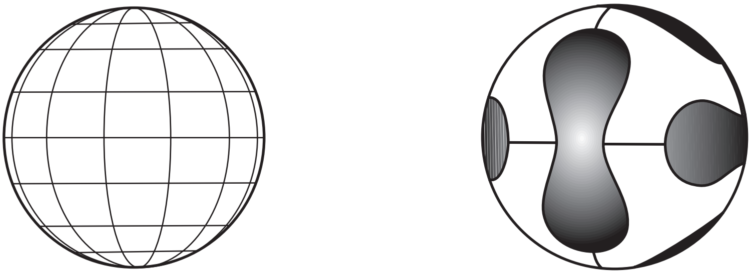

Рис. I.3. Два разбиения сферы

Мяч, которым играли на Всемирном чемпионате по футболу в 2006 году, состоял из шести четырехсторонних кусков в форме песочных часов и восьми бесформенных шестиугольных кусков (рис. I.3). Он также удовлетворяет формуле Эйлера ($V = 24$, $E = 36$, $F = 14$).

Возникает искушение сделать вывод, что формула Эйлера справедлива для любой топологической поверхности. Однако если разбить тор на прямоугольные грани, как на рис. I.4, то получится неожиданный результат. Разбиение образовано проведением двух окружностей вокруг центрального отверстия тора и четырех окружностей на самой кольцевой трубке. Оно состоит из 8 четырехсторонних граней, 16 ребер и 8 вершин. При этом

$$V - E + F = 8 - 16 + 8 = 0,$$

а не 2, как предсказывает формула Эйлера.

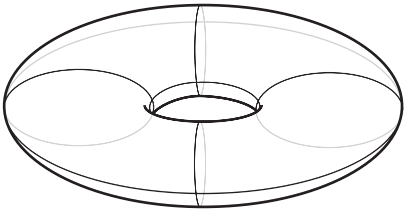

Рис. I.4. Разбиение тора

И если бы мы построили другое разбиение тора, то обнаружили бы, что эта знакопеременная сумма по-прежнему равна нулю. Поэтому для тора мы получаем *новую* формулу Эйлера:

$$V - E + F = 0.$$

Можно доказать, что у любой топологической поверхности есть «своя» формула Эйлера. Не важно, на сколько граней разбить поверхность сферы – на 6 или на 1600, все равно формула Эйлера всегда будет давать 2. И точно так же, если применить формулу Эйлера к любому разбиению тора, получится 0. Это число может служить характеристикой поверхности, подобно тому, как количество колес характеризует транспортные средства. У любой легковой машины четыре колеса, у тягача с прицепом восемнадцать, а у мотоцикла два колеса. Если у транспортного средства не четыре колеса, то это не легковая машина, а если у него не два колеса, то это не мотоцикл. Аналогично, если $V - E + F$ не равно 0, то поверхность топологически не эквивалентна тору.

Величина $V - E + F$ внутренне связана с формой поверхности. Топологи говорят, что она является *инвариантом* поверхности. Из-за этого свойства инвариантности величина $V - E + F$ называется *эйлеровой характеристикой* поверхности. Эйлерова характеристика сферы равна 2, а тора – 0.

В данный момент тот факт, что у каждой поверхности своя эйлерова характеристика, может показаться не более чем математическим курьезом, над которым забавно поразмышлять, держа в руках футбольный мяч или глядя на геодезический купол – мол, «круто же». Но, конечно же, это далеко не так. Как мы увидим, эйлерова характеристика – незаменимый инструмент при изучении многогранников, не говоря уже о топологии, геометрии, теории графов и динамических системах, и у нее есть весьма элегантные и неожиданные применения.

Математический узел, показанный на рис. I.5, похож на спутанную веревочную петлю. Два узла считаются эквивалентными, если один можно деформировать в другой, не разрезая и не склеивая заново веревку. При некоторой изобретательности мы можем использовать эйлерову характеристику также для различения узлов и доказать, что два узла на рис. I.5 не эквивалентны.

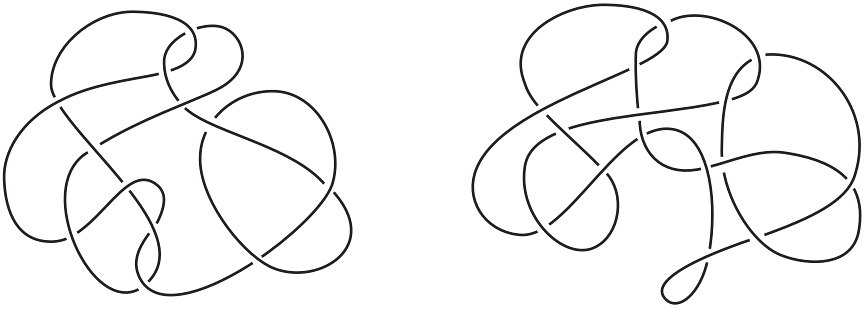

Рис. I.5. Это один и тот же узел?

На рис. I.6 показана карта направления ветров на поверхности Земли. Рядом с побережьем Чили мы видим точку, где ветра нет. Она расположена в центре тайфуна, вращающегося по часовой стрелке. Можно доказать, что на поверхности Земли всегда существует по крайней мере одна точка, в которой нет ветра. И это вытекает не из знания метеорологии, а из чисто топологических соображений. Существование такой точки затишья следует из факта, который математики называют теоремой о причесывании ежа[i]. Неформально говоря, невозможно причесать свернувшегося клубком ежа, так чтобы у него не торчала ни одна иголка. В главе 19 мы увидим, как эйлерова характеристика позволяет доказать это смелое утверждение.

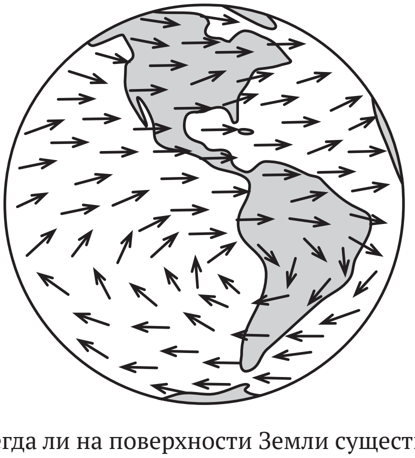

Рис. I.6. Всегда ли на поверхности Земли существует точка, в которой не дует ветер?

[i] В англоязычной литературе ее называют теоремой о волосатом шаре: если представлять себе стрелки, показывающие направление ветра, как волосы на поверхности Земли, то обязательно найдется точка, в которой волосы образуют хохолок. – *Прим. перев.*

На рис. I.7 изображен многоугольник, все вершины которого находятся в узлах равномерной сетки, отстоящих друг от друга на единичное расстояние. Удивительно, но мы можем точно вычислить площадь этого многоугольника, просто подсчитав количество точек. В главе 13 мы увидим, что формула Эйлера позволяет вывести элегантную формулу, выражающую площадь многоугольника через количество точек на его границе (B) и количество точек внутри (I):

$$\text{Площадь} = I + B/2 - 1.$$

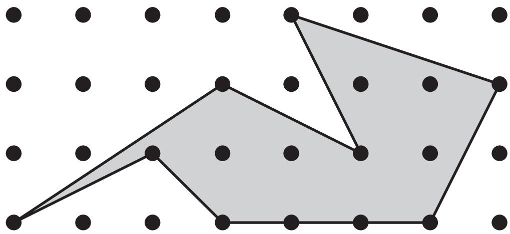

Рис. I.7. Можно ли определить площадь закрашенного многоугольника путем подсчета точек?

Согласно этой формуле, площадь показанного многоугольника равна $5 + 10/2 - 1 = 9$.

Существует старая и интересная задача о том, сколько цветов необходимо для раскрашивания карты таким образом, что любые два области, имеющие общую границу, раскрашены в разные цвета. Возьмите чистую карту США и попробуйте раскрасить ее, используя как можно меньше цветных карандашей. Очень скоро вы обнаружите, что для большей части карты достаточно всего трех карандашей, но, чтобы завершить краску, понадобится четвертый цвет. Например, штат Невада окружен нечетным числом штатов, поэтому для их раскраски нужно три карандаша, но тогда для самой Невады потребуется четвертый карандаш (рис. I.8). При умном подходе можно обойтись без пятого карандаша – четырех цветов достаточно для раскраски всей карты США. Уже давно предполагалось, что любую карту можно раскрасить в четыре цвета или меньше. Эта знаменитая гипотеза, которая никак не поддавалась усилиям математиков, получила название проблемы четырех красок. В главе 14 мы подробно расскажем эту увлекательную историю; в 1976 году она закончилась вызвавшим много споров доказательством, в котором эйлерова характеристика сыграла ключевую роль.

Графит и алмаз – два материала, состоящие только из атомов углерода. В 1985 года трое ученых – Роберт Кёрл, Ричард Смолли и Харольд Крото – шокировали научное сообщество, открыв новый класс молекул, состоящих только из углерода. Они назвали их *фуллеренами* в честь архитектора Бакминстера Фуллера, изобретателя геодезического купола (рис. I.9). Такое название было выбрано, потому что фуллерены представляют собой большие молекулы в форме многогранников, напоминающих эту конструкцию. За открытие фуллеренов все трое были удостоены Нобелевской премии по химии за 1996 год. В фуллерене каждый атом углерода связан ровно с тремя соседями, так что образуются пятиугольные и шестиугольные кольца атомов. Первоначально Кёрл, Смолли и Крото обнаружили фуллерены, составленные из 60 и 70 атомов углерода, но затем были открыты и другие. Самую красивую молекулу фуллерена, C_{60}, имеющую форму футбольного мяча, она назвали бакминстерфуллереном. Поразительно, что, ничего не зная о химии, а располагая только формулой Эйлера, мы можем утверждать, что некоторые конфигурации атомов углерода не могут встречаться в фуллеренах. Например, фуллерен любого размера должен иметь ровно 12 пятиугольных углеродных колец, хотя количество шестиугольных колец может разниться.

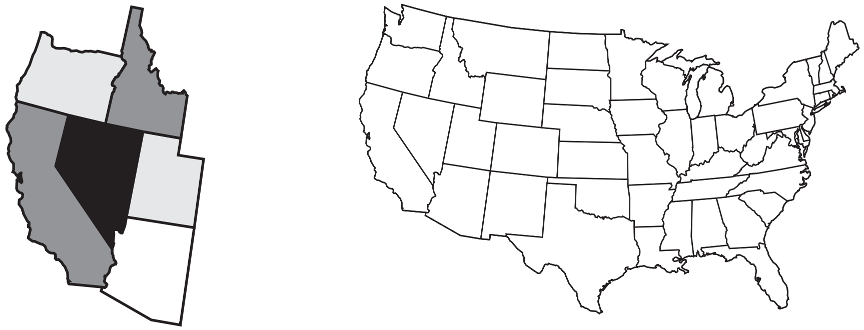

Рис. I.8. Можно ли раскрасить карту США в четыре цвета?

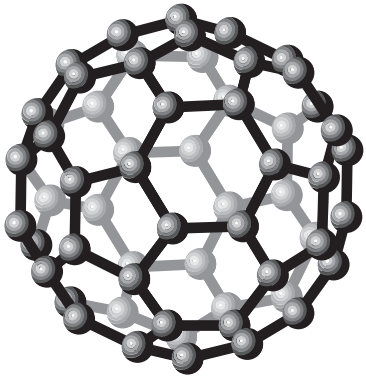

Рис. I.9. Молекула бакминстерфуллерена C_{60}

Тысячи лет люди рисуют красивые и манящие правильные многогранники, гранями которых являются правильные многоугольники (рис. I.10). Греки знали пять таких тел, Платон включил их в свою атомистическую теорию, а Кеплер положил их в основу ранней модели Солнечной системы. Тайна, окружавшая эти пять многогранников, отчасти связана с тем, что их так мало, – больше ни один многогранник не удовлетворяет строгим критериям правильности. Одно из самых элегантных применений формулы Эйлера – очень короткое доказательство этого факта.

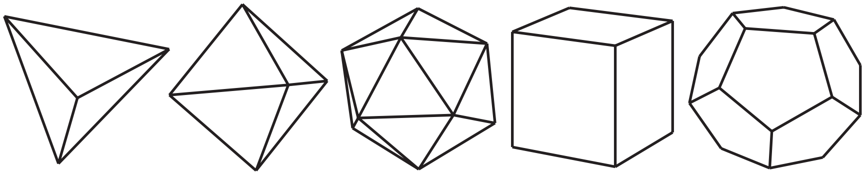

Рис. I.10. Пять правильных многогранников

Несмотря на свою важность и красоту, формула Эйлера практически неизвестна широкой публике. Ее нет в стандартном школьном курсе математики. Некоторые старшеклассники знают формулу Эйлера, но большая часть студентов, изучающих математику, встречаются с ней только в колледже.

Математическая слава – странная вещь. Некоторые теоремы хорошо известны, потому что вколочены в головы школьников: теорема Пифагора, формула корней квадратного уравнения, основная теорема математического анализа. Другие результаты оказываются на слуху, поскольку решают знаменитую задачу. Великая теорема Ферма оставалась недоказанной в течение трехсот лет, пока в 1993 году Эндрю Уайлс не удивил мир своим доказательством. Проблема четырех красок была поставлена в 1853 году, а доказана Кеннетом Аппелем и Вольфгангом Хакеном в 1976 году. Знаменитая гипотеза Пуанкаре была выдвинута в 1904 году и вошла в число семи проблем тысячелетия по версии Института математики Клэя, который счел их настолько важными, что математику, решившему любую из них, была обещана награда в размере миллиона долларов. Эта сумма была присуждена Григорию Перельману, предложившему доказательство гипотезы Пуанкаре в 2002 году. Некоторые математические факты хорошо известны в силу своего междисциплинарного характера (последовательность чисел Фибоначчи в природе) или исторической значимости (бесконечность множества простых чисел, иррациональность числа π).

Формула Эйлера должна быть известна так же хорошо, как эти великие теоремы. У нее красочная история, а в теорию внесли вклад многие величайшие математики. Это глубокая теорема, и понимание всей ее глубины только возрастает по мере развития математики.

Книга, которую вы держите в руках, – рассказ о красивой теореме Эйлера. Мы проследим ее историю и покажем, как она перебрасывает мост между многогранниками древних греков и современной топологией. Мы расскажем о многих обличьях, под которыми скрывается формула Эйлера в геометрии, топологии и динамических системах. Мы также приведем примеры теорем, доказательства которых основаны на формуле Эйлера. Мы увидим, почему эта долгое время остававшаяся незамеченной формула стала одной из самых уважаемых теорем в математике.

Глава 1

Леонард Эйлер и три его «великих» знакомца

Читайте, читайте Эйлера – он наш общий учитель.
– *Пьер-Симон Лаплас*[1]

Мы привыкли к гиперболам. Телевизионная реклама, рекламные щиты, спортивные комментаторы, популярные музыканты регулярно извергают такие эпитеты, как величайший, лучший, ярчайший, быстрейший и прочее. Эти слова давно уже утратили свое буквальное значение и используются как естественная часть продвижения товара или развлечения зрителя. Поэтому слова о том, что Леонард Эйлер был одним из самых влиятельных и плодовитых математиков, когда-либо рождавшихся на свет, могут не произвести никакого впечатления на читателя. Но мы ничего не преувеличиваем. Эйлер наряду с Архимедом (287–211 до н. э.), Исааком Ньютоном (1643–1727) и Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855) признан как один из десяти – или даже пяти – самых важных и значительных математиков в истории.

За свою 76-летнюю жизнь Эйлер написал столько математических работ, что для их печати потребовалось семьдесят четыре весьма объемистых тома, – больше, чем любой другой математик. Когда все его работы были опубликованы (а новые материалы обнаруживались в течение 79 лет после его смерти), оказалось, что он автор ошеломительных 866 трудов, включая статьи и книги по самым передовым предметам, элементарные учебники, научно-популярные работы и технические руководства. И сюда еще не включены предположительно пятнадцать томов писем и записных книжек, которые все еще готовятся к печати.

Но значимость Эйлера определяется не его плодовитостью, а глубиной основополагающих вкладов в математику. Эйлер не специализировался в какой-то одной области. Он был одним из великих универсалов, оставившим след в самых разных дисциплинах. Он опубликовал влиятельные статьи и книги по математическому анализу, теории чисел, комплексному анализу, вариационному исчислению, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей и топологии. И это не считая вклада в такие прикладные предметы, как оптика, электричество и магнетизм, механика, гидродинамика и астрономия. Ко всему прочему Эйлер обладал чертой, редкой среди больших ученых и тогда, и в наше время: он был превосходным стилистом. В отличие от своих предшественников, Эйлер писал простым и ясным языком, благодаря чему его работы равно доступны специалистам и студентам.

Рис. 1.1. Леонард Эйлер

Эйлер был мягким скромным человеком, его жизнь была сосредоточена на большой семье и работе. Он жил сначала в Швейцарии, потом в России, Пруссии и снова в России и активно переписывался со многими известными мыслителями XVIII века. Его профессиональная жизнь была связана с тремя «Великими» правителями Европы – Петром Великим, Фридрихом Великим и Екатериной Великой. Во времена правления этих монархов были созданы или воскрешены национальные академии наук их стран. Эти академии финансово поддерживали Эйлера, так что он мог заниматься чистой наукой. Взамен ожидалось лишь, что время от времени он будет применять свой научный опыт на благо государства, а его известность принесет славу нации.

Леонард Эйлер родился в швейцарском городе Базеле 15 апреля 1707 года в семье Пауля Эйлера и Маргариты Брукер Эйлер. Вскоре после этого семья переехала в близлежащий городок Рихен, где Пауль был назначен пастором местной кальвинистской церкви.

Первые уроки математики Эйлеру давал отец. Он не был математиком, но учился математике у знаменитого Якоба Бернулли (1654–1705), когда Пауль и младший брат Якоба Иоганн (1667–1748), будучи студентами Базельского университета, столовались в доме Якоба. Якоб и Иоганн Бернулли были членами семейства, которому суждено было стать одной из самых известных фамилий в математике. Больше ста лет клан Бернулли играл заметную роль в развитии математики, вклад в которую внесли по меньшей мере восемь Бернулли.

Формальное обучение Леонард начал в Базельском университете в возрасте 14 лет. В то время столь юный возраст не считался чем-то необычным для студента университета. Университет был небольшим – всего несколько сотен студентов и девятнадцать профессоров. Пауль надеялся, что сын пойдет по его стопам и станет пастором, поэтому Эйлер изучал теологию и иврит. Но его математические способности были несомненны, и очень скоро он привлек внимание друга отца Иоганна Бернулли. К тому времени Иоганн стал одним из ведущих европейских математиков.

Иоганн был заносчивым резким человеком, он всегда желал быть первым, что приводило к известным скандалам по поводу приоритета (в том числе со своим братом и сыном). Тем не менее он заметил выдающийся талант мальчика и посоветовал ему строить карьеру в математике. В своей автобиографии Эйлер писал: «Если я сталкивался с каким-то препятствием или трудностью, то мог свободно прийти к нему в субботу вечером, и он доброжелательно объяснял мне то, чего я не мог понять»[2]. Эти уроки сыграли большую роль в становлении математической техники Эйлера.

Несмотря на то что Леонард преуспевал в своих частных занятиях математикой, Пауль все еще надеялся, что его сын станет пастором. В семнадцать лет Эйлер получил степень магистра философии. Иоганн опасался, что его протеже может оказаться потерян для математики и станет приобретением Церкви, поэтому вмешался и твердо сказал Паулю, что Леонард может стать выдающимся математиком. Из-за теплых чувств, питаемых к математике, Пауль уступил. Но хотя Эйлер отказался от идеи стать пастором, он всю свою жизнь оставался набожным кальвинистом.

Свой первый независимый математический результат Эйлер получил в девятнадцать лет. За теоретическую работу по идеальному размещению мачт на судне он заслужил «похвальное упоминание» в престижном конкурсе, организованном Французской академией наук. Это достижение было бы невероятным для любого юноши его возраста, а особенно для молодого человека из Швейцарии, который никогда не видел океанского корабля. В том конкурсе Эйлер не стал победителем, что было бы примерно эквивалентно получению сегодняшней Нобелевской премии, но в последующие годы он удостаивался высшей награды двенадцать раз.

В то время, когда родился Эйлер, в тысяче миль на северо-запад от Базеля российский император Петр Великий (1672–1725) строил город Санкт-Петербург. Он был основан в 1703 году в болотистой местности недалеко от места впадения Невы в Балтийское море. Петр использовал рабский труд для возведения как самого города, так и Петропавловской крепости, занимающей стратегически выгодное положение на одном из островов в устье Невы. Он любил свой новый город, называл его «парадизом» и дал ему имя в честь своего святого покровителя. Несмотря на то что большинство русских людей, а в особенности государственных чиновников, не разделяли чувств Петра к этому холодному и сырому месту, он перенес столицу России из Москвы в Санкт-Петербург. Юный Эйлер еще не знал, что этот город станет его домом на протяжении большей части жизни.

Рис. 1.2. Российский император Петр Великий

Петр Великий, физически крепкий мужчина почти семи футов ростом, был энергичным, самостоятельно выучившимся, решительно настроенным правителем России с 1682 по 1725 год. Не знающий жалости реформатор, он начал преобразование своей державы из аграрной феодальной страны под властью Церкви в могущественную империю. Его цель – модернизировать на западный лад российское правительство, культуру, образование, военное устройство и общество – в значительной степени была достигнута. Как писал один русский историк, «внезапно, пропустив целые эпохи схоластики, Возрождения и Реформации, Россия перескочила из консервативной, церковной, квазисредневековой цивилизации в Век Разума»[3].

Одной из частей этого переустройства на западный манер Петр считал реформирование российской системы образования, которой до его воцарения не было вовсе, если не считать минимального обучения в рамках могущественной православной церкви. Поэтому в России не было ученых. Из-за сильного влияния церкви русские с опаской относились к научному познанию мира, предпочитая традиционные религиозные объяснения. Петр осознал необходимость улучшить международный имидж России и развеять миф о том, что русские ненавидят науку. Он также понимал, что наличие программы развития науки жизненно важно для создания и поддержания государственной мощи.

Петр посетил Лондонское королевское общество и Французскую академию наук в Париже, основанные одновременно в 1660 году. Увиденное произвело на него глубокое впечатление. Он также восхищался новой Берлинской академией наук, основанной в 1700 году по совету Готфрида Лейбница (1646–1716). Лейбниц был знаменитым математиком, которому, наряду с Исааком Ньютоном, принадлежит честь создания математического анализа. Эти академии не были университетами, они «предназначались для поиска новых знаний, а не для распространения существующей мудрости»[4]. Члены академий были учеными, а не преподавателями, их основной целью было расширение сферы знания.

Петр хотел создать такую академию, как в Париже, Лондоне и Берлине, и основать ее в новом городе Санкт-Петербурге. За советом он обратился к Лейбницу. В течение почти двух десятков лет Петр и Лейбниц обсуждали, в письмах и при личных встречах, реформу образования и создание Академии наук.

В 1724 году Петр довел до конца план создания Академии наук в Санкт-Петербурге; это был последний и самый амбициозный проект в его усилиях по улучшению системы образования в России. Однако он не мог организовать академию точно по образцу европейских. Поскольку в России не было своих ученых, ему пришлось убеждать талантливых иностранцев переехать в Санкт-Петербург. Кроме того, так как в России не было университетов, Академия наук должна была исполнять также функции университета. Частью мандата Академии было обучение русских наукам, чтобы в дальнейшем она могла не зависеть от иноземцев.

Петру не суждено было увидеть плоды своих трудов, он умер еще не старым в 1725 году. Но благодаря новой императрице, второй жене Петра Екатерине I (1684–1727), воплощение планов создания Академии продолжилось. Иностранные ученые начали приезжать спустя несколько месяцев после смерти Петра, а первое собрание Академии наук состоялось до конца года. Петру повезло, что Екатерина прониклась идеей Академии. В последующие годы Академия не всегда удостаивалась благосклонного внимания властей предержащих. За тридцать семь лет, прошедших со смерти Петра до коронации Екатерины Великой (1729–1796), в России сменилось шесть правителей, и Академия всегда зависела от милости этих своевольных и могущественных людей.

Поначалу в штате Академии было шестнадцать ученых: тринадцать немцев, два швейцарца, один француз – и ни одного русского. Преобладание немцев и отсутствие русских позже стало источником трений.

Из-за холодного климата, удаленности и академической изоляции необходимо было предлагать высокое жалованье и комфортное жилье, чтобы соблазнить ученых переездом в Санкт-Петербург. Новая академия была небольшой, но быстро выполнила обещание стать важным, международно признанным научным учреждением. В конечном итоге она стала центром всей научной жизни в России. Академия наук пережила несколько смен названия, но существует и по сей день и называется Российской академией наук.

В новом научном учреждении блистали двое иностранных ученых, друзья Эйлера и сыновья Иоганна Бернулли, Николай (1695–1726) и Даниил (1700–1782). Оба брата говорили Эйлеру об Академии до отъезда из Швейцарии и обещали подыскать ему место при первой возможности. После прибытия в Россию они стали уговаривать администрацию Академии пригласить их молодого друга. Эта кампания вскоре принесла плоды. В 1726 году Эйлеру была предложена должность в отделении медицины и физиологии. К сожалению, Эйлер не смог в полной мере насладиться этим интересным предложением и отпраздновать свое назначение. Его приняли на вакансию, открывшуюся после трагической и преждевременной смерти Николая.

Эйлер был благодарен за работу, но не спешил немедленно переехать в Россию. У него было две причины оставаться в Базеле и повременить с новой работой. Во-первых, он согласился на должность в отделении медицины, но обладал лишь минимальными познаниями в этой области. Поэтому он решил остаться в Базельском университете, чтобы изучить анатомию и физиологию. Во-вторых, он тянул время, надеясь, что ему предложат возглавить кафедру физики в университете. Осенью 1727-го, узнав, что эту должность отдали другому человеку, он уехал в Россию. Так началась его жизнь в Санкт-Петербурге, где он провел следующие четырнадцать лет, а потом еще последние семнадцать лет жизни.

Путешествие Эйлера в Санкт-Петербург морем, пешком и на повозке заняло семь недель. В тот день, когда он ступил на российскую землю, императрица Екатерина I умерла, процарствовав всего два года. Судьба новой Академии оказалась под вопросом. Те, кто правил страной от имени одиннадцатилетнего царя Петра II (1715–1730), внука Петра Великого, считали Академию ненужной роскошью и подумывали о ее закрытии. По счастью, Академия уцелела, и в последовавшей неразберихе Эйлер в конце концов оказался там, где и должен был быть, – в физико-математическом отделении. 1727 год – первый год математической карьеры Эйлера, стал также годом кончины математического гения Исаака Ньютона.

Жизнь в Академии во времена правления Петра II была нелегкой, поэтому ее члены надеялись на изменение своей судьбы в благоприятную сторону после смерти пятнадцатилетнего царя в 1730 году. И действительно, положение Академии несколько улучшилось при десятилетнем царствовании Анны Иоанновны (1693–1740), но жить в России стало неуютно. Анна привнесла в правительство сильное немецкое влияние, связанное прежде всего с ее фаворитом Эрнстом Иоганном Бироном (1690–1772). Бирон был безжалостным тираном, казнившим несколько тысяч россиян и отправившим в Сибирь десятки тысяч. Гонениям со стороны Бирона подверглись обычные преступники, староверы и политические противники Анны. Впоследствии, уже в Берлине, на вопрос, почему он такой неразговорчивый, Эйлер ответил королеве-матери Пруссии: «Государыня, это потому, что я только что прибыл из страны, где за слова вешают»[5].

В 1733-м, устав от трудной жизни в России и внутренних дрязг в Академии, Даниил Бернулли вернулся в Швейцарию, и Леонард Эйлер в возрасте 26 лет принял на себя роль ведущего математика.

Именно тогда Эйлер понял, что, возможно, останется в России надолго, быть может, навсегда. Если отвлечься от сложной политической обстановки, Эйлер вел в России комфортабельную жизнь. Он хорошо выучил русский язык и наконец-то, после повышения жалованья, сопровождавшего продвижение по службе, почувствовал себя финансово обеспеченным. Поэтому в 1733 г. он решил жениться на Катарине Гзелль, дочери уроженца Швейцарии, художника Георга Гзелля, которого привез в Россию Петр Великий. Леонард и Катарина создали семью и произвели на свет тринадцать детей. Как нередко бывало в те времена, лишь пять из них дожили до зрелых лет и только трое пережили родителей.

Обязанности мужа и отца не замедлили поток публикаций Эйлера. И теперь, как и во все периоды своей профессиональной жизни, он весьма активно занимался научными изысканиями. Трудно переоценить колоссальную продуктивность Эйлера. Говорили, что он мог написать математическую статью, качая младенца на коленях, и сочинить трактат между первым и вторым звонком на обед. Он писал обо всем и в любом жанре. Он создавал шедевры и короткие заметки, держал корректуру, давал объяснения, делился частичными результатами и идеями доказательств, публиковал учебники для начинающих и технические книги.

Ничто не могло удержать Эйлера. Даже слепота не остановила поток его математических результатов. В 1738-м он заболел, проведя три долгих дня в работе над астрономической задачей. Хотя современная медицина ставит этот диагноз под сомнение, долгое время считалось, что именно из-за этой болезни он стал хуже видеть, а затем и совсем ослеп на правый глаз. Эйлер отнесся к потере зрения философски. В типичной для него скромной манере он заметил: «Теперь я буду меньше отвлекаться»[6]. Позже он перестал видеть и другим глазом и последние семнадцать лет жизни провел почти в полной тьме. Но, несмотря на потерю зрения, он продолжал делать важные вклады в математику до самой кончины.

Мозг Эйлера, казалось, был настроен на математику, как никакой другой. Он мог одновременно мысленно жонглировать многими абстрактными понятиями и производить сногсшибательные вычисления в уме. Есть знаменитая история о том, как два ученика Эйлера складывали семнадцать дробных членов, и обнаружилось, что суммы не совпадают. Эйлер вычислил сумму в уме и положил конец спору, дав правильный ответ. Математик Франсуа Араго (1786–1853) писал: «Эйлер вычислял без всякого видимого усилия, как человек дышит, как орел парит над землей»[7]. Эйлер скромно замечал, что его способность манипулировать символами – замена ума, а его карандаш превосходит его интеллектом.

Эйлер также был одарен необычайной памятью. Он помнил бесчисленные стихи; с детских лет и до самой старости он мог на память прочитать всю «Энеиду» Виргилия и назвать первое и последнее предложения на любой странице. А вот более близкий к математике пример его замечательной памяти: он мог назвать первые шесть степеней первых ста натуральных чисел. Просто чтобы вы понимали – 99 в шестой степени равно 941 480 149 401.

Во время пребывания в Санкт-Петербурге Эйлер уделял часть своего времени проектам в интересах государства. В 1735-м он был назначен директором географического отделения Академии и внес значительный вклад в создание остро необходимой карты России. Он также написал двухтомное сочинение по кораблестроению, настолько ценное, что Академия удвоила его жалованье за тот год.

Но хотя Эйлер мог похвастаться поразительной продуктивностью, счастливой семейной жизнью и немалым доходом, условия жизни в России ухудшались. Атмосфера в Академии становилась очень напряженной, даже враждебной. Большая часть старшего преподавательского состава была родом из Германии, русских по-прежнему было очень мало. За первые шестнадцать лет существования Академии ее членом стал только один русский, да и тот адъюнкт, который так и не получил профессорскую должность. Русские возмущались тем, сколько власти захватили немцы, и открыто выступали против них. По счастью, спокойный и сдержанный Эйлер сохранял нейтралитет во внутренней политике Академии, но эти склоки отражались на его работе.

Из-за присутствия Бирона и «немецкой партии» в правительстве Анны в русском народе зрел страх и ненависть к немцам. В конце 1740 года, незадолго до смерти, Анна назначила Бирона регентом при своем наследнике, двухмесячном Иване VI (1740–1764). После смерти Анны враждебность русских к немцам достигла апогея – не прошло и месяца, как Бирона свергли, а спустя год Ивана и всю «немецкую партию» отстранили от власти. На престол взошла дочь Петра Великого Елизавета I (1709–1762).

В этот период жизнь в России была опасной, особенно для иноземцев. На академиков-иностранцев поглядывали косо, как на возможных западных шпионов. Эйлер реагировал на это спокойно, посвящая все время работе и семье. Но в 1741-м он понял, что больше не может выносить жизнь в России, и решил переехать из Санкт-Петербурга в Берлин.

Берлинская академия наук была основана в 1700 году и получила название Societas Regia Scientiarum (Королевское научное общество). Общий план Академии составлял Лейбниц. Берлинская академия так же, как Парижская и Лондонская, сосредоточилась на естественных науках и математике, но, в отличие от других, включила в сферу своих интересов еще историю, философию, языки и литературу.

Несмотря на большие ожидания Лейбница, Берлинская академия развивалась медленно. Трудности были отчасти связаны с постоянным недофинансированием и напряженными франко-германскими отношениями. Условия стали еще хуже после восхождения на престол Фридриха Вильгельма I (1688–1740) в 1713 году. При этом правителе, противнике всякого интеллектуального прогресса, Академия оказалась в полном небрежении. Берлинская академия не смогла продемонстрировать успехов, достигнутых академиями в Париже и Лондоне. Она не стала существенным фактором получения новых научных знаний, ее даже прозвали «анонимным обществом».

После смерти Фридриха Вильгельма I в 1740 году к власти пришел его сын Фридрих II (1712–1786), впоследствии известный как Фридрих Великий. И хотя Фридрих Вильгельм I сознательно готовил сына к царствованию, во многих отношениях Фридрих оказался противоположностью отцу. Между ними существовали глубокие противоречия. Когда Фридриху было восемнадцать, он пытался бежать из страны, правда, неудачно. Отец заставил Фридриха присутствовать на казни его друга и участника заговора (а ходили слухи, что и любовника).

Фридрих был решительно настроен расширить германские земли, но также питал склонность к искусству и философии. Он стремился создать образ просвещенного правителя-философа. Возрождение Академии играло важную роль в его плане вдохнуть новую жизнь в страну.

В отличие от отца, Фридрих презирал немецкую культуру и обожал все французское. Он изменил официальное название Берлинской академии на Académie Royale des Sciences et Belles Lettres (Королевская академия наук и изящной словесности). Он настаивал на том, чтобы официальным языком Академии был французский, и требовал, что все статьи в издававшемся Академией журнале были написаны на французском или переведены на него. Он предпочитал компанию остроумных французов, а не спокойных, бесстрастных немцев. Вольтер (1694–1778) относился к числу его любимых корреспондентов и был одним из ближайших советников по вопросам, связанным с Академией. Именно Вольтер первым предложил Фридриху соблазнить Эйлера уехать из России и присоединиться к Берлинской академии.

Рис. 1.3. Фридрих Великий, король Пруссии

Фридрих испытывал глубочайшее отвращение к математическим искусствам. В 1738-м он писал Вольтеру: «Что же до математики, сознаюсь, что не люблю ее: она сушит ум. У нас, немцев, он и так иссушен сверх меры; это бесплодное поле, которое нужно постоянно удобрять и поливать, чтобы оно приносило урожай»[8]. Он рассматривал математику – да и науку в целом – как прислужницу государства. Об успешности ученых он судил по их полезности в практических делах. Ученые из Академии были вольны заниматься собственными проектами, коль скоро исполняли повеления короля.

В то время Эйлер был самым знаменитым ученым в Санкт-Петербурге и хорошо известен во всей Европе. Фридрих вознамерился завоевать симпатии Эйлера. Хотя Эйлер и был обеспокоен опасными условиями, сложившимися в России, Фридриху потребовалось несколько попыток, чтобы склонить швейцарского математика оставить Санкт-Петербург. В 1741-м Эйлер согласился и, мотивируя свой отъезд ухудшившимся здоровьем и необходимостью сменить климат на более теплый, покинул Санкт-Петербург.

Сначала Эйлеру понравилось в Берлине, в 1746-м он писал своему другу: «Король называет меня профессором, мне кажется, что я счастливейший человек на свете»[9]. Но, увы, счастье было недолгим. Во многих отношениях жизнь в Берлине была лучше, чем в России, но существование Эйлера отравляло странное и неожиданное неуважение со стороны Фридриха. Он называл Эйлера своим «математическим циклопом», невежливо намекая на единственный здоровый глаз. Холодность Фридриха отчасти объяснялась его нелюбовью к математике, но не только. Сдержанные и неброские манеры Эйлера не импонировали Фридриху, который считал Эйлера простецом. Фридрих предпочитал общество остроумного, изысканного, разбитного Вольтера. К тому же Эйлер был набожным кальвинистом. Каждый вечер он читал своей семье библейские тексты, а иногда сопровождал их проповедью. На публике Фридрих выказывал терпимость к религии, но в душе был деистом и не питал особого уважения к богобоязненному Эйлеру и его глубокой религиозности.

Эйлер также затаил обиду на Фридриха. Величайшим разочарованием стал отказ Фридриха назначить его президентом Академии. В течение нескольких лет, пока Фридрих был занят Семилетней войной, он так и не нашел подходящей кандидатуры на эту должность. Тем временем Эйлер неофициально исполнял функции «действующего президента», но раз за разом Фридрих отказывался узаконить это положение. Эйлер хорошо справлялся с ролью исполняющего обязанности президента, но, не будучи философом, способным на живой остроумный разговор, он не имел шансов добиться расположения Фридриха. Сильнейшее оскорбление было нанесено в 1763 году, когда Фридрих признал, что не может найти подходящей замены, и объявил президентом Академии самого себя.

Неприязненные отношения между Эйлером и Фридрихом получили дальнейшее развитие, когда в 1763 году король не дал одной из дочерей Эйлера разрешения на брак с солдатом по причине его низкого звания. Быть может, последней соломинкой стала серия ожесточенных стычек между Фридрихом и Эйлером в период между 1763 и 1765 годом. Все случилось из-за торговли государственными календарями (альманахами). Они изготавливались за большие деньги членами Академии и продавались публике для финансирования ее деятельности. Выяснилось, что главный комиссионер прикарманивал деньги от продажи календарей. Фридрих и Эйлер разошлись во мнениях о том, как разобраться с коррупцией и недостатками администрирования, приведшими к этому случаю. Кончилось тем, что Фридрих в резких выражениях упрекнул Эйлера.

Находясь в Берлине, Эйлер сохранил добрые отношения со своими бывшими коллегами по Санкт-Петербургу. Он оставался главным редактором журнала и отправил общим счетом 109 статей для опубликования в нем. Он опекал русских студентов, которых посылали на учебу в Берлин. В награду за редактирование и наставничество российские власти регулярно выплачивали ему стипендию. Еще более примечательный пример уважения русских к Эйлеру дает одно происшествие во время Семилетней войны. В марше на Бранденбург в 1760 году русская армия вошла в Шарлоттенбург. При этом была разграблена ферма, принадлежавшая Эйлеру. Узнав об этом, русские – сначала генерал, а затем сама императрица Елизавета – выплатили Эйлеру репарации в размере, намного превышающем стоимость ущерба.

В течение всех 24 лет пребывания Эйлера в Берлине русские очень хотели снова залучить его в Санкт-Петербург. Щедрые предложения делались в 1746, в 1750 и в 1763 годах. Всякий раз он отказывался, но никогда не захлопывал дверь окончательно. Наконец, в 1765 году, сытый по горло враждебностью Фридриха и видя улучшение политической обстановки в России, он решил вернуться.

Несмотря на личную неприязнь, Фридрих хорошо сознавал выдающееся место Эйлера в международном научном сообществе. За время работы в Берлине Эйлер опубликовал свыше двухсот работ. В 1749 году он был избран действительным членом Лондонского королевского общества. В 1755-м он стал девятым иностранным членом Французской академии наук, хотя по уставу число иностранных членов не должно было превышать восьми. Да и государству он хорошо послужил; помимо создания календарей, Эйлер работал над чеканкой национальной монеты, устройством каналов, проектированием акведуков, созданием пенсионной системы и совершенствованием артиллерии.

Фридрих пытался воспрепятствовать отъезду Эйлера. Эйлер был вынужден несколько раз подавать прошение о разрешении на выезд. В 1766 году Фридрих наконец смилостивился и дал Эйлеру позволение уехать. В возрасте 59 лет Эйлер со своими 18 домочадцами возвратился в Санкт-Петербург.

В том же году, по рекомендации французского математика Жана Д'Аламбера (1717–1783), Фридрих назначил на должность Эйлера Жозефа-Луи Лагранжа (1736–1813), восходящую звезду, который впоследствии стал знаменитым математиком. В типичной для него язвительной манере король писал Д'Аламберу, благодаря его за «замену полуслепого математика математиком с обоими глазами, что особенно порадует членов анатомического отделения академии»[10]. По иронии судьбы, вопреки неприязни Фридриха к математике и любви к философии, его Академия навсегда войдет в историю благодаря блистательной когорте математиков, а вовсе не философов.

В конце пребывания Эйлера в Берлине, когда он конфликтовал с Фридрихом, в России царствовал Петр III (1728–1762), жалкий, психологически неустойчивый прогермански настроенный правитель, который, как известно, испытывал «страх и презрение по отношению к России и русским»[11]. В 1762-м его правление трагически оборвалось – он был свергнут своей женой, которая взошла на трон под именем Екатерины II. Вскоре после этого, возможно по приказу Екатерины, Петр был убит стражей, державшей его в заточении.

Екатерина, получившая впоследствии прозвание «Великая», правила Россией до 1796 года. XVIII век начался правлением могущественного и оказавшего огромное влияние на последующее развитие страны Петра Великого, а закончился во всех отношениях примечательным правлением Екатерины Великой. Она была умной, волевой, амбициозной и энергичной государыней. Французский философ Дени Дидро (1713–1783) говорил, побывав при дворе Екатерины, что в ней «душа Цезаря соединилась со всеми соблазнами Клеопатры»[12]. Под ее властью качество жизни в России заметно улучшилось. Образование, находившееся в загоне со времен Петра Великого, снова стало одним из приоритетов российского правительства.

Рис. 1.4. Екатерина Великая, императрица России

В самом начале Академия сверкала благодаря блестящему гению Эйлера. С его отъездом в Берлин туда же переместился центр развития математики. Из-за этой потери, усугубленной годами политической нестабильности, учреждению было трудно привлекать талантливых иностранных ученых. Почва под Академией была очень зыбкой. Одним из проектов Екатерины в области реформы образования стало оживление Санкт-Петербургской академии и выведение ее на прежний уровень. Как писал математик Андре Вейль (1906–1998), «это было почти равносильно возвращению Эйлера»[13].

Екатерина позаботилась о том, чтобы удовлетворить, и даже с лихвой, немалые притязания Эйлера. Ему было назначено жалованье, вдвое превышавшее предложенное в 1763 году, его жена получила пособие, старший сын был принят на работу в Академию, а младшим сыновьям гарантировалось трудоустройство в будущем. Кроме того, Екатерина пожаловала Эйлеру полностью обставленный дом и одного из своих собственных поваров. По прибытии в Санкт-Петербург Эйлер был тепло встречен императрицей. С его возвращением внимание математического сообщества вновь переключилось на Санкт-Петербург, что способствовало процветанию Академии.

У Екатерины Великой и Фридриха Великого есть общие черты: оба были яркими примерами «просвещенных деспотов». Однако отношения Эйлера с двумя монархами были очень разными. Его жизнь в Санкт-Петербурге времен Екатерины была куда лучше, чем в Берлине Фридриха. Екатерина любила науку и приветствовала Эйлера как знаменитость. Он занял свое место в академической иерархии и обладал большими административными полномочиями, чем любой другой ученый.

За свою жизнь Эйлер был свидетелем многочисленных изменений в столичном Санкт-Петербурге. Когда он приехал туда впервые, городу было всего двадцать четыре года, когда вернулся – шестьдесят три года, а на момент смерти – восемьдесят лет. К концу XVIII века население города выросло до 166 000 человек. Санкт-Петербург стал домом как для богатейших дворян империи, так и для беднейших крестьян. Почти четверть населения составляли военные[14]. Одни русские по-прежнему любили Санкт-Петербург, другие его ненавидели (это верно и в наши дни[i]). В полном соответствии с планом Петра Великого город стал средоточием красивейшей архитектуры в европейском стиле. Это был самый европейский из всех русских городов. Из-за множества островов и водных путей он получил название «Северная Венеция».

Второй Санкт-Петербургский период Эйлера стал временем профессионального успеха, но также был отмечен рядом личных утрат. В 1771 г. дотла сгорел его дом. Благодаря быстрым действиям самоотверженных слуг, которые вынесли его из горящего здания, жизнь Эйлера была спасена. Вся его библиотека была уничтожена огнем, но, к счастью для науки, рукописи удалось сберечь. После трагедии Екатерина предоставила ему новый дом и возместила все убытки. В 1776 г. умерла любимая жена Эйлера Катарина. Спустя год он женился на ее сводной сестре Саломее-Абигайль Гзелль.

Почти сразу после отъезда из Берлина он перестал видеть левым глазом из-за катаракты. Проведенная в 1771 г. операция ненадолго вернула зрение, но возникшая инфекция привела к рецидиву, и он снова ослеп. В течение этого времени Эйлер продолжал публиковать работы по математике, в основном диктуя своему сыну. Поразительно, но поток работ, выходивших из-под пера Эйлера, не оскудевал. Будучи полностью слеп, он доказал некоторые из самых важных своих теорем и написал ряд оказавших огромное влияние книг.

Бытует широко распространенное мнение, что самые плодотворные годы математика приходятся на его юность, а когда он достигает сорока – или даже тридцати – лет, творческие способности и гениальность угасают. В известном сочинении «Апология математика» британский математик Г. Х. Харди (1877–1947) писал: «Ни один математик не должен позволять себе забывать о том, что математика в большей степени, чем

[i] Оставим это утверждение на совести автора. – *Прим. перев.*

любой другой вид искусства или любая другая наука, – занятие для молодых»[15]. И хотя это замечание верно описывает снижающееся качество профессиональных достижений многих математиков (да и людей других творческих профессий), к траектории карьеры Эйлера оно не имеет ни малейшего отношения. Его возвращение в Санкт-Петербург было отмечено фанфарами, и он не разочаровал аудиторию. Как писал один историк, Эйлер «сразу продемонстрировал, что вернулся в Россию не почивать на лаврах, а, напротив, был на пике творческих сил»[16].

Как Бетховен преодолел, казалось бы, непреодолимое для сочинителя симфоний препятствие – глухоту, так и Эйлер сумел создать глубокую, красивую и зачастую «наглядную» математику, пребывая в своем погруженном в темноту мире. Это один из величайших триумфов человеческого духа.

Помимо чисто математических исследований, Эйлер продолжал вносить один вклад за другим в прикладную математику. Одной из самых важных проблем в то время было нахождение точного и надежного метода морской навигации. Навигация по звездам полностью зависела от точности мореходных таблиц, дававших местоположения небесных тел в заданный момент времени. Луна – самый заметный объект в ночном небе, но, поскольку движение Луны определяется гравитационным взаимодействием трех тел – ее самой, Земли и Солнца, – заранее вычислить ее положение в каждый конкретный момент времени математически очень трудно. Даже в наши дни для знаменитой задачи трех тел не найдено аналитического решения. Ньютоновская теория гравитации описывала движение планет, но не предлагала вычислительного алгоритма для нахождения этого движения. В 1772 году Эйлер разработал математическую модель движения Луны, которая поддавалась расчетам и позволяла производить приближенные вычисления с очень хорошей точностью. На основе модели Эйлера были составлены весьма надежные таблицы движения Луны. В знак благодарности за эту работу французское Бюро долгот и Британский парламент щедро вознаградили Эйлера.

Поток работ Эйлера не иссякал до самой его смерти в возрасте 76 лет. Его последний день описан маркизом де Кондорсе (1743–1794) в надгробном слове:

> Он сохранил все свои мыслительные способности и, по всей видимости, остроту ума: никакой упадок, казалось, не угрожал наукам с внезапной потерей их величайшего украшения. 7 сентября 1783 года, позабавившись на доске вычислениями законов восходящего движения воздушных шаров, открытие которых недавно наделало шуму в Европе, он пообедал с г-ном Лекселлом и его семьей, беседовал о планете Гершеля [недавно открытой планете Уран] и о расчете ее орбиты. Потом он позвал своего внука и играл с ним во время чаепития, когда внезапно трубка выпала из его руки, он перестал вычислять и жить[17].

Леонард Эйлер похоронен в Санкт-Петербурге, в России.

Трудно перечислить все величайшие достижения Эйлера на поприще математики. Мы могли бы процитировать одну из его многочисленных теорем. Или упомянуть написанные им учебники, снискавшие большой успех, например «Введение в анализ бесконечно малых», который историк науки Карл Бойер назвал самым влиятельным учебником в истории современной математики. Можно было бы назвать его работы по прикладной математике, например книгу «Механика», в которой впервые методы математического анализа систематически применяются к физике. Или вспомнить о сочинениях для неспециалистов, таких как чрезвычайно популярные в свое время «Письма немецкой принцессе» – собрание уроков, написанное для племянницы Фридриха Великого принцессы Ангальт-Дессауской. Быть может, стоило бы обратить внимание на его умение организовать и оформить изолированные результаты и, казалось бы, далекие друг от друга идеи в связное и упорядоченное тело математики. Или на элегантную и полезную нотацию, введенную им: Эйлер первым стал использовать букву e для обозначения основания натуральных логарифмов; он ввел в обиход символ π; в конце жизни он стал использовать букву i для обозначения $\sqrt{-1}$ (популяризировал эту нотацию Гаусс); он обозначал буквами a, b, c стороны треугольника, противоположные вершинам A, B, C; он использовал символ $\sum$ для обозначения суммы; он стал обозначать конечные разности Δx, и он же начал использовать нотацию $f(x)$ для функции.

Трудно выделить какую-то одну из многих и многих теорем Эйлера как самую важную. Некоторые считают, что это соотношение, связывающее числа 0, 1, π, e и i:

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

А быть может, это один из его удивительных бесконечных рядов, демонстрирующих мощь математического анализа. Или одна из его теорем в теории чисел, например та, что подвела черту под знаменитыми гипотезами Пьера Ферма (1601–1665).

Но мы, конечно, сосредоточимся на простой формуле, связывающей количество вершин, ребер и граней многогранника:

$$V - E + F = 2.$$

Недавний опрос математиков показал, что, по их мнению, формула Эйлера для многогранников – вторая по красоте теорема во всей математике. А самой красивой, по мнению большинства, является формула Эйлера $e^{\pi i} + 1 = 0$[18].

Чтобы понять формулу Эйлера для многогранников, мы должны будем поближе познакомиться с многогранниками. Итак, что же такое многогранник?