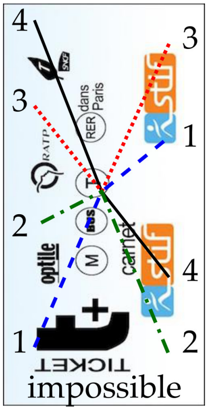
Предисловие

В марте 2009 года я сидел на каком-то административном совещании. Коллеге, сидевшему рядом со мной, было даже скучнее, чем мне. Очевидно, Максим Концевич думал о чем-то еще. Внезапно он передал мне билет на парижское метро, на котором было что-то нарисовано и написано единственное слово: «невозможно». Это была новая теорема, которой он хотел со мной поделиться! Чтобы догадаться, в чем состоит утверждение теоремы, мне потребовалось потратить несколько минут и чуть-чуть пошептаться с Максимом. Ещё через несколько минут я отыскал доказательство. Вот это утверждение.

Максим Концевич



Теорема. *Четверка многочленов P_1, P_2, P_3, P_4 от вещественной переменной x не может удовлетворять неравенствам*

- $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$ *при малых* $x < 0$,
- $P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$ *при малых* $x > 0$.

На относительное расположение графиков четырех вещественных многочленов имеются некоторые ограничения. Я был потрясен: новый элементарный результат о четырех многочленах в 2009 году!

Впоследствии я попытался обобщить это утверждение, изучить ситуацию, когда многочленов более четырех, и так далее. В результате получилось приятное путешествие, с большим количеством окружных путей, по неожиданно разнообразным областям математики и разным периодам истории математики. Как обычно, это привело к открытым проблемам, которые я умею решать лишь частично.

Цель книжки — пригласить читателя на эту математическую прогулку. Я не выбирал наиболее эффективный способ достижения конкретной цели; на самом деле никакой цели в этом тексте нет. Почти все главы независимы, и вы можете пропускать любые из них, если захотите. Если вы сочтете какой-нибудь пункт слишком сложным или слишком скучным, его тоже можно пропустить. Мы нанесем визит Гиппарху, Ньютону и Гауссу, а еще многим современным математикам. Мы немного поиграем с алгеброй, топологией, геометрией, комплексным анализом, комбинаторикой и компьютерными науками. Погуляем по миру математики?

Однако чтобы всё-таки достичь какой-то цели и не превращать эту прогулку в абсолютно случайное блуждание, давайте я процитирую результат, который будет доказан в одной из последних глав. Это, вероятно, единственный новый результат в этой работе.

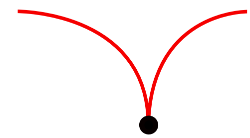
Рассмотрим точку p на плоской кривой C.

Если кривая C *гладкая*, локальная картина не очень интересна.

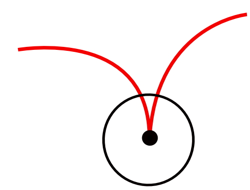
Если кривая C *особая* в точке p, картина может оказаться сложнее, как, например, для каспидальной точки $x^2 = y^3$. Ограничимся рассмотрением *алгебраических* кривых, заданных уравнением вида $F(x, y) = 0$, где F — это многочлен от x, y с вещественными коэффициентами. Оказывается, в окрестности одной из своих точек такая кривая представляется как объединение конечного числа неприводимых компонент, которые принято называть *ветвями*. Природа этих ветвей в прошлом была предметом многих споров; эту тему мы обсудим подробно. Основной результат состоит в том, что *топологически* все ветви являются гладкими! Точнее, для каждой ветви имеется локальный гомеоморфизм плоскости, переводящий ее в прямую. Каждая ветвь пересекает маленькую окружность с центром в p ровно в двух точках.

Относительное положение нескольких ветвей кривой — вопрос гораздо более тонкий. В окрестности особой точки топология кривой описывается четным числом точек окружности, разбитых на пары: это разбиение задается ветвями. Мы получаем $2n$ точек на кривой, образующих n пар, где каждая пара покрашена в свой цвет или отмечена своей буквой.

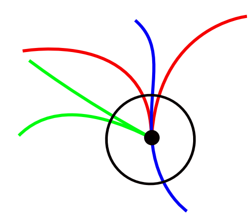
Гладкая кривая



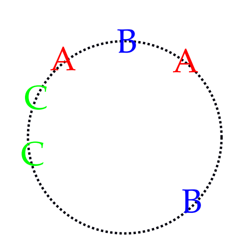
Каспидальная точка



Маленькая окружность пересекает кривую в двух точках

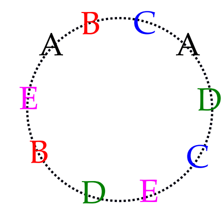


Кривая с тремя ветвями



Ассоциированное циклическое слово $ABACCB$

Теперь я могу сформулировать теорему, которая более или менее будет нашей конечной целью, чем-то вроде маяка, указывающего направление.



Невозможные пять ветвей

Теорема. *Не существует особенности вещественной алгебраической кривой на плоскости, состоящей из пяти ветвей A, B, C, D, E и пересекающей маленькую окружность, как на рисунке на полях.*

На самом деле я докажу гораздо более точную теорему: я дам полное описание всевозможных топологических конфигураций ветвей аналитической кривой.

Я написал эту «маленькую книжечку», ориентируясь на одного конкретного читателя: на себя самого в годы учёбы в университете. Точнее, я ограничил необходимые для ее чтения предварительные сведения тем, что я знал сам в то время, когда сдавал экзамен «agrégation»[1], ровно сорок лет тому назад! Я хорошо помню, что мне было очень тяжело (да и по сей день непросто) читать длинные математические трактаты, полные технических деталей, и больше нравилось смотреть на картинки. Сейчас я уже выучил, что точность и подробности часто необходимы в математике, но мне до сих пор очень нравятся прогулки. Я пытался вообразить, как бы я сам среагировал, увидев эту книгу, когда я был начинающим. Эта беседа между «двумя версиями меня самого» оказалась интересной и напомнила мне рассказ Борхеса «Другой». Было ли это сном? Или реконструкцией прошлого?

[1] Французский экзамен на право преподавания в средней и высшей школе, аналог выпускного экзамена из университета. — *Прим. пер.*

Здесь следует сделать предостережение: это не учебник со структурой «определение-теорема-доказательство». Вы должны быть готовы к тому, что время от времени мы можем теряться, как часто бывает на прогулках. Я знаю, что вы будете ворчать на меня из-за отсутствия точных определений, и действительно, некоторые определения вам придется принимать сырыми... Конечно же, учебники необходимы, и на полях я буду приводить множество ссылок. Однако я убежден, что математические идеи и примеры предшествуют формальным доказательствам и определениям. Как когда-то сказал Даламбер: «Просто идите вперед... и вера последует за вами!» Время от времени вам будет открываться красивый вид, проступающий из тумана, подобный тому, что изображен на фронтисписе (это картина Каспара Давида Фридриха «Странник над морем тумана», 1818): не так ли устроен и математический мир?

Я надеюсь, что некоторым сегодняшним заинтересованным студентам понравятся эти виды.

Теперь мы готовы отправиться в путешествие.