

СОДЕРЖАНИЕ

1. АЛГЕБРА

1.1. Числа, корни и степени	9
Множество натуральных чисел	9
Множество целых чисел	9
Множество рациональных чисел	9
Множество действительных чисел	9
Основные арифметические действия и их свойства	10
Свойства нуля и единицы	11
Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10	11
Признаки делимости на 4, 25 и 11	12
Простые и составные числа	12
Обыкновенные дроби	13
Пропорции	15
Проценты	15
Модуль действительного числа	17
Степень	17
1.2. Основы тригонометрии	22
Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника	22
Углы в тригонометрии	23
Синус, косинус, тангенс и котангенс числа	24
Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса	25
Значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов	26
Формулы приведения	27
Основные тригонометрические формулы	27
1.3. Логарифмы	30
1.4. Преобразование выражений	32
Преобразование выражений, включающих арифметические операции	32
Арифметические действия с рациональными числами	33
Правила раскрытия скобок в числовых выражениях и выраже- ниях с переменной	34

Одночлен	35
Многочлен	35
Формулы сокращённого умножения	36
Основные приёмы разложения многочлена на множители	36
Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень	37
Сравнение степеней	37
Преобразование выражений, включающих корни натуральной степени	38
Тождественные преобразования иррациональных выражений	38
Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента	39
Сумма и разность тригонометрических функций	42
Дополнительные тригонометрические формулы	43
Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования	43
Логарифмирование и потенцирование	44
Модуль (абсолютная величина) числа и его свойства	45

2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

2.1. Уравнения	46
Линейные уравнения $ax = b$ (приводимые к виду $ax = b$)	47
Квадратные уравнения	47
Дробно-рациональные уравнения	50
Целые уравнения высших степеней, сводящиеся к квадратным	51
Иррациональные уравнения	51
Тригонометрические уравнения	53
Показательные уравнения	57
Логарифмические уравнения	58
Равносильность уравнений, систем уравнений	60
Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными	60
Основные приёмы решения систем уравнений	62
Использование свойств и графиков функций при решении уравнений	64
Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем	67
Применение математических методов для решения практических задач	
Интерпретация результата	68

2.2. Неравенства	71
Основные свойства числовых неравенств	71
Решения неравенств и их обозначения	73
Линейные неравенства с одной переменной	75
Квадратные неравенства	76
Равносильность неравенств (систем неравенств)	78
Область допустимых значений (ОДЗ) неравенства	78
Основные теоремы о равносильности неравенств	79
Рациональные неравенства	80
Показательные неравенства	81
Логарифмические неравенства	83
Системы и совокупности неравенств с одной переменной	85
Системы неравенств и двойные неравенства	86
Использование свойств и графиков функций при решении неравенств	88
Изображение на координатной плоскости множеств решений неравенств с двумя переменными и их систем	92
Решение систем неравенств с двумя переменными	93

3. ФУНКЦИИ

3.1. Определение функции, её график	95
Способы задания функции	96
Область определения функции, заданной формулой	96
Область значения функции, заданной формулой	98
Примеры графических зависимостей, отражающих реальные процессы	99
Обратная функция. График обратной функции	100
Преобразование графиков функций	101
3.2. Элементарное исследование функций	103
Монотонность функции	103
Чётность и нечётность функции	104
Нули функции. Промежутки знакопостоянства	105
Экстремумы (минимумы и максимумы) функции	105
Наибольшее и наименьшее значения функции	107
Ограниченность функции	108
Периодичность функции	108
Чтение графиков функций	108

3.3. Основные элементарные функции	110
Линейная функция, её свойства и график	110
Геометрический смысл коэффициентов k и b	110
Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость	113
Дробно-линейная функция, её свойства и график	114
Квадратичная функция, её свойства и график	115
Степенная функция, её свойства и график	118
Тригонометрические функции, их свойства и графики	122
Показательная функция, её свойства и график	125
Логарифмическая функция, её свойства и график	126
Числовые последовательности. Прогрессии	127

4. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4.1. Производная	130
Определение производной.	130
Таблица производных	130
Основные правила дифференцирования	131
Способы вычисления производной	132
Геометрический смысл производной.	
Уравнение касательной	133
Физический (механический) смысл производной	134
4.2. Исследование функции с помощью производной	135
Исследование функции на монотонность	135
Нахождение промежутков возрастания и убывания функции	136
Экстремумы функции	137
Схема исследования функции	139
Использование производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах	140
4.3. Первообразная и интеграл	140
Первообразная. Основные свойства первообразной	140
Определённый интеграл.	
Основные свойства определённого интеграла	143

5. ГЕОМЕТРИЯ

5.1. Планиметрия	146
Треугольник	146
Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат	156

Трапеция	160
Окружность и круг	162
Окружность, хорды и дуги	163
Окружность, касательные и секущие	164
Взаимное расположение прямой и окружности	165
Взаимное расположение двух окружностей	165
Углы в окружности	166
Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника	168
Многоугольник.	
Сумма углов выпуклого многоугольника	170
Правильные многоугольники	172
Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника	173
5.2. Прямые и плоскости в пространстве	174
Взаимное размещение двух прямых в пространстве	174
Параллельность прямой и плоскости	178
Перпендикулярность прямой и плоскости	179
Перпендикуляр и наклонная	181
Теорема о трёх перпендикулярах	182
Перпендикулярность плоскостей	182
Параллельное проектирование.	
Изображение пространственных фигур на плоскости	183
Параллельные проекции некоторых плоских фигур (плоскость фигуры не параллельна направлению проектирования)	184
5.3. Многогранники	185
Призма	185
Параллелепипед	187
Куб	190
Пирамида	190
Сечения куба, призмы, пирамиды	195
Правильные многогранники	196
5.4. Тела и поверхности вращения	198
Цилиндр	198
Конус	200
Шар и сфера	204
5.5. Измерение геометрических величин	207
Угол. Величина угла, градусная мера угла	207
Дуга	208

Углы в пространстве	208
Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника	209
Расстояние в пространстве	211
Площади треугольника, четырёхугольника, круга и его частей	214
Площадь поверхности и объём многогранников	219
Площадь поверхности и объём тел вращения	222
Комбинации тел.	224
5.6. Координаты и векторы	232
Декартовы координаты	232
Векторы	238
Угол между векторами.	
Скалярное произведение векторов	242

6. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

6.1. Элементы комбинаторики	245
Понятие множества и его элементов	245
Бином Ньютона	249
6.2. Элементы статистики	250
Основные статистические характеристики (числовые характеристики рядов данных)	251
6.3. Элементы теории вероятностей	252
Виды событий	252
Вероятность случайного события	253
Операции над событиями	254
Вероятность сложных событий	255

1.1. Числа, корни и степени

Множество натуральных чисел

N	Используются для счёта предметов: 1; 2; 3; ...
---	--

Множество целых чисел

Z	N	Натуральные числа 1; 2; 3; ...; противоположные им числа: -1; -2; -3; ... и число 0 образуют множество целых чисел
	0	
	N ₋	

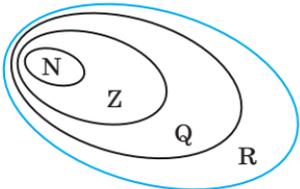
Множество рациональных чисел

Q	Z	Числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$. Рациональные числа — бесконечные периодические дроби. Если период состоит из одних нулей, дробь считается конечной десятичной
	дроби	

Множество действительных чисел

R	\bar{Q}	Иррациональные числа — бесконечные непериодические десятичные дроби.
	Q	Объединение рациональных и иррациональных чисел называют действительными числами

Окончание таблицы

	$5 \in \mathbb{N}; 5 \in \mathbb{Z};$ $-7 \notin \mathbb{N}; -7 \in \mathbb{Z};$ $0,37 \notin \mathbb{N}; 0,37 \notin \mathbb{Z}; 0,37 \in \mathbb{Q};$ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
---	---

Основные арифметические действия и их свойства

Сложение

$$a + b = c$$

a, b — слагаемые, c — сумма

Переместительное свойство	Сочетательное свойство	Распределительное свойство
$a + b = b + a$	$a + (b + c) = (a + b) + c$	—

Вычитание

$$a - b = c$$

a — уменьшаемое, b — вычитаемое, c — разность

Переместительное свойство	Сочетательное свойство	Распределительное свойство
$a - b = -(b - a)$	$a - (b - c) = a - b + c$ $(a - b) - c = a - b - c$	—

Умножение

$$a \cdot b = c$$

a, b — множители, c — произведение

Переместительное свойство	Сочетательное свойство	Распределительное свойство
$a \cdot b = b \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(a + b) \cdot c = ac + bc$ $(a - b) \cdot c = ac - bc$

Деление

$$a : b = c$$

a — делимое, b — делитель, c — частное

Переместительное свойство	Сочетательное свойство	Распределительное свойство
$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$	<p>Деление числа на произведение:</p> $\begin{aligned} c : (a \cdot b) &= \\ &= (c : a) : b = \\ &= (c : b) : a \end{aligned}$ <p>Деление произведения на число:</p> $\begin{aligned} (a \cdot b) : c &= \\ &= a \cdot (b : c) = \\ &= (a : c) \cdot b \end{aligned}$	<p>Деление суммы (разности) на число:</p> $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$

Свойства нуля и единицы

$a + 0 = a; a - 0 = a; 0 - a = -a;$ $a + (-a) = 0; a - a = 0$ (a и $-a$ — противоположные числа). $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ (a и $\frac{1}{a}$ — взаимно обратные числа)	$a \cdot b = 0$, если $a = 0$ или $b = 0$, или $a = b = 0$. $\frac{a}{b} = 0$ только при $a = 0, b \neq 0$
Ноль делится на любое число; на ноль делить нельзя	

Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10

Делится на	Признак делимости
2	Число делится на 2, если его последняя цифра делится на 2

Окончание таблицы

3	Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3
5	Число делится на 5, если его последняя цифра 0 или 5
9	Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9
10	Число делится на 10, если его последняя цифра 0

Признаки делимости на 4, 25 и 11

Делится на	Признак делимости
4	Число делится на 4, если число, составленное из двух его последних цифр, делится на 4
25	Число делится на 25, если число, составленное из двух его последних цифр, делится на 25
11	Число делится на 11, если алгебраическая сумма его цифр $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_{n-1}$ делится на 11

Простые и составные числа

Простые числа имеют только два делителя: 1 и само число	делители числа 23: 23:1 и 23:23
Остальные числа имеют более двух делителей	число 12 имеет делители: 1, 2, 3, 4, 6, 12

Обыкновенные дроби

Основное свойство дроби	
Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число (выражение), не равное нулю	$\frac{a(b-c)}{m(b-c)} = \frac{a}{m}$ $\frac{25}{75} = \frac{1}{3}; \quad \frac{22}{33} = \frac{2}{3}$
Сравнение дробей	
Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, числитель которой больше	$\frac{7}{13} < \frac{11}{13}, \text{ т. к. } 7 < 11$
Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше	$\frac{11}{21} < \frac{11}{15}, \text{ т. к. } 21 > 15$
Сложение и вычитание	
Если знаменатели равны, то числители складываются (вычитаются), а знаменатели сохраняются	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ $\frac{13}{21} - \frac{7}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$
Если знаменатели разные, то сначала дроби приводят к наименьшему общему знаменателю, а потом складывают (вычитают) как дроби с одинаковыми знаменателями	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ $\frac{3}{7} + \frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 4 \cdot 7}{7 \cdot 9} =$ $= \frac{27 + 28}{63} = \frac{55}{63}$

Окончание таблицы

<p>При сложении (вычитании) смешанных чисел можно сложить (вычесть) их целые и дробные части</p>	$5\frac{1}{8} + 1\frac{5}{6} = 5 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{5}{6} =$ $= 6 + \frac{3 + 20}{24} = 6\frac{23}{24}$
Умножение дробей	
<p>При умножении дробей перемножают их числители и знаменатели</p>	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$
<p>При умножении смешанных чисел их сначала превращают в неправильные дроби, а потом перемножают</p>	$2\frac{2}{5} \cdot 7\frac{3}{8} = \frac{12}{5} \cdot \frac{59}{8} =$ $= \frac{177}{10} = 17\frac{7}{10}$
Деление дробей	
<p>При делении двух дробей деление заменяют умножением делимого на дробь, обратную делителю</p>	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc};$ $5\frac{1}{3} : 1\frac{5}{9} = \frac{16}{3} : \frac{14}{9} =$ $= \frac{16 \cdot 9}{3 \cdot 14} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$
Возведение дроби в степень	
<p>При возведении дроби в степень возводят числитель и знаменатель дроби в эту степень</p>	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243};$ $\left(1\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25}$

Пропорции

<p>Пропорция — равенство двух отношений $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ или $a:b = c:d$ ($a, b, c, d \neq 0$). Члены пропорции: a, d — крайние; c, b — средние</p>	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}; \quad 2:4\frac{2}{3} = 1:2\frac{1}{3}$
<p>Основное свойство: произведение крайних членов пропорции равно произведению средних её членов: $ad = bc$</p>	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}; \quad 8 \cdot 3 = 12 \cdot 2;$ $2:4\frac{2}{3} = 1:2\frac{1}{3};$ $4\frac{2}{3} \cdot 1 = 2 \cdot 2\frac{1}{3}$
<p>Каждый член пропорции — четвёртый пропорциональный член по отношению к трём другим</p>	$a = \frac{bc}{d}; \quad b = \frac{ad}{c};$ $c = \frac{ad}{b}; \quad d = \frac{bc}{a}$

Проценты

<p>Процент — это сотая часть некоторого числа (которое принимается за единицу)</p>	$1\% = \frac{1}{100}$ $1\% \text{ от числа } a \text{ — это } \frac{1}{100}a$
Преобразования процентов	
<p>Чтобы выразить число в процентах, нужно его умножить на 100 %</p>	$0,23 = 0,23 \cdot 100\% = 23\%;$ $0,07 = 0,07 \cdot 100\% = 7\%;$ $5 = 5 \cdot 100\% = 500\%$
<p>Чтобы записать проценты в виде числа, нужно число, стоящее перед знаком %, разделить на 100</p>	$13\% = 13:100 = 0,13;$ $2\% = 2:100 = 0,02;$ $123\% = 123:100 = 1,23$

Продолжение таблицы

Нахождение процента от числа	
<p>$p\%$ от числа a равно:</p> $\frac{p}{100} \cdot a$	<p>20% от числа 120 равно:</p> $\frac{20 \cdot 120}{100} = 24$
Нахождение числа по данному проценту	
<p>Если $p\%$ от некоторого числа равно m, то всё число a равно:</p> $a = \frac{m \cdot 100}{p}$	<p>Если 15% от некоторого числа равно 45, то всё число равно:</p> $\frac{45 \cdot 100}{15} = 300$
Нахождение процентного отношения двух чисел	
<p>Число a составляет от числа b:</p> $\frac{a}{b} \cdot 100\%$	<p>Число 22 составляет от числа 88:</p> $\frac{22}{88} \cdot 100\% = 25\%$
Увеличение (уменьшение) на $p\%$	
<p>Число a увеличилось на $p\%$:</p> $a + \frac{p\%}{100\%} = a \left(1 + \frac{p\%}{100\%} \right)$	<p>Число 110 увеличилось на 5%:</p> $110 \cdot \left(1 + \frac{5}{100} \right) =$ $= 110 \cdot 1,05 = 115,5$
<p>Число a уменьшилось на $p\%$:</p> $a - \frac{p\%}{100\%} = a \left(1 - \frac{p\%}{100\%} \right)$	<p>Число 110 уменьшилось на 5%:</p> $110 \cdot \left(1 - \frac{5}{100} \right) =$ $= 110 \cdot 0,95 = 104,5$