А.А. Рывкин
А.З. Рывкин

Справочник по МАТЕМАТИКЕ

Москва
Мир и Образование

Слово к читателю

Перед вами, дорогой читатель, **Справочник**. Это особый вид литературы, предназначенной, главным образом, для самообразования. Он позволяет получить ответы на вопросы: «Что означает данное понятие?», «Зачем оно нужно?», «Как им пользуются?», «В чем суть конкретного вывода теории?», «Чем этот вывод полезен на практике?» К Справочнику обычно обращаются для того, чтобы быстро восстановить забытое или получить сведения, хранить которые в памяти нецелесообразно.

Объем информации, помещаемой в Справочнике, определяется потребностями тех, кому Справочник адресован, и целями, ради достижения которых им могут воспользоваться.

Это — **Справочник по математике**. Он **адресован учащимся средней школы и колледжей,** а также **поступающим в высшие учебные заведения.** Он может быть полезен преподавателям колледжей и читателям, которым необходимо получить дополнительные сведения из разделов математики, помогающие глубже понять основы изучаемых ими дисциплин. Поэтому содержание Справочника шире программы школьного курса математики. Читать Справочник сплошь можно, ибо при его написании выдерживались определенные принципы подбора и изложения материала. Однако делать это не следует. Вы потратите лишнее время на получение информации, которая не требуется при достижении поставленной вами конкретной цели. Выясните сначала, какие сведения вам требуются, а затем проработайте соответствующий раздел Справочника. Делать это нужно с карандашом и бумагой, что поможет вам освоить даже тот материал, с которым вы ранее не встречались. Имеющиеся ссылки и указатель позволят быстро отыскать нужную информацию.

Вместе с тем, данный Справочник отличается от других подобных изданий стремлением помочь читателю кратчайшим путем получить те сведения, которые ему действительно нужны. Поэтому в книге много примеров, раскрывающих приемы решения задач на основе изложенных положений теории. Читателю демонстрируются возникающие трудности и ошибочные ходы; показано, как их следует преодолевать и по возможности избегать.

Этот Справочник может оказаться полезным и читателю, занимающемуся практическими расчетами. Здесь имеются разделы, позволяющие быстро найти нужную числовую информацию. Справочник содержит компактные шестизначные математические таблицы, а это уже точность, достаточная при решении многих прикладных инженерных задач. Есть также раздел, знакомство с которым поможет читателю правильно организовать, содержательно проанализировать и простейшим образом обработать реальный статистический материал.

Работа между авторами распределялась следующим образом. Часть первая, главы 23, 24 и 27 второй части и часть третья написаны А. А. Рывкиным, часть вторая (кроме глав 23, 24 и 27) — А. З. Рывкиным. Электронную версию таблиц подготовил К. А. Рывкин.

Альберт Рывкин

Часть 1

СВЕДЕНИЯ ИЗ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

I. Арифметика

1. Натуральные числа. Системы счисления

Действия над натуральными числами. Числа 1, 2, 3, ..., появившиеся в результате счета, называются натуральными. Для них определены следующие арифметические действия:

Таблица I.1

Наименование действия	Пример	Составляющие
Сложение	$31 + 12 = 43$	31 и 12 — слагаемые 43 — сумма
Вычитание — действие, обратное сложению	$43 - 12 = 31$	43 — уменьшаемое 12 — вычитаемое 31 — разность
Умножение	$12 \cdot 5 = 60 =$ $= 12 + 12 + 12 +$ $+ 12 + 12 =$ $= 5 + 5 + 5 + 5 +$ $+ 5 + 5 + 5 + 5 +$ $+ 5 + 5 + 5 + 5 =$ $= 60$	12 и 5 — сомножители 60 — произведение

Продолжение табл.

Наименование действия	Пример	Составляющие
Деление — действие, обратное умножению (деление на нуль невозможно!)	$60 : 12 = 5$ $\frac{60}{12} = 5$	$\begin{cases} 60 \text{ — делимое} \\ 12 \text{ — делитель} \\ 5 \text{ — частное} \end{cases}$
Возведение в степень — умножение одинаковых сомножителей (показатель степени — число сомножителей)	$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$	$\begin{cases} 3 \text{ — основание степени} \\ 4 \text{ — показатель степени} \\ 81 \text{ — степень} \end{cases}$
Извлечение корня — действие, обратное возведению в степень	$\sqrt[4]{81} = 3$	$\begin{cases} 81 \text{ — подкоренное число} \\ 4 \text{ — показатель корня} \\ 3 \text{ — корень} \end{cases}$

Действия сложения и умножения обладают свойствами переместительности, сочетательности и распределительности (см. с. 46).

Выражения, по определению не имеющие смысла: $\left[\frac{a}{0}\right]$, где $a \neq 0$ полагают не имеющим смысла, так как результат деления не существует; $\left[\frac{0}{0},\ 0^0\right]$ считают не имеющими смысла, поскольку результат соответствующих действий не может быть определен.

Порядок действий. Скобки. При любой записи действий над числами установлен определенный порядок вычислений. Порядок действий, определенный для арифметических выражений, распространяется и на другие математические выражения.

Основные арифметические действия упорядочены следующим образом: сначала выполняется возведение в степень, затем умножение и деление и в последнюю очередь сложение и вычитание.

Несколько действий сложения и вычитания, а также несколько действий умножения и деления выполняются в том порядке, в котором они записаны.

Если хотят, чтобы порядок действий в какой-нибудь записи отличался от установленного, то употребляют скобки.

Математические выражения заключают последовательно в круглые (...), квадратные [...(...)...] и фигурные {..[...(...)...]...} скобки; действия над числами выполняются последовательно: вначале в круглых, затем в квадратных и, наконец, в фигурных скобках.

Пример 1. Вычислить

$$\{[9 \cdot 4^2 : (2 \cdot 6) + (3^2 - 21 : 7)^2 + 5^3 \cdot 2^3 : 100] : 29\} \cdot 2.$$

Выполняем действия в круглых скобках:

$$2 \cdot 6 = 12, \quad 3^2 - 21 : 7 = 9 - 3 = 6.$$

Переписываем пример без этих скобок:

$$\{[9 \cdot 4^2 : 12 + 6^2 + 5^3 \cdot 2^3 : 100] : 29\} \cdot 2.$$

Теперь выполняем действия в квадратных скобках, соблюдая порядок действий:

$$9 \cdot 16 : 12 + 36 + 125 \cdot 8 : 100 = 144 : 12 + 36 + 1000 : 100 =$$
$$= 12 + 36 + 10 = 58.$$

Наконец, выполняем последние действия:

$$58 : 29 \cdot 2 = 4.$$

В записи математических выражений могут употребляться скобки одинаковой конфигурации. В этом случае в первую очередь выполняются действия во внутренних скобках:

$$(((3 + 7) \cdot 2 + (4 - 2) \cdot 5) : 10 + 7) \cdot 5 =$$
$$= ((10 \cdot 2 + 2 \cdot 5) : 10 + 7) \cdot 5 = (30 : 10 + 7) \cdot 5 =$$
$$= (3 + 7) \cdot 5 = 50.$$

Иногда деление обозначают чертой и производят вычисление, предварительно сократив дроби:

$$9 \cdot 4^2 : (2 \cdot 6) + 6^2 + 5^3 \cdot 2^3 : 100 =$$

$$= \frac{9 \cdot 4^2}{2 \cdot 6} + 6^2 + \frac{5^3 \cdot 2^3}{100} = 3 \cdot 4 + 36 + 5 \cdot 2 = 58.$$

Деление, обозначенное чертой, выполняют после вычисления выражений, стоящих в числителе и знаменателе.

Знак извлечения корня рассматривается как запись с помощью скобок.

При возведении в степень сначала выполняют действия, указанные в показателе степени:

$$2^{2^5} = 2^{32}.$$

Если требуется указать иной порядок действий, то употребляются скобки:

$$(2^2)^5 = 4^5 = 2^{10}.$$

Десятичная система счисления. Наиболее употребительна запись чисел с помощью *позиционной десятичной системы счисления*. В основании системы лежит число 10. Это означает, что счет ведется *единицами, десятками,* десятками десятков — *сотнями*, десятками сотен — *тысячами* и т.д. Для записи используются десять значков — *цифр*:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Одна и та же цифра имеет разный «вес» в зависимости от места, которое она занимает в записи числа. Так, на первом месте справа она означает число единиц, на втором — число десятков, на третьем — число сотен и т. д. В этом и заключается *позиционность* системы.

При записи число подразделяют на разряды и классы.

Разряд	*Класс*
единиц	единиц
десятков	
сотен	

Разряд	*Класс*
тысяч	
десятков тысяч	тысяч
сотен тысяч	
миллионов	
десятков миллионов	миллионов
сотен миллионов	

Далее идут классы миллиардов, триллионов и т.д.

В десятичной системе счисления каждое натуральное число может быть записано в виде

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где каждый из коэффициентов $a_0, \ldots, a_k$ принимает значения 0, 1, 2, 3, ..., 9. Например,

$$3845 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5.$$

Системы счисления. Число 10 избрано основанием общеупотребительной системы счисления, поскольку человеку с десятью пальцами на руках оно казалось самым удобным. С математической точки зрения этот выбор случаен. Ничто не мешает рассматривать позиционную систему счисления, в которой основанием служит 2, 3, 7, 12, 17 и вообще любое натуральное число, большее единицы.

В *системе счисления с основанием p* (она называется *p-ичной* — читается «пэ-ичной») будет p цифр, а каждое натуральное число запишется в виде

$$a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0.$$

В *двоичной* системе счисления имеются две цифры: 0 и 1; в *троичной* — три: 0, 1 и 2; в *восьмеричной* — восемь цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; а в *шестнадцатеричной* — шестнадцать. В последнем случае задать обозначения цифр уже труднее. Обычно для десяти первых цифр используют обозначения от 0 до 9, а затем вводят цифры, обозначаемые буквами A, B, C, D, E и G. Воспринимать записанные таким образом числа можно лишь после тренировки. Для облегчения понимания будем обозначать оставшиеся шесть цифр шестнадцатеричной системы счисления соответствующими им числами десятичной системы, заключая их в скобки: (10), (11), (12), (13), (14), (15). Такой способ поддается обобщению и позволяет формулировать общие правила для разных систем счисления.

Главным свойством любой системы счисления является *правило последовательного продвижения в счете*, т. е. правило, позволяющее из записи предыдущего числа получать запись числа, следующего за ним.

Поскольку все p цифр p-ичной системы счисления строго упорядочены и каждая следующая обозначает число на 1 большее, то каждая цифра, кроме нуля, есть продвижение предыдущей. Таким образом, продвижением цифры 0 будет цифра 1, а продвижением цифры $(p - 2)$ будет цифра $(p - 1)$. Продвижением цифры $(p - 1)$ будет число 10_p, имеющее два разряда и записанное двумя цифрами 1 и 0, т.е.

$$10_p = 1 \cdot p^1 + 0 \cdot p^0.$$

Значок p в выражении 10_p означает, что число записано в p-ичной системе счисления.

Теперь правило продвижения можно обобщить для любого числа, записанного в p-ичной системе счисления.

Если число n, записанное в p-ичной системе счисления, оканчивается любой цифрой, кроме цифры $(p - 1)$, то *продвижением числа* N будет число (по сути это $N + 1$), в котором цифра нулевого разряда числа N заменена на ее продвижение.

Если число N, записанное в p-ичной системе счисления, оканчивается цифрой $(p - 1)$, то *продвижением числа* N будет число, в котором цифра разряда единиц есть 0, а цифра разряда десятков есть продвижение цифры разряда десятков числа N.

Продвижением числа $(p - 1)(p - 1)$, записанного двумя цифрами $(p - 1)$ в p-ичной системе счисления, будет число 100_p, продвижением числа $(p-1)(p-1)(p-1)$ будет число 1000_p и т. д.

При переводе целого десятичного числа N в систему счисления с основанием p число N последовательно делят на p до тех пор, пока остаток не станет меньше $p-1$. Число N в системе счисления с основанием p будет получено, если записать подряд все цифры остатков, включая нули, так, чтобы остаток от следующего деления стоял перед остатком, полученным до этого. Цифра 0 появляется, когда деление происходит нацело. Последней ставят цифру частного, если она меньше p (деление этой цифры на p даст в остатке саму эту цифру).

В каждой системе счисления есть своя *таблица сложения* и своя *таблица умножения*. В них сведены правила сложения и умножения цифр. Зная эти правила, можно осуществлять сложение и умножение любых чисел, а также сформулировать алгоритмы для других арифметических действий.

Замечание. Формулировать правила действий для общего случая системы счисления с основанием p громоздко и непрактично.

Двоичная система счисления. Основание — число 2. Для записи используются лишь две цифры: 0 и 1; широкое применение двоичной системы в электронных вычислительных машинах связано с удобством изображения значения каждого разряда с помощью простейшего элемента: 1, когда элемент возбужден (например, по нему идет ток), 0 — в противном случае.

Записать число в двоичной системе счисления — значит представить его в виде суммы степеней числа 2. Для перевода числа из любой системы счисления в двоичную делят данное число на 2 и записывают остаток (0 или1), результат снова делят на 2 и новый остаток записывают слева от первого и т.д. Когда в частном получается 1, то она приписывается слева к последовательности остатков, и эта последовательность превращается в двоичную запись данного числа.

Пример 2. Записать в двоичной системе счисления число 23.

Осуществляя последовательное деление на 2, располагаем результаты справа налево, и записывая остатки по делимым, получаем следующую форму записи:

1	2	5	11	23
1	0	1	1	1

Итак, $23_{10} = 10111_2$.

Пример 3. Записать в двоичной системе счисления число 32 800. Вычисления запишутся в следующем виде:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1025	2050	4100	8200	16 400	32 800
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Итак, $32\,800_{10} = 1000000000100000_2$.

Для сокращения вычислений и приблизительной оценки числа удобно пользоваться табл. I.2. Получив на некотором этапе число, содержащееся в этой таблице и соответствующее некоторому n, приписываем слева к уже полученным двоичным разрядам n нулей и единицу.

Таблица I.2

Последовательные степени числа 2

n	2^n	n	2^n	n	2^n
0	1	10	1 024	20	1 048 576
1	2	11	2 048	21	2 097 152
2	4	12	4 096	22	4 194 304
3	8	13	8 192	23	8 388 608
4	16	14	16 384	24	16 777 216
5	32	15	32 768	25	33 554 432
6	64	16	65 536	26	67 108 864
7	128	17	131 072	27	134 217 728
8	256	18	262 144	28	268 435 456
9	512	19	524 288	29	536 870 912

СОДЕРЖАНИЕ

Часть 2

СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Часть 3

ОБРАБОТКА ДАННЫХ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ. ТАБЛИЦЫ