В. Е. ШНЕЙДЕР, А. И. СЛУЦКИЙ,
А. С. ШУМОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

1

Москва
Мир и Образование

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1 МЕТОД КООРДИНАТ. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

§ 1.1. Элементы теории множеств и математической логики. Действительные числа

В отдельных разделах данного курса используются некоторые понятия из теории множеств и математической логики; здесь мы приведем краткое изложение этих понятий.

1. Основные сведения о множествах. Понятие ***множества*** (или ***совокупности***) является одним из основных математических понятий. Множество есть определенная совокупность каких-либо объектов. Примерами множеств могут служить совокупность студентов данного вуза, множество страниц данной книги, множество всех четных чисел и т. д. Из приведенных примеров следует, что множество может содержать конечное или бесконечное количество предметов, или, как говорят, ***элементов***. В первом случае множество называется ***конечным***, во втором — ***бесконечным***.

Обычно множества обозначаются заглавными буквами A, B, M, N, ..., а их элементы — малыми буквами a, b, ... Если некоторый элемент x принадлежит множеству M, то употребляют следующую запись: $x \in M$. Если же элемент x не принадлежит множеству M, то пишут $x \notin M$.

Пусть M и N — два множества. Если все элементы множества M принадлежат множеству N, то говорят, что M <u>*содержится*</u> в N; это записывают так: $M \subset N$ или $N \supset M$. В этом случае множество M называется ***подмножеством*** множества N. Например, множество четных чисел есть подмножество множества целых чисел. Ясно, что если $M \subset N$, $N \subset L$, то $M \subset L$.

К числу множеств относят и множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество называется ***пустым*** и обозначается $\varnothing$. Например, множество действительных корней уравнения $x^2 + 4 = 0$ пусто, поскольку это уравнение не имеет действительных корней.

Пусть имеется конечное число множеств $M_1, M_2, ..., M_n$. ***Объединением*** (или ***суммой***) этих множеств называется множество M всех элементов, которые принадлежат <u>хотя бы одному</u> из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$. Это обозначают так:

$$M = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_n \text{ или } M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i.$$

Например, множество всех целых чисел есть объединение множеств четных и нечетных чисел; множество всех действительных чисел есть объединение множеств рациональных и иррациональных чисел.

Пусть множество M_1 состоит из чисел x, удовлетворяющих неравенствам $1 < x < 5$, а множество M_2 — из чисел y, для которых $2 < y < 7$. Тогда объединение этих множеств $M_1 \cup M_2$ состоит из чисел z, удовлетворяющих неравенствам $1 < z < 7$.

Пересечением (или ***произведением***) множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ называется множество M, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат <u>каждому</u> из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$. Это обозначают следующим образом:

$$M = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_n \text{ или } M = \bigcap_{i=1}^{n} M_i.$$

Если не существует элементов, принадлежащих каждому из множеств, то их пересечение, очевидно, — пустое множество.

Пусть M_1 — множество действительных чисел, меньших 3, а M_2 — множество действительных чисел, бóльших 2. Пересечением этих множеств $M_1 \cap M_2$ является множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $2 < x < 3$.

Пусть M_1 — множество чисел, бóльших 3, а M_2 — множество чисел, меньших 2; тогда, очевидно, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. В этом случае говорят, что множества M_1 и M_2 <u>*не пересекаются*</u>.

2. Кванторы общности и существования. Логическое следствие и логическая равносильность. При изложении некоторых разделов курса мы будем пользоваться знаками $\forall$ и $\exists$, называемыми соответственно ***кванторами общности*** и ***существования***.

6. Расстояние между двумя точками на координатной прямой. С помощью координат уже сейчас можно решать некоторые геометрические задачи. Найдем, например, расстояние между двумя точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на координатной прямой (на числовой оси).

Предположим сначала, что обе координаты неотрицательны, причем $x_2 > x_1$ (рис. 1.3, *а*). Тогда $OM_1 = x_1$, $OM_2 = x_2$ и, следовательно, искомое расстояние $d = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1$. Если по-прежнему x_1 и x_2 неотрицательны, но $x_2 < x_1$ (рис. 1.3, *б*), то $d = x_1 - x_2$.

Очевидно, в обоих случаях можно записать

$$d = |x_2 - x_1|. \tag{1.5}$$

Нетрудно убедиться, что в случаях, когда обе координаты x_1 и x_2 неположительны или когда x_1 и x_2 имеют разные знаки, формула (1.5) также справедлива.

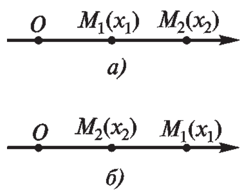

Рис. 1.3

П р и м е р. Найти расстояние между точками $M_1(-0{,}8)$ и $M_2(3{,}2)$.

Δ По формуле (1.5) находим

$$d = |3{,}2 - (-0{,}8)| = 3{,}2 + 0{,}8 = 4. \ \blacktriangle$$

§ 1.2. Координаты на плоскости и в пространстве

1. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости. Метод координат. Как было показано, положение точки на прямой определяется одним числом — координатой этой точки. Положение точки на плоскости определяется уже двумя числами.

Действительно, пусть на плоскости заданы две взаимно перпендикулярные числовые оси Ox и Oy, имеющие общее начало O (совпадающее с точкой пересечения осей) и общую единицу масштаба (рис. 1.4).

Плоскость, в которой расположены оси Ox и Oy, назовем ***координатной плоскостью*** и обозначим Oxy. Рассмотрим произвольно выбранную точку M координатной плоскости Oxy; пусть M_1 и M_2 — проекции точки M соответственно на оси Ox и Oy. Координата x точки M_1 на оси Ox называется ***абсциссой*** точки M, а координата y точки M_2 на оси Oy — ***ординатой*** точки M. Рассматриваемые совместно, числа x и y называются ***прямоугольными*** (или ***декартовыми**** ***прямоугольными***) ***координатами*** точки M.

Очевидно, каждой точке M на координатной плоскости соответствует единственная упорядоченная пара чисел x и y — ее прямоугольные координаты. Обратно, каждая пара чисел x и y определяет единственную точку M на плоскости Oxy. Действительно, числам x и y соответствуют вполне определенные точки M_1 и M_2 на осях Ox и Oy. Перпендикуляры к осям, восставленные в этих точках, пересекутся в единственной точке M с координатами x и y.

В дальнейшем, если говорится «дана точка» или «найти точку» на плоскости, то это соответственно означает, что заданы или требуется найти координаты этой точки.

Ось Ox называется ***осью абсцисс***, ось Oy — ***осью ординат***, а обе оси вместе — ***осями координат***. Общее начало осей абсцисс и ординат называется ***началом координат.***

Оси Ox и Oy делят координатную плоскость на четыре части, называемые ***четвертями*** (рис. 1.5). В I четверти $x > 0,\ y > 0$; во II четверти $x < 0,\ y > 0$; в III четверти $x < 0,\ y < 0$; в IV четверти $x > 0,\ y < 0$.

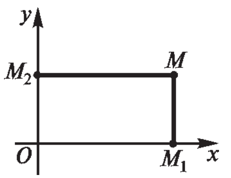

Рис. 1.4

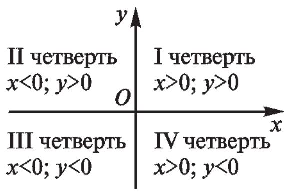

Рис. 1.5

* По имени французского математика и философа Р. Декарта (1596–1650).

§ 6.8. Приближенное решение уравнений

Пусть требуется найти действительные корни уравнения

$$f(x) = 0, \tag{6.89}$$

т. е. такие действительные значения x, при которых $f(x)$ обращается в нуль. Будем считать при этом, что функция $f(x)$ непрерывна и имеет первую и вторую производные. Отыскание корней уравнения состоит из двух этапов:

1) нахождение грубо приближенных значений корней;

2) уточнение найденных значений корней.

1. Нахождение грубо приближенных значений корней графическим методом. Для нахождения грубо приближенных значений корней строят график функции $y = f(x)$. Абсциссы точек пересечения графика с осью Ox служат корнями уравнения $f(x) = 0$ (рис. 6.34). Часто прибегают к такому приему: уравнение $f(x) = 0$ преобразуют к виду $f_1(x) = f_2(x)$ так, чтобы было легко построить графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Абсциссы точек пересечения этих графиков и являются корнями данного уравнения (рис. 6.35).

2. Уточнение найденных значений корней методом хорд и касательных. Пусть графическим методом найдено, что корень уравнения (6.89) лежит внутри отрезка $[a, b]$. Этот отрезок выбирают настолько малым, чтобы выполнялись следующие три условия:

а) на концах отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ имела значения разных знаков;

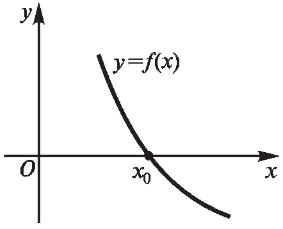

Рис. 6.34

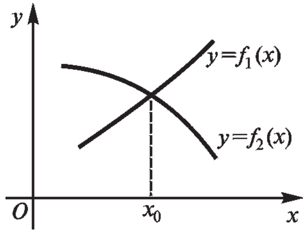

Рис. 6.35

В. Е. ШНЕЙДЕР, А. И. СЛУЦКИЙ,
А. С. ШУМОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

2

Москва
Мир и Образование

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 9 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 9.1. Функции нескольких переменных

1. Функция двух переменных и ее область определения. В § 1.4, п. 2 было дано определение функции. Если в этом определении под множеством M понимать некоторое множество пар (x, y) действительных чисел, а под множеством L — некоторое множество действительных чисел, то мы придем к понятию функции двух переменных.

Итак, ***функцией двух переменных*** *называется правило, по которому каждой паре чисел* $(x, y) \in M$ *соответствует единственное число* $z \in L$ *при условии, что каждое число* $z \in L$ *соответствует хотя бы одной паре* $(x, y) \in M$.

При этом x и y называют ***независимыми переменными*** (или ***аргументами***), z — ***зависимой переменной***, множество M — ***областью определения функции***, а L — ***множеством значений функции***. Как и в случае функции одной переменной, зависимую переменную также называют ***функцией*** (как и само правило соответствия).

Обозначения функции двух переменных аналогичны обозначениям функции одной переменной: $z = f(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$, $z = z(x, y)$ и т. д.

Пример 1. Площадь z прямоугольника со сторонами x и y находится по формуле $z = xy$. Эта формула определяет функцию двух переменных, т. е. правило, по которому каждой паре положительных чисел (x, y) соответствует единственное положительное число z. Областью определения M этой функции является множество всех пар положительных чисел (x, y), а множеством значений L — множество всех положительных чисел.

При нахождении частного значения z_0 функции $z = f(x, y)$, которое она принимает при заданных числовых значениях аргументов $x = x_0$ и $y = y_0$, пишут

$$z_0 = z\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \quad \text{или} \quad z_0 = f(x_0, y_0).$$

Например, если $z = f(x, y) = xy$, то

$$z\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = f(1, 2) = 1 \cdot 2 = 2.$$

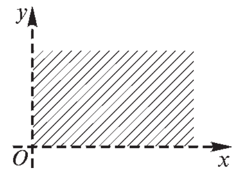

Рис. 9.1

Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует единственная точка $P(x; y)$ плоскости Oxy и обратно, каждой точке $P(x; y)$ соответствует единственная пара чисел (x, y), то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки $P(x; y)$. Поэтому вместо записи $f(x, y)$ пишут $f(P)$. В этом случае областью определения функции является некоторое множество G точек плоскости Oxy.

Так, в приведенном выше примере областью определения G функции $z = xy$, выражающей площадь прямоугольника с основанием x и высотой y, является множество точек I четверти, поскольку только для этих точек обе координаты положительны (рис. 9.1).

Как и в случае функции одной переменной, способы задания функции двух переменных могут быть самыми различными. Функция может быть задана с помощью таблицы (*табличный способ* задания функции). Для функции $z = f(x, y)$ такая таблица (таблица с двойным входом) имеет, например, следующий вид:

x \ y	0	1	2	3	4
0	100	81	63	45	28
1	100	83	65	48	32
2	100	84	68	51	35
3	100	84	69	54	39
4	100	85	70	56	42

В клетках левого столбца этой таблицы приводятся значения аргумента x, в клетках верхней строки — значения аргумента y. В остальных клетках таблицы находятся значения функции z. При этом если значение x выбирается в клетке i-й строки, а значение y — в клетке k-го столбца, то соответствующее значение z помещается в клетке, лежащей на пересечении i-й строки и k-го столбца. Например, при $x = 3$, $y = 2$ имеем $z = 69$.

Приведенная таблица соответствует значениям относительной влажности z (в процентах) в зависимости от температуры x (в градусах по Цельсию) сухого термометра и разности температур y сухого и влажного термометров.

Самым важным в настоящем курсе является *аналитический способ* задания, когда функция задается с помощью аналитического выражения (с помощью формулы). В примере 1 функция была задана аналитически, причем область ее определения мы нашли из геометрических соображений. Однако часто функция двух переменных задается только с помощью формулы, и при этом область определения функции не указывается.

Если функция двух переменных задана с помощью аналитического выражения без каких-либо дополнительных условий, то областью ее определения принято считать множество всех таких точек плоскости Oxy, для которых это выражение имеет смысл и дает действительное значение функции.

Например, многочлен первой степени

$$z = ax + by + c,$$

многочлен второй степени

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

и т. д. определены для всех пар чисел (x, y), т. е. во всей плоскости Oxy.

Рациональная функция двух переменных, т. е. отношение двух многочленов относительно x и y, определена во всех точках плоскости Oxy, за исключением тех точек, в которых знаменатель обращается в нуль. Так, рациональная функция

$$z = \frac{x^2 + 3y^2}{x - y}$$

определена на всей плоскости Oxy, за исключением прямой $x - y = 0$.

Пример 2. Найти область определения функции $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$.

Δ Функция задана только с помощью формулы. Областью определения этой функции является множество всех тех точек, для которых выражение $\ln(1 - x^2 - y^2)$ определено, т. е. множество точек, для которых

$$1 - x^2 - y^2 > 0, \text{ или } x^2 + y^2 < 1.$$

Так как выражение $x^2 + y^2$ представляет собой квадрат расстояния точки $P(x; y)$ от начала координат, то в область определения данной функции войдут только те точки, расстояния которых от начала координат меньше единицы. Множество всех таких точек находится внутри круга с центром в начале координат и радиусом, равным единице (рис. 9.2). ▲

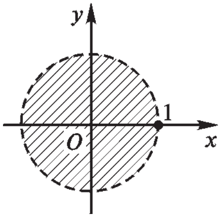

Рис. 9.2

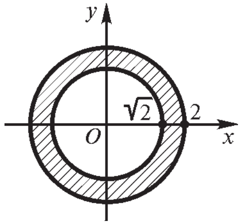

Рис. 9.3

Пример 3. Найти область определения функции

$$z = \arcsin(x^2 + y^2 - 3).$$

Δ Функция определена при условии

$$-1 \le x^2 + y^2 - 3 \le 1,$$

которое равносильно условию

$$2 \le x^2 + y^2 \le 4.$$

Граничными линиями области определения являются окружности $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$, которые также принадлежат этой области.

Таким образом, область определения функции состоит из всех точек, лежащих между окружностями $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$, и точек, лежащих на этих окружностях (рис. 9.3). ▲

2. График функции двух переменных. График функции одной переменной $y = f(x)$ в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости есть, вообще говоря, линия. Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве является в общем случае поверхность.

В самом деле, пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области G (рис. 9.4). Каждой точке P $(x; y)$ этой области соответствует определенное значение функции $z = f(P)$. Примем это значение z за аппликату некоторой точки M в системе координат $Oxyz$. Абсциссу и ординату для этой точки

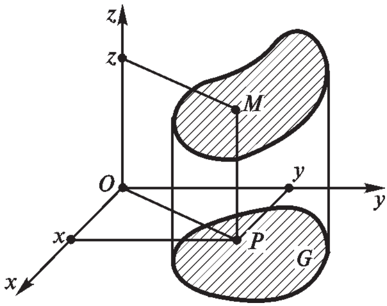

Рис. 9.4

Глава 13 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 13.1. Основные понятия

1. Случайные события. Частота. Вероятность. Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности массовых случайных явлений (событий).

Случайным событием (или просто ***событием***) называется всякое явление, которое может произойти или не произойти при осуществлении определенной совокупности условий. Теория вероятностей имеет дело с такими событиями, которые имеют массовый характер. Это значит, что данную совокупность условий можно воспроизвести неограниченное количество раз. Каждое такое осуществление данной совокупности условий называют ***испытанием*** (или ***опытом***).

Если, например, испытание состоит в бросании монеты, то выпадение герба является событием; если испытание — изготовление подшипника данного типа, то соответствие подшипника стандарту — событие; если испытание — бросание игральной кости, т. е. кубика, на гранях которого проставлены цифры (очки) от 1 до 6, то выпадение пятерки — событие.

События будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots$.

Пусть при n испытаниях событие A появилось m раз. Отношение $\frac{m}{n}$ называется ***частотой*** (***относительной частотой***) события A и обозначается $\mathbf{P}^*(A)$. Следовательно,

$$\mathbf{P}^*(A) = \frac{m}{n}.$$

Опыт показывает, что при многократном повторении испытаний частота $\mathbf{P}^*(A)$ случайного события обладает устойчивостью. Поясним это на примере.

Пусть при бросании монеты 4040 раз герб выпал 2048 раз. Частота появления герба в данной серии опытов равна

$$\mathbf{P}^*(A) = \frac{m}{n} = \frac{2028}{4040} = 0{,}5069.$$

При бросании той же монеты 12000 раз герб выпал 6019 раз. Следовательно, в этом случае частота

$$\mathbf{P}^*(A)=\frac{6019}{12000}=0{,}5016.$$

Наконец, при 24000 бросаний монеты герб появился 12012 раз с частотой

$$\mathbf{P}^*(A)=\frac{12012}{24000}=0{,}5005.$$

Таким образом, мы видим, что при большом числе бросаний монеты частота появления герба обладает устойчивостью, т. е. мало отличается от числа 0,5. Как показывает опыт, это отклонение частоты от числа 0,5 уменьшается с увеличением числа испытаний.

Наблюдаемое в рассмотренном примере свойство устойчивости частоты является общим свойством массовых случайных событий, а именно, всегда существует такое число, к которому приближается частота появления данного события, мало отличаясь от него при большом числе испытаний. Это число называется ***вероятностью*** события. Оно выражает объективную возможность появления события. Чем больше вероятность события, тем более возможным оказывается его появление. Вероятность события A будем обозначать через $\mathbf{P}(A)$. В рассмотренном выше примере вероятность появления герба, очевидно, равна 0,5.

Событие называется ***достоверным***, если оно в данном опыте обязательно должно произойти; наоборот, событие называется ***невозможным***, если оно в данном опыте не может произойти.

Пусть, например, из урны, содержащей только черные шары, вынимают шар. Тогда появление черного шара — достоверное событие; появление белого шара — невозможное событие.

Если событие достоверно, то оно произойдет при каждом испытании $(m=n)$. Поэтому частота достоверного события всегда равна единице. Наоборот, если событие невозможно, то оно ни при одном испытании не осуществится $(m=0)$. Следовательно, частота невозможного события в любой серии испытаний равна нулю. Итак, *вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного события равна нулю*.

Если событие A не является ни достоверным, ни невозможным, то его частота $\dfrac{m}{n}$ при большом числе испытаний будет мало отличаться от некоторого числа p (где $0<p<1$) — вероятности события A.

Совмещением (или ***произведением***) двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном наступлении как события A, так и события B. Это событие будем обозначать AB или BA.

Аналогично, совмещением нескольких событий, например A, B и C, называется событие $D = ABC$, состоящее в совместном наступлении событий A, B и C.

Объединением (или ***суммой***) двух событий A и B называется событие C, заключающееся в том, что произойдет по крайней мере одно из событий A или B. Это событие обозначается так: $C = A + B$.

Объединением нескольких событий называется событие, состоящее в появлении по крайней мере одного из них. Запись $D = A + B + C$ означает, что событие D есть объединение событий A, B и C.

Два события A и B называются ***несовместными***, если наступление события A исключает наступление события B. Отсюда следует, что если события A и B несовместны, то событие AB — невозможное.

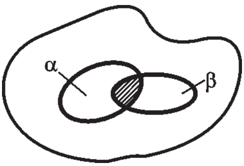

Рис. 13.1

Рассмотрим следующий пример. Будем следить за движением какой-нибудь определенной молекулы газа, заключенного в некотором объеме. Внутри этого объема выделим объемы α и β, частично перекрывающие друг друга (рис. 13.1). Пусть событие A — попадание молекулы в объем α, а событие B — попадание молекулы в объем β. Совмещением событий A и B является попадание молекулы в общую часть объемов α и β. Если объемы α и β не имеют общих точек, то ясно, что события A и B несовместны. Объединением событий A и B является попадание молекулы или только в объем α, или только в объем β, или же в их общую часть.

2. Аксиомы вероятностей. Пусть A и B — два несовместных события, причем в n испытаниях событие A произошло m_1 раз, а событие B произошло m_2 раз. Тогда частоты событий A и B соответственно равны $\mathbf{P}^*(A) = \dfrac{m_1}{n}$, $\mathbf{P}^*(B) = \dfrac{m_2}{n}$. Так как события A и B несовместны, то событие $A + B$ в данной серии опытов произошло $m_1 + m_2$ раз. Следовательно,

$$\mathbf{P}^*(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \mathbf{P}^*(A) + \mathbf{P}^*(B).$$