УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
М91

**Муравин, Г. К.**

М91 Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10 класс : учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. — 7-е изд., испр. — М. : Дрофа, 2020. — 285, [3] с. : ил. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-358-22960-0

Учебник входит в УМК по математике для 10—11 классов, изучающих предмет на базовом уровне. Теоретический материал разделён на обязательный и дополнительный. Каждый пункт главы завершается контрольными вопросами и заданиями, а каждая глава — домашней контрольной работой. В учебнике сделаны ссылки на интернет-ресурсы.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования и включён в Федеральный перечень.

**УДК 373.167.1:512**
**ББК 22.14я72**

ISBN 978-5-358-22960-0

# Оглавление

## *Уважаемые старшеклассники!*

Этот учебник продолжает курс алгебры 7—9 классов. В течение следующих двух лет вы разовьёте, обогатите и углубите свои математические знания. И, главное, научитесь их применять.

Знать математику — значит уметь решать задачи. Именно задачи вам предстоит решать на ЕГЭ.

В учебнике задания разной степени трудности. В заданиях, номера которых не имеют обозначений, вы не должны испытывать никаких затруднений.

Значком «○» отмечены задания, в которых путь к ответу связан с некоторыми техническими сложностями.

Задачи, над которыми следует подумать, имеют обозначение «●». План их выполнения полезно обсудить в классе с учителем.

Номера самых трудных задач имеют обозначение «*».

Значком «■» отмечены задания, которые следует выполнять с помощью калькулятора. В учебнике рассматривается калькулятор операционной системы Windows.

При изучении математики вам предстоит строить много графиков. В некоторых случаях работу в тетради полезно совмещать, а иногда и заменять работой на компьютере в одной из компьютерных программ построения и исследования графиков функций и уравнений. Такие программы свободно и бесплатно распространяются в Интернете. Мы рекомендуем две русифицированные программы GeoGebra и WinPlot.

В тексте учебника рекомендация использовать какую-нибудь компьютерную программу обозначается символом 💻.

Выполненные в этих программах решения задач красивы и наглядны. Многие из них размещены школьниками и учителями математики в Интернете, где их можно посмотреть. Надеемся, что и ваши решения можно будет там найти.

Кроме основного материала, изучение которого обязательно, в учебнике помещён и дополнительный материал, знакомство с которым желательно. Начало такого материала обозначается «▼», а конец «△».

В конце учебника в разделе «Основные формулы» вы можете найти нужную формулу.

Решив задачу, сравните свой ответ с ответом в учебнике. Если выполнить задание вы не можете, то прочитайте совет к задаче или посмотрите её решение. В этом вам помогут разделы «Ответы», «Советы» и «Решения».

Каждый пункт учебника завершается контрольными вопросами и заданиями, а каждая глава — домашними контрольными работами. Для домашней контрольной работы указывается примерное время, на которое рассчитано её выполнение.

Задания домашних контрольных работ разбиты на три уровня, которые соответствуют удовлетворительной, хорошей и отличной оценке. Так что вы сами сможете оценить свои математические достижения.

В учебник не вошли многие важные и интересные математические вопросы, поэтому для тех, кто интересуется математикой, в справочном разделе учебника имеется список дополнительной литературы и интернет-ресурсов.

***Авторы желают вам успехов!***

Глава 1

# ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

Вы уже знакомы с понятием функции из курса алгебры. Однако и в различных разделах математики, и в разных школьных учебниках определение функции даётся по-разному. Мы будем использовать одно из самых простых определений этого важнейшего математического понятия. С этим определением, а также с некоторыми связанными с понятием функции обозначениями и математическими терминами вы познакомитесь в первом пункте главы. Во втором пункте вы встретитесь с некоторыми уже знакомыми вам функциями и графиками, в третьем речь пойдёт о важных свойствах функций, часто применяемых при решении уравнений и неравенств, а в четвёртом — об основных преобразованиях графиков.

## 1. Понятие функции

В окружающем нас мире многие величины взаимосвязаны, например, количество букв на странице этого учебника зависит от номера страницы, время разморозки в СВЧ-печи зависит в основном от массы продукта, а площадь квадрата — от длины его стороны. Во всех трёх случаях каждому *допустимому* (возможному) значению второй из величин соответствует одно значение первой. Понятно, что в первом примере за номер страницы учебника можно взять любое натуральное число, не большее 285, во втором примере масса продукта ограничена рабочим объёмом печи, а длина стороны квадрата из третьего примера, конечно, положительна.

Мы привели здесь простые примеры зависимостей между двумя величинами. Однако на практике всё несколько сложнее. Так, например, время разморозки зависит не только от массы продукта, но и от его формы, и от мощности микроволнового излучения.

В математике обычно отвлекаются (абстрагируются) от физической природы величин и рассматривают зависимости между числовыми переменными.

Переменную $y$ называют **функцией** переменной $x$, если каждому допустимому значению $x$ соответствует единственное значение $y$.
Переменную $x$ называют **аргументом** функции $y$.

Правило, по которому для каждого допустимого значения $x$ находят соответствующее ему значение функции, обозначают какой-либо буквой. Так, например, чтобы указать, что значения $y$ получают из значений $x$ по правилу $f$, пишут:

$$y = f(x).$$

Множество допустимых значений аргумента называют **областью определения функции** и обозначают $D(f)$ или $D(y)$.
Множество, которое составляют все значения функции, называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$ или $E(y)$.

**Пример 1.** Найти область определения функции $y = \frac{4}{x}$ и вычислить значения функции при $x$, равном: 2, $\frac{3}{4}$, –6.

Р е ш е н и е. На аргумент $x$ формула $y = \frac{4}{x}$ накладывает единственное ограничение: $x \neq 0$, поэтому областью определения данной функции является объединение двух числовых промежутков (интервалов): $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Значение функции, которое соответствует, например, $x = 2$, обозначают $y(2)$:

$$y(2) = \frac{4}{2} = 2, \qquad y\left(\frac{3}{4}\right) = 4 : \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 4}{3} = \frac{16}{3}, \qquad y(-6) = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}.$$

О т в е т: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $y(2) = 2$, $y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{16}{3}$, $y(-6) = -\frac{2}{3}$.

П р и м е ч а н и е 1. В этом примере правило, по которому по значению аргумента находят значение функции, было представлено выражением $\frac{4}{x}$. Такой способ задания функции называют ***аналитическим***. Этим способом задано большинство функций, которые встретятся вам на страницах этого учебника.

Другая ситуация с областью определения возникает, если, например, буквами $x$ и $y$ обозначены длины сторон в сантиметрах прямоугольника, имеющего площадь 4 см$^2$. Тогда в силу положительности длин область определения функции $y = \frac{4}{x}$ представит собой числовой интервал $(0; +\infty)$.

П р и м е ч а н и е 2. Знак «∪», который использовался для ***объединения*** промежутков, в математике объединяет любые множества, например: $\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$.

Перевернув знак объединения, получим математический символ для ***пересечения*** множеств: $\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4\} = \{3\}$. Если повернуть знак объединения «∪» на 90°, то получим знак, который показывает, что все элементы одного из множеств являются элементами другого, например: $\{1; 2; 3\} \subset \{1; 2; 3; 4\}$. Как говорят в таких случаях, первое множество является ***подмножеством*** второго, или второе множество ***включает в себя*** первое.

**Пример 2.** Функция $y = f(x)$ (рис. 1) задана *графически*. Найти: 1) $D(f)$; 2) $f(-1)$; 3) значения аргумента, при которых значение функции равно 2; 4) нули функции; 5) наибольшее и наименьшее значения функции.

Р е ш е н и е. 1) Область определения этой функции — числовой промежуток $[-3; 6]$;

2) $f(-1) \approx -0{,}7$;

3) $f(x) = 2$ при $x \approx -2{,}9$, $x \approx 0{,}4$ и $x \approx 1{,}7$;

4) нули функции, т. е. значения $x$, при которых $f(x) = 0$:

$x \approx -2{,}3$, $x \approx -0{,}4$ и $x \approx 2{,}7$;

5) наибольшее значение функции: $\max f(x) = f(1) = 4{,}5$, наименьшее значение функции: $\min f(x) = f(6) = -3$.

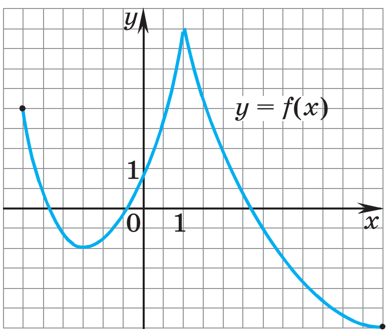


**Рис. 1**

**Пример 3.** На рисунке 2 изображён график функции $x = f(y)$, аргументом которой является переменная $y$. Является ли это множество точек координатной плоскости графиком функции $y$?

Решение. Чтобы некоторое множество точек координатной плоскости представляло собой график функции $y$, все эти точки должны иметь разные абсциссы — *любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, или имеет единственную точку, или не имеет ни одной общей точки с графиком функции y*. На рисунке вы видите, что ось ординат (прямая $x = 0$) пересекает данную кривую в двух точках, значит, эта кривая не является графиком функции $y$.

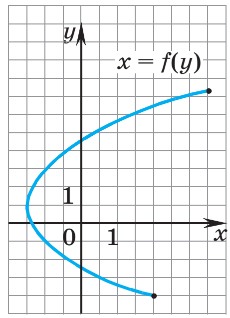


**Рис. 2**

## Упражнения

**1.** Является ли $y$ функцией $x$, если $y$ — это:
1) дата, а $x$ — температура воздуха в конкретном городе в 10 ч;
2) дата, а $x$ — количество автомобилей, выпущенных за данные сутки заводом АВТОВАЗ;
3) атмосферное давление в данной точке земной поверхности, $x$ — конкретное время суток?

**2.** Является ли $y$ функцией $x$, если $y$ — это площадь прямоугольника, а $x$ его: 1) диагональ; 2) периметр; 3) отношение длин его сторон? Объясните свой ответ.

**3.** Является ли $y$ функцией $x$, если $y$ — это число десятых в десятичной записи числа $x$? Является ли $x$ функцией $y$?

**4.**° Является ли $y$ функцией $x$, если $y$ — это двузначное число, а $x$ — сумма его цифр? Является ли $x$ функцией $y$?

**5.**° В книге 300 страниц. Петя каждый день прочитывает по 50 страниц этой книги. Обозначив буквой $y$ количество непрочитанных Петей страниц, а буквой $x$ — число дней, когда Петя читает данную книгу:
1) задайте аналитически функцию $y$;
2) укажите её естественную и реальную области определения.

**6.** Дана функция:

1) $f(x) = 2x + 3$;
2) $f(x) = -4x + 5$;
3) $f(x) = x^2 + 3x + 4$;
4) $f(x) = x^2 + 7x - 4$.

Найдите: а) $f(3)$; б) значения $x$, при которых $f(x) = 4$.

**7.●** Правило $f$, задающее функцию $y = f(x)$, ставит в соответствие каждому двузначному числу $x$ сумму его цифр $y$.

Найдите: 1) $D(f)$; 2) $f(17)$, $f(35)$, $f(59)$;
3) при каких значениях $x$ функция $f(x)$ принимает значение, равное 3;
4) наибольшее и наименьшее значения функции;
5)* какое значение функции соответствует наибольшему количеству значений аргумента.

**8.** По каждому из графиков функций, изображённых на рисунках 3—8, найдите: 1) $D(f)$; 2) $E(f)$; 3) $f(-2)$;

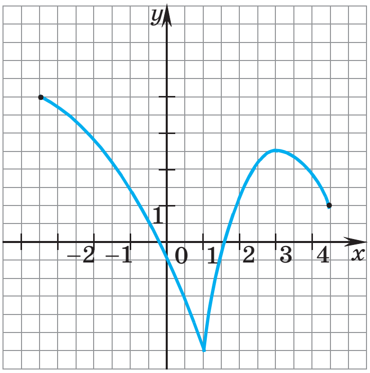


**Рис. 3**

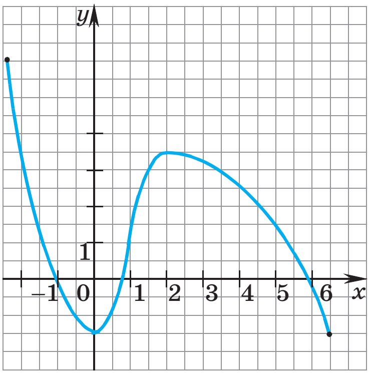


**Рис. 4**

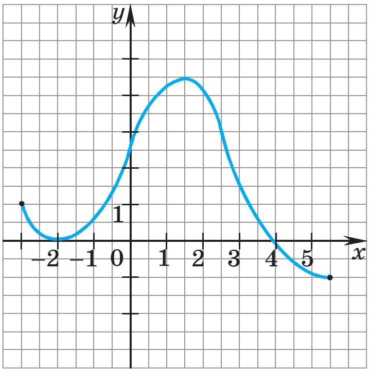


**Рис. 5**

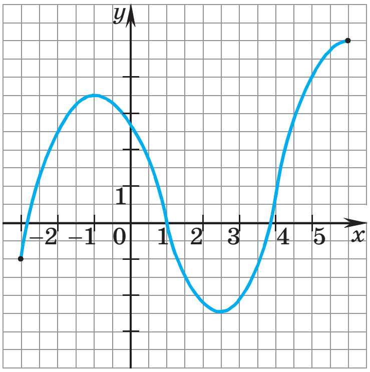


**Рис. 6**

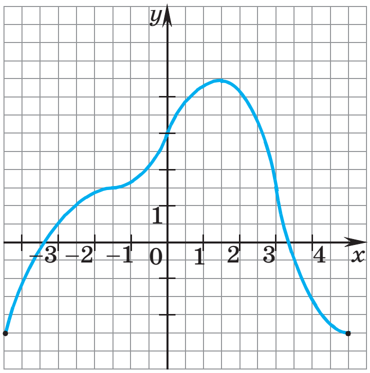


**Рис. 7**

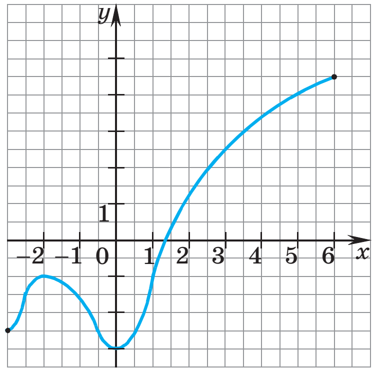


**Рис. 8**

4) при каком значении аргумента значение функции равно 3;

5) нули функции;

6) наибольшее и наименьшее значения функции.

**9.** Найдите область определения функции:

1) $y = 3x^2 - 5x + 1$;

2) $y = x^2 + \dfrac{3}{x} - 5$;

3) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$;

4) $y = \dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$;

5) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$;

6) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

**10.**○ 1) Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x} + 2$;

б) $y = \sqrt{x-3}$;

в) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$;

г) $y = \dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+3}}$;

д) $y = \sqrt{(x+2)(x-2)}$;

е) $y = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}$

ж) $y = \sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}$;

з) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$.

2) С помощью калькулятора вычислите с точностью до сотых значения функций при $x$, равном $\sqrt{2}$, если это возможно.

**11.** На графике показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов субботы. На оси абсцисс

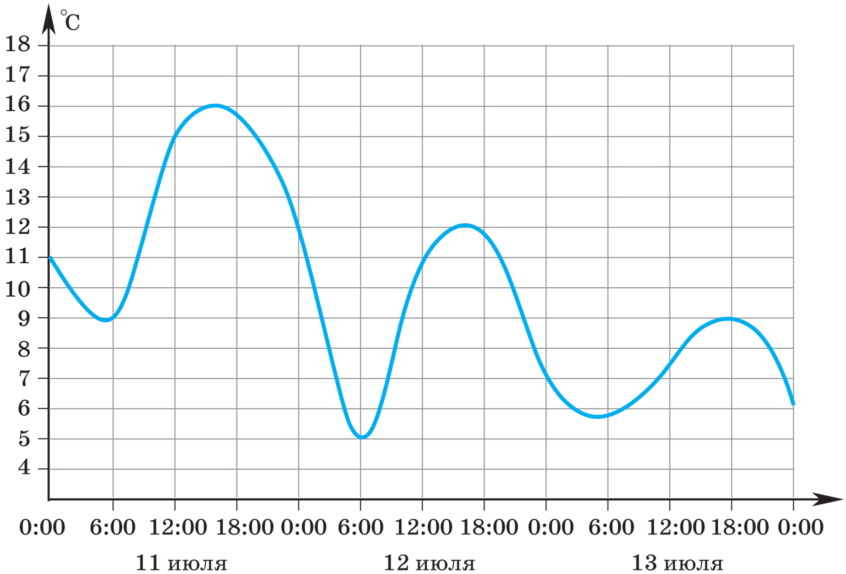


**Рис. 9**

отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия (рис. 9).

1) Когда была самая высокая, а когда самая низкая температура?

2) Какая температура воздуха была в воскресенье в 12 ч?

3) Сколько раз в течение трёх дней температура была 9 °C?

4) Определите наименьшую температуру воздуха в ночь с субботы на воскресенье.

**12.** Из квадрата со стороной 10 см вырезаны квадратики со стороной $x$ см, и из полученной фигуры сделана открытая коробка (рис. 10). Выразите объём $V$ (см$^3$) этой

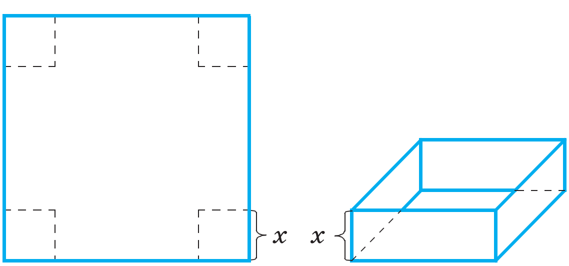


**Рис. 10**

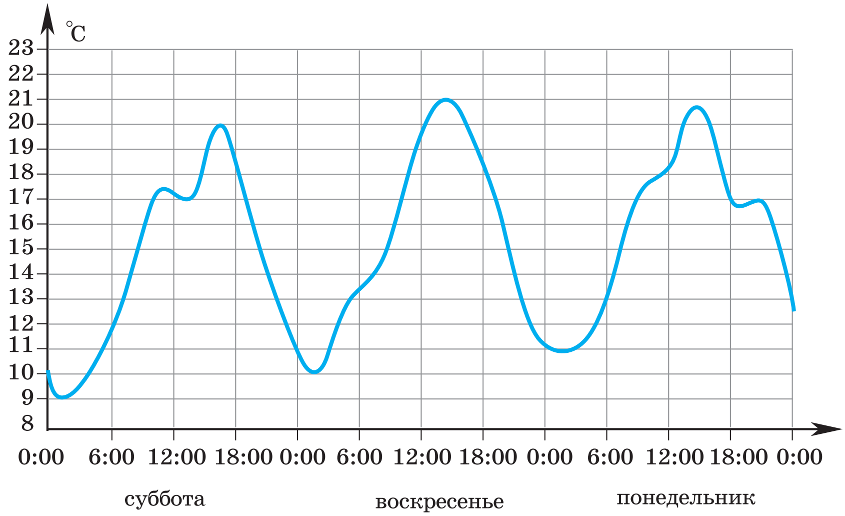


**Рис. 11**

коробки через $x$. Укажите область определения функции $y = V(x)$.

**13.** Постройте график какой-нибудь функции $f(x)$, для которой выполняются условия:
1) $D(f) = [-1; 5]$, $E(f) = [-3; 3]$;
2) $D(f) = [-3; 2]$, $E(f) = [-2; 4]$.

**14.** На графике (рис. 11) показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов субботы. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия.
1) Когда была самая высокая, а когда самая низкая температура?
2) Какая температура воздуха была в воскресенье в 12 ч?
3) Сколько раз в течение трёх дней температура достигала 17 °С?
4) Определите наименьшую температуру воздуха в ночь с воскресенья на понедельник.

**15.** В математике за некоторыми числовыми множествами закреплены стандартные обозначения: $\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел, $\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел, $\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел, $\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел, $\boldsymbol{R}_+$ — множество положительных действительных чисел.

Вставьте вместо многоточия один из знаков «$\cap$», «$\cup$», «$\subset$» так, чтобы получилось верное утверждение:
1) $\boldsymbol{N}\ldots\boldsymbol{Q}$; 2) $\boldsymbol{N}\ldots\boldsymbol{R}_+$; 3) $\boldsymbol{N}\ldots\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{N}$; 4) $\boldsymbol{R}_+\ldots\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{N}$.

## ! Контрольные вопросы и задания

**1.** В каких случаях одна переменная является функцией другой?

**2.** Что такое естественная область определения функции?

**3.** Приведите пример функции, нуль которой больше, чем $f(0)$.

**4.** Найдите $D(y)$ и $y(3)$, если $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

# 2. Прямая, гипербола, парабола и окружность

С линиями, названия которых приведены в заглавии этого пункта, вы не раз встречались. В нашем курсе им также отводится важная роль. Следующие три рисунка напомнят вам о линейной функции.

Прямая на рисунке 12 представляет собой график линейной функции $y = kx + l$ при $k > 0$, $l > 0$, на рисунке 13 — при $k < 0$, $l > 0$, а линейная функция на рисунке 14 задаётся формулой $y = l$, в которой, вообще, как бы нет аргумента. На самом деле угловой коэффициент $k$ этой прямой равен нулю: $y = 0 \cdot x + l$.

> Функция, которая при всех значениях аргумента принимает одно и то же значение, называется **константой** (или **постоянной**).

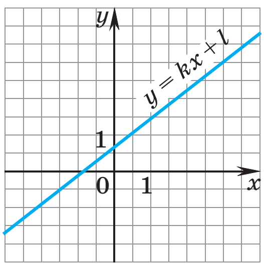


**Рис. 12**

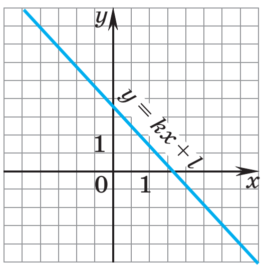


**Рис. 13**

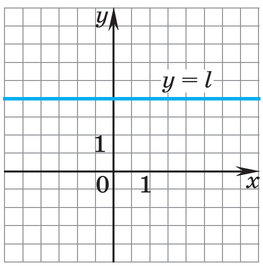


**Рис. 14**