

Содержание

Без математики никуда 7

10 Числа

Целые числа 12

Целые числа, сложение
и вычитание 13

Десятичная система 13

Знаки «плюс» и «минус» 14

Сложение и вычитание
в столбик 15

Вычитание через уменьшение 15

Вычитание через увеличение 15

Умножение и деление 16

Деление на ноль 17

Отрицательные числа 17

Арифметические хитрости 17

Умножение и деление
в столбик 18

Деление с остатком 18

Кратное 19

Общее кратное 19

Простые числа 20

Степени 21

Основание степеней 1 и 10 21

Возведение в степень
отрицательного числа 21

Показатель степени 0 21

Числа в квадрате 21

Арифметические законы 22

Переместительный
(коммутативный) закон 22

Сочетательный
(ассоциативный) закон 22

Распределительный
(дистрибутивный) закон 22

Выражения 23

Порядок действий 23

Дроби 24

Рациональные числа 24

Расширение и сокращение 24

Сравнение дробей 25

Виды дробей 26

Действия с дробями 27

Сложение и вычитание 27

Умножение и деление 29

Составные дроби 29

Десятичные дроби 30

Преобразование обыкновенной дроби
в десятичную 31

Вычисления с десятичными
дробями 32

Сложение и вычитание 32

Умножение 32

Деление 33

Проценты 34

Вычисление процентного числа,
процентной величины
и основной величины 35

Преобразование дробей,
десятичных дробей и процентов 36

Часто встречающиеся дроби, записанные
в виде десятичных дробей и процентов 36

Округление десятичных дробей 36

Диаграммы 37

Пропорция 38

Обратная пропорциональность 39

Огуречный парадокс 39

Извлечение корня 40

Квадратный корень 40

Вычислительные правила 41

Действительные числа 42

«Неквадратные» корни 43

Возведение в степень, показатель
которой — рациональное число 43

Стандартный вид числа 44

Арифметические законы
в действиях со степенями 45

Величины 46

Длина 46

Вес и масса 46

Время 47

Вычисления с величинами 47

Другие единицы измерения 47

Измерение площади 48

Перевод единиц измерения площади 48

Измерение объема 49

Перевод единиц измерения объема 49

Измерение объема жидкостей 49

Теория множеств 50

52 Геометрия

Планиметрия 54

Параллельные и непараллельные прямые 54

Расстояние 55

Система координат 55

Углы 56

Величина угла 56

Измерение и построение углов с помощью транспортира 57

Симметрия 58

Осевая симметрия 58

Вращательная симметрия 59

Симметрия относительно точки (центральная симметрия) 59

Геометрическое конструирование 60

Построение оси симметрии 60

Построение биссектрисы угла 60

Построение перпендикулярной прямой 61

Масштаб 62

Карты. План 62

Трехмерные объекты 63

Многоугольники 64

Названия многоугольников 64

Треугольники 66

Определение треугольника 66

Сумма углов треугольника 66

Разносторонний, или неправильный, треугольник 67

Равнобедренный треугольник 67

Равносторонний треугольник 67

Площадь треугольника 68

Высота треугольника 68

Формула 68

Доказательство формулы 69

Нахождение высоты или стороны 69

Четырехугольники 70

Площадь четырехугольника 72

Окружность и круг 74

Длина окружности 74

Площадь круга 76

Касательные 76

Секторы круга 76

Радианная мера угла 77

Равные фигуры 78

Равные треугольники 78

Многоугольники 79

Построение треугольников 80

Теорема Фалеса в окружности (Теорема об угле, опирающемся на диаметр окружности) 82

Построение касательной к окружности 83

Линии в треугольнике 84

Серединные перпендикуляры и описанная окружность 84

Биссектрисы и вписанная окружность 85

Высоты 86

Медианы 87

Прямые и углы 88

Вертикальные и смежные углы 88

Соответственные и накрест лежащие углы 89

Геометрические тела 90

Развертки геометрических тел 92

Косые проекции 94

Объем **96**

Площадь поверхности **98**

Трехмерная система координат **101**

Масштабирование
геометрических фигур **102**

Свойства **103**

Определение центра масштабирования
и коэффициента растяжения **103**

Теорема Фалеса **104**

Подобие **106**

Форматы бумаги А **107**

Теоремы прямоугольного
треугольника **108**

Теорема катетов **108**

Теорема Пифагора **109**

Теорема высоты **110**

Диагональ прямоугольника **111**

Частный случай: квадрат **111**

Диагональ в кубе **111**

Высота в равнобедренном
треугольнике **112**

Частный случай: равносторонний
треугольник **112**

Применение **113**

Векторы **114**

Действия с векторами **114**

Векторы в системе координат **115**

Вычисление длины вектора **115**

Трехмерные векторы **116**

Скалярное произведение **117**

Разложение на множители **122**

Преобразование частного **123**

Формулы сокращенного умножения **124**

Что такое уравнения? **126**

Линейные уравнения **127**

Решение уравнений **127**

Применение **128**

Неравенства **131**

Решение линейных неравенств **131**

Функции **133**

Интервалы **134**

Графики функций **135**

Построение графиков функций **136**

Прямая пропорциональность **138**

Обратная пропорциональность **139**

Линейные функции **140**

Нули функции **141**

Взаимосвязь между линейными
уравнениями и функциями **141**

Системы линейных уравнений **142**

Два уравнения с одинаковыми
переменными **142**

Разрешимость систем линейных
уравнений **144**

Квадратичные функции **146**

Функции вида $f(x) = x^2 + bx + c$ **147**

Запись функции в виде $f(x) = (x - d)^2 + e$ **148**

Плоские и круглые параболы **148**

Определение выражения функции **149**

Квадратные уравнения **150**

Дополнение до полного квадрата **150**

Формула корней квадратного
уравнения **152**

Формула p - q (формула корней приведенного
квадратного уравнения) **154**

Дискриминант **154**

Теорема Виета **156**

Определение выражения функции **157**

Точки пересечения **159**

Экстремальные задачи **160**

118

Алгебра

Вычисления с неизвестными **120**

Выражения в повседневной жизни **120**

Преобразование выражений **121**

Преобразование суммы **121**

Преобразование произведения **122**

Целые рациональные функции 162

- Вынесение за скобки 163
- Биквадратные уравнения 164
- Деление многочленов 165
- Кратность нулей функции 168
- Поведение на бесконечности 170
- Рисование графиков функций 171

Дробно-рациональные функции 172

- Гиперболы 172
- Точки разрыва 173

Уравнения с дробями 174

Функции и уравнения, содержащие радикал 176

- Графики 176
- Область определения 176
- Уравнения, содержащие радикал 177

Показательные функции 178

- Период полураспада и время удвоения 179
- Линейный и экспоненциальный рост 180

Логарифмы 182

- Логарифмическая функция 183
- Десятичный логарифм 183
- Действия с логарифмами. Вычислительные правила 184

Показательные уравнения 186

Графики функций 188

- Симметрия графиков 188
- Смещение графика функции 189

190 Тригонометрия

Соотношения сторон 192

- Прилежащие и противолежащие катеты 192
- Хорда окружности 193

Синус и косинус на единичной окружности 195

- Углы больше 90° 196
- Важные углы 197

Теорема синусов 198

Теорема косинусов 200

Функция синуса 201

- Функция косинуса 201

Общая функция синуса 202

204 Стохастика

Случайные эксперименты 206

- Эмпирический закон больших чисел 207
- Среднее арифметическое значение 207
- Медиана 209
- Пространство элементарных событий 210
- Событие 210
- Вероятность 210
- Эксперимент Лапласа 211

Многоуровневые случайные эксперименты 212

- Принцип вычислений 212
- Противоположное событие 213
- Древовидные диаграммы 214
- Извлечение с возвращением и без возвращения обратно 216
- Таблица сопряженности 219
- Таблицы сопряженности и древовидные диаграммы 220
- Условные вероятности 221
- Стохастическая независимость 223

Статистика как инструмент лжи 224

- Корреляция и причинно-следственная связь 225

Глоссарий 228

π

0

01

Без математики никуда

Математика считается самым нелюбимым школьным предметом. Ни одна другая дисциплина не сказывается настолько отрицательно на успеваемости большого количества учеников. При этом во многих случаях такой ситуации можно избежать — ведь большинству математика под силу. Это действительно так, и, когда приходят первые успехи, многим школьникам этот предмет начинает нравиться. Однако как добиться подобного? Как выработать уверенность в своих силах, если в дневнике приносишь домой одну плохую оценку за другой, ощущаешь себя в математике полным нолем и буквально через силу заставляешь себя садиться за домашние задания?

В этой ситуации родители способны оказать существенную помощь. Они могут подсказать своему ребенку выход из замкнутого круга плохих оценок и неприятия математики как школьного предмета, или же, что еще лучше, не позволить ребенку попасть в него. Данная книга, компактно охватывающая основной материал с 5 по 10 класс, призвана помочь в этом деле.

α

Находим пробелы в знаниях

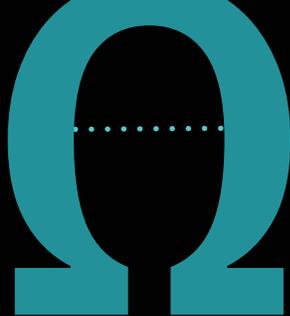
Часто люди недооценивают тот факт, что в математике, подобно карточному домику, все строится одно на другом. Например, те, кто не до конца понял дроби в младших классах, будут снова и снова совершать ошибки в старших классах. Многие ученики, понимающие текущий материал, все равно получают плохие оценки, так как не усвоили или забыли основы, что не позволяет им должным образом справляться с заданиями.

Если у ребенка имеются проблемы с математикой, то недостаточно сосредоточиться на текущем материале. Для того чтобы выявить и устранить пробелы в знаниях, родителям необходимо иметь общее представление о школьной программе. Данную книгу можно использовать как справочник для точечного восполнения пробелов в знаниях. Сначала необходимо определить проблемные темы, затем — найти в интернете и пособиях дополнительные задания, которые помогут в проработке материала.

К моменту окончания школы вопросов по математике может накопиться довольно много, и впоследствии справиться с ними будет не так уж и просто. Чем чаще ученики повторяют материал, тем лучше они его усваивают. Таким образом, простой рецепт успеха: **практика, практика и еще раз практика**. Для того чтобы достичь первых успехов как можно быстрее, нужно начинать с простых заданий. Затем уровень сложности следует постепенно повышать.

Учимся с удовольствием

Хорошую поддержку (по крайней мере, в младших классах) могут оказать обучающие игры на ПК и мобильном телефоне, которым дети с удовольствием уделяют много времени. Благодаря им можно практиковаться в решении математических примеров и задач. Проявите фантазию. Используйте математику в повседневной жизни: например практикуйте дроби при разделе пиццы или упражняйтесь в процентах на распродажах.



Правильный настрой не менее важен, чем практика. Тот, кто с самого начала убежден, что потерпит неудачу в изучении математики, быстро впадает в отчаяние. Если же ученику хватает уверенности в себе, то возрастает и терпение, а вместе с ним — шанс понять материал, справиться с заданиями и получить хорошие оценки. И нет ничего лучше для собственной мотивации, чем 9 или 10 в дневнике. Поэтому родителям следует хвалить и поощрять детей даже за небольшие успехи.

Если ребенок берется за дело и усердно учится, успех тем не менее может заставить себя ждать из-за слишком больших пробелов в знаниях или из-за нервозности на уроках, которая мешает сосредоточиться. Очень важна в этом случае роль родителей. Не ругайте своего ребенка, а хвалите за старания. Тем самым вы будете мотивировать его на дальнейшую работу. Через некоторое время прилежание, безусловно, окупится.

Правильная мотивация

Даже если раньше у родителей была плохая успеваемость по математике, они не должны делать на этом акцент при общении со своими детьми. Это может привести к негативному отношению к предмету. Конечно, родителям не стоит притворяться математическими гениями, но и такие фразы, как «В школе я совершенно не разбирался в математике, однако все же кое-чего достиг» также могут быть чреваты. Боязнь математики может передаваться следующему поколению.

Сегодня математика окружает нас повсюду. Она в мобильных телефонах, в интернете, в системах помощи водителю или в устройстве стиральных машин. Вся наша цивилизация построена на математике. Так что, безусловно, стоит приложить усилия, чтобы освоить хотя бы тот материал, который преподают в школе.

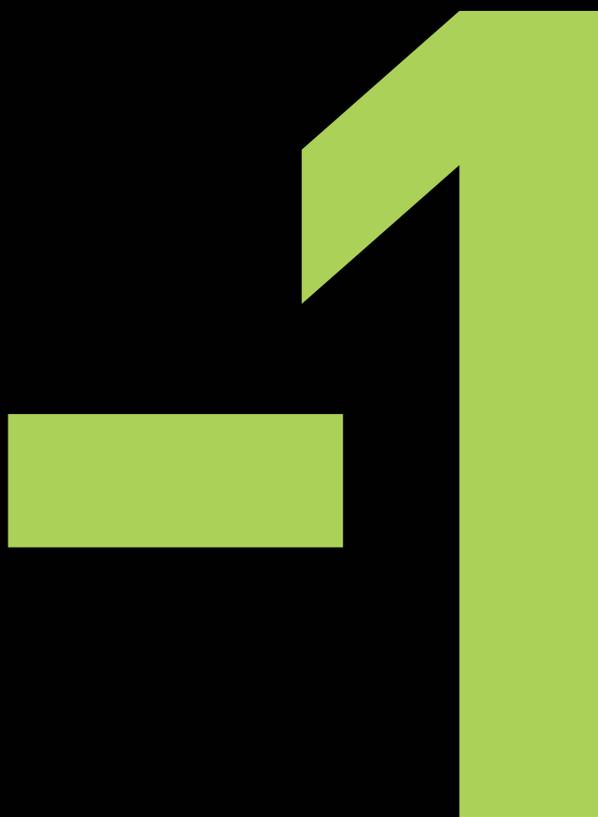


44

0

Числа

Не всё, но очень многое в математике вертится вокруг чисел. Есть разные виды чисел: натуральные, целые, действительные, дроби. Все они подчиняются одним и тем же фундаментальным вычислительным правилам.



Целые числа

Натуральные числа — это числа, которые используются при счете предметов.

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots\}$$

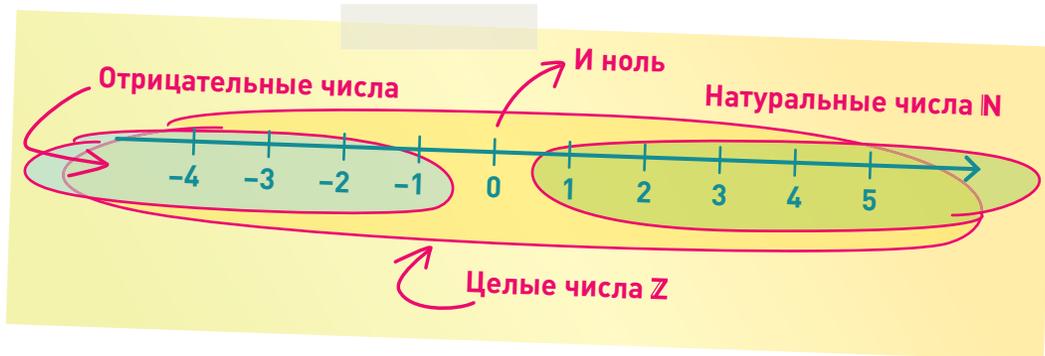
Если к ним также относится ноль, то мы пишем так:

$$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

Целые числа — это натуральные числа, им противоположные (отрицательные), и ноль.

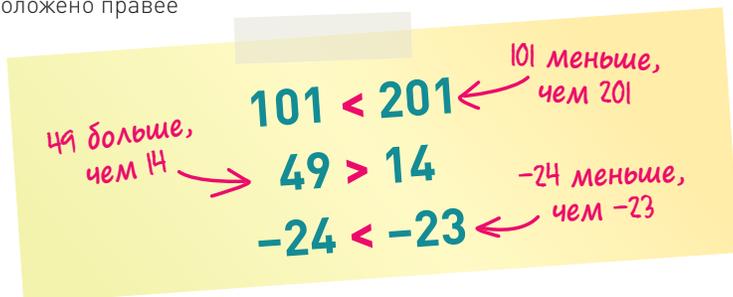
$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

Числа можно наглядно представить на **числовой оси**.



Числа мы сравниваем с помощью знаков «больше» и «меньше».

Больше то число, которое расположено правее на числовой оси.



Модуль — это расстояние от начала отсчета до точки координатной прямой, соответствующей этому числу.

Обозначается модуль так:

$$|-8| = 8$$

$$|3| = 3$$

$$|-34| = 34$$

Десятичная система

Одним из важнейших изобретений человечества является десятичная система счисления: это позиционная система счисления. Важно, какую позицию занимает цифра. Последняя цифра обозначает единицы, предпоследняя — десятки, третья с конца — сотни, четвертая с конца — тысячи и так далее. Последовательность цифр 4379, таким образом, обозначает следующее: 4 раза по тысяче, плюс 3 раза по сотне, плюс 7 раз по десятке, плюс 9 раз по единице, итого четыре тысячи триста семьдесят девять. Десятичная система позволяет представлять числа любой величины. К тому же она, в отличие от, например, римской системы счисления, в значительной степени облегчает арифметический счет.

Изобретения ноля

В V веке нашей эры в Индии возникла современная десятичная система счисления. Похожие системы счисления уже существовали до этого в Вавилоне. Однако на Дальнем Востоке мудрые головы изобрели новое число — ноль. Лишь с его помощью можно, например, отличить 4 от 40 и 400. До тех пор ученые люди не решались придумать отдельный символ для обозначения пустого места.

Сложение

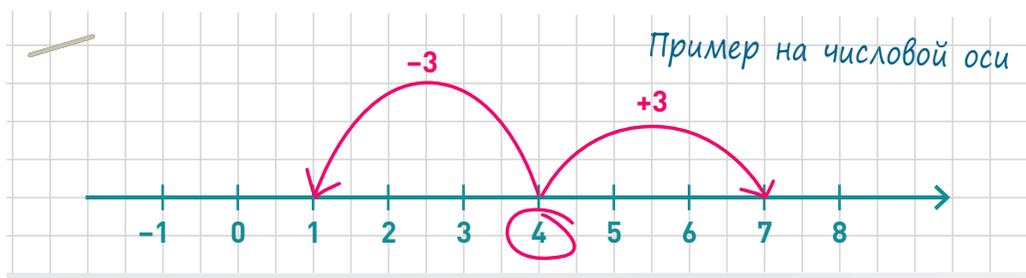
Первое слагаемое $4 + 3 = 7$ ← Сумма

Второе слагаемое

Вычитание

Уменьшаемое $4 - 3 = 1$ ← Разность

Вычитаемое



При сложении **последовательность элементов** не имеет значения.

При вычитании, напротив, она важна.

$$4 + 3 = 7 = 3 + 4 = 7$$

НО

$$4 - 3 = 1 \neq 3 - 4 = -1$$

Вычитание — это действие, обратное сложению.
 $4 + 3 = 7$ и $7 - 3 = 4$



Знаки «плюс» и «минус»

Сложение положительного и отрицательного чисел происходит путем вычитания отрицательного числа (вычитаемого) из положительного числа (уменьшаемого).

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

Уменьшаемое
Вычитаемое

При **сложении двух отрицательных чисел** сначала суммируются их модули, а затем перед суммой модулей ставится знак «минус».

$$-5 + (-3) = -(5 + 3) = -8$$

Вычитание отрицательного числа из положительного соответствует сложению модулей обоих чисел.

$$5 - (-3) = 5 + 3 = 8$$

При **вычитании положительного числа из отрицательного** мы складываем их модули и затем ставим знак «минус» перед получившимся числом.

$$-5 - 3 = -(5 + 3) = -8$$

При **вычитании отрицательного числа из отрицательного** мы прибавляем модуль вычитаемого к уменьшаемому.

$$-5 - (-3) = -5 + 3 = -2$$



Запомните

«Минус» на «минус» дает «плюс».

Обозначается так: $- - = +$

Сложение в столбик

Мы используем позиционную систему счисления и складываем числа поразрядно.

Пример

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 4565 \\ 7984 \\ \hline 12549 \\ \textcircled{5} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{1} \end{array}$$

- 1 Единицы:** 5 плюс 4 равно 9
- 2 Десятки:** 6 плюс 8 равно 14
- 3 Сотни:** 5 плюс 9 плюс 1 равно 15
- 4 Тысячи:** 4 плюс 7 плюс 1 равно 12
- 5 Десятки тысяч:** 0 плюс 0 плюс 1 равно 1

пиши 9
пиши 4, 1 в уме
пиши 5, 1 в уме
пиши 2, 1 в уме
пиши 1

Вычитание в столбик

Есть 2 способа вычитания в столбик.

Вычитание через уменьшение

Пример

$$\begin{array}{r} 63 \\ - 9742 \\ 6583 \\ \hline 3159 \\ \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{1} \end{array}$$

- 1 Единицы:** от 2 нельзя отнять 3. Берем 1 из разряда десятков (от 4 в десятках остается 3): 12 минус 3 равно 9
- 2 Десятки:** от 3 нельзя отнять 8. Берем 1 из разряда сотен (от 7 в сотнях остается 6): 13 минус 8 равно 5
- 3 Сотни:** 6 минус 5 равно 1
- 4 Тысячи:** 9 минус 6 равно 3

Вычитание через увеличение

Пример

$$\begin{array}{r} 11 \\ - 9742 \\ 6583 \\ \hline 3159 \\ \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{2} \textcircled{1} \end{array}$$

- 1 Единицы:** от 2 нельзя отнять 3. Пишем 1 (из 8 в десятках получается 9): 12 минус 3 равно 9
- 2 Десятки:** от 4 нельзя отнять 9. Пишем 1 (из 5 в сотнях получается 6): 14 минус 9 равно 5
- 3 Сотни:** 7 минус 6 равно 1
- 4 Тысячи:** 9 минус 6 равно 3