ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие..8

Глава 1. Нечеткие множества и операции над ними 15

1.1. Понятие нечеткого множества 15

1.2. Алгебраические операции над нечеткими множествами и их свойства 20

1.3. Методы построения функций принадлежности нечетких множеств...22

1.4. Задачи 33

Глава 2. Метрики на нечетких множествах и степень нечеткости 37

2.1. Метрики на нечетких множествах 37

2.2. Степень размытия нечеткого множества 39

2.3. Применения степени размытия 45

2.3.1. Применение степени размытия в задачах обработки изображений...45

2.3.2. Применение степени размытия для анализа согласованности позиций экспертов в задачах принятия решений 50

2.4. Задачи 53

Глава 3. Обобщение операций над нечеткими множествами 56

3.1. Понятия треугольной нормы и конормы 56

3.2. Треугольные нормы и копулы 60

3.3. Нечеткое отрицание...61

3.4. Функциональное описание треугольных норм и инвертора 61

3.5. Задачи 63

Глава 4. Нечеткие отношения 65

4.1. Понятие нечетких отношений и операции над ними 65

4.2. Бинарное нечеткое отношение на декартовом квадрате 69

4.3. Специальные виды бинарных нечетких отношений 73

4.3.1. Нечеткие отношения порядка 73

4.3.2. Нечеткие отношения подобия и различия 75

4.3.3. Нечеткое отношение сходства 76

4.4. Кейс: анализ нечеткого отношения согласованности рекомендаций финансовых аналитиков 78

4.5. Задачи 80

Глава 5. Принцип обобщения и нечеткие числа 83

5.1. Функция принадлежности сложных нечетких множеств 83

5.2. Понятие нечетких чисел и операции над ними 87

5.3. Нечеткие функции, уравнения, системы 97

5.4. Задачи 104

Глава 6. Числовые характеристики и расстояние между нечеткими числами 107

6.1. Числовые характеристики нечетких чисел 107

6.2. Метрики на множестве нечетких чисел 110

6.2.1. Метрики на основе расстояний между α*-срезами нечетких чисел* 110

6.2.2. Метрики на основе расстояний между функциями, описывающими нечеткие числа 112

6.2.3. Расстояния на основе числовых характеристик нечетких чисел 113

6.2.4. Нечеткое расстояние между нечеткими числами 114

6.2.5. Расстояние между дискретными нечеткими числами на основе решения транспортной задачи 116

6.3. Задачи 119

Глава 7. Сравнение нечетких чисел ... 121

7.1. Сравнение случайных величин ... 121

7.2. Сравнение нечетких чисел с помощью индекса ранжирования ... 124

7.3. Ранжирование нечетких чисел, основанное на сравнении с эталоном ... 127

7.4. Ранжирование нечетких чисел, основанное на вычислении индекса парного сравнения ... 129

7.5. Некоторые кейсы применения нечетких чисел ... 133

7.5.1. Применения нечетких чисел в сетевом анализе ... 133

7.5.2. Применения нечетких моделей к прогнозированию волатильности ... 140

7.6. Задачи ... 143

Глава 8. Некоторые обобщения понятия нечеткого множества ... 145

8.1. Интервальнозначные нечеткие множества и нечеткие множества 2-го типа ... 145

8.2. Интуиционистские нечеткие множества ... 147

8.3. Нечеткие случайные величины ... 151

8.4. Эпистемологическая и онтологическая точки зрения на понятие нечеткого множества ... 153

8.5. Задачи ... 154

Глава 9. Нечеткая оптимизация ... 157

9.1. Неразмытые и нечеткие задачи оптимизации ... 157

9.2. Нечеткое линейное программирование ... 162

9.3. Задачи ... 165

Глава 10. Нечеткая регрессия ... 167

10.1. Задача регрессии. Метод наименьших квадратов ... 167

10.2. Линейная регрессия с нечеткими параметрами. Возможностная модель ... 170

10.3. Линейная регрессия с нечеткими данными. Метрическая модель ... 175

10.4. Задачи ... 179

Глава 11. Многокритериальное принятие решений при нечетких данных ... 181

11.1. Общая постановка задачи многокритериального принятия решений при нечетких данных ... 181

11.2. Модель взвешенной суммы ... 183

11.3. Модель взвешенного произведения ... 188

11.4. Метод TOPSIS ... 189

11.5. Задачи ... 194

Глава 12. Нечеткая классификация и кластеризация ... 196

12.1. Нечеткая классификация ... 196

12.1.1. Постановка задачи классификации ... 196

12.1.2. Нечеткая классификация: нечеткие классы и четкие образы ... 197

12.1.3. Нечеткая классификация: нечеткие классы и нечеткие образы ... 203

12.2. Нечеткая кластеризация ... 207

12.2.1. Неразмытая кластеризация. Алгоритм k-средних ... 207

12.2.2. Нечеткая кластеризация. Нечеткий алгоритм c-средних ... 208

12.2.3. Нечеткий алгоритм Густафсона — Кесселя ... 211

12.2.4. Возможностный нечеткий алгоритм c-средних ... 213

12.3. Задачи ... 215

Глава 13. Элементы нечеткого логического вывода ... 217

13.1. Логические неразмытые и нечеткие высказывания ... 217

13.2. Нечеткая импликация ... 218

13.2.1. Определение нечеткой импликации через нечеткие замещения логических связок 218
13.2.2. Аксиоматическое определение нечеткой импликации 221
13.3. Нечеткие и лингвистические переменные 221
13.4. Нечеткие высказывания 224
13.5. Нечеткие правила дедуктивного вывода 225
13.6. Нечеткое моделирование 234
13.7. Применения нечетких правил вывода к прогнозированию волатильности 242
13.8. Задачи 245

Список обозначений 248

Литература 251

Предметный указатель 259

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория нечетких множеств за свою более чем 50-летнюю историю стала важной инструментальной частью прикладных исследований в самых разных научных направлениях и приложениях. Такая всевостребованность обусловлена, с одной стороны, тем, что сами данные, которыми мы оперируем, по большей части точно нам неизвестны, а нечеткость представляет одну из моделей описания таких данных. Эта суть так называемого эпистемологического подхода, в котором нечеткость связана со степенью нашего незнания о принадлежности элемента множеству. Другой, так называемый онтологический подход рассматривает нечеткость как один из атрибутов нашего мира. Например, такие качественные понятия, как «высокий», «богатый» и т.д., не связаны с нашим неполным знанием об объекте или явлении, но их удобно моделировать с помощью понятия нечеткого множества.

В учебных курсах по теории нечетких множеств условно можно выделить базовую часть, которую можно излагать с той или иной степенью подробности и доказательности, прикладную часть и (возможно) некоторые обобщения классических нечетких моделей (нечеткие случайные величины, интуиционистские нечеткие множества и т.д.). В настоящее время курсы, в которых изучаются основы теории нечетких множеств и их применение к решению прикладных задач, включаются в программы учебных дисциплин, как бакалаврского, так и по большей части магистерского уровня, совершенно разных направлений подготовки. В российских вузах такие курсы широко представлены в образовательных программах, связанных с управлением в технических системах, с автоматизацией промышленных и транспортных систем, с информационными системами и т.д., что отражает традиции советской и российской научных школ по теории нечетких множеств. Соответственно, довольно много и учебных пособий, в которых рассматриваются как элементы нечетких множеств, так и прикладные задачи, связанные с указанными направлениями подготовки. Для этих направлений востребованы прежде всего такие разделы, как нечеткая логика, нечеткие правила вывода, нечеткие системы, а также конкретные инженерные приложения.

Значительно реже теория нечетких множеств встречается в образовательных программах подготовки специалистов по экономике, социологии, политологии и т.д., т.е. в традиционно «вышкинских» направлениях подготовки. Причины этого связаны, скорее всего, с засильем идеологии в экономической и гуманитарных науках в советское время и в последующем ресурсном и кадровом провале в российской науке. Только в последние 15–20 лет стали появляться как серьезные прикладные исследования, связанные с применением нечетких множеств в экономической и гуманитарных науках, так и соответствующие курсы учебных дисциплин.

На наш взгляд, при анализе экономических, социологических, политологических данных должны быть востребованы модели «не-факторов» (нечеткости, неопределенности, неточности и т.д.), поскольку такие данные зачастую несут отпечаток нерационального поведения, манипулирования, наличия «черных лебедей» и т.д. и в результате уже не обладают «хорошими» статистическими свойствами. А для их анализа уже недостаточно использовать только техники, основанные на методах математической статистики.

Другой важной тенденцией последних десятилетий, которая не могла не отразиться на развитии теории и прикладных аспектах исследований по нечетким множествам, стала тотальная цифровизация всех сфер жизни. Это, в частности, привело к возможности и необходимости оперирования огромными массивами данных. В связи с этим бурно развивается научное направление «Наука о данных» (Data Science). Данные, которыми приходится оперировать, могут быть плохо структурированными, неполными, неточными, искаженными и т.д., поэтому в последнее время оказались остро востребованными модели обработки и анализа таких данных. Эта тенденция привела к развитию в теории нечетких множеств направлений, которые ориентированы на данные. Но пока в учебной российской литературе (как и в работах российских исследователей) разделы, связанные как с применением нечетких методов к обработке и анализу данных, так и с обработкой нечетких данных, отражены, на наш взгляд, недостаточно. В пособии предпринята попытка хотя бы частично восполнить этот недостаток. В частности, в нем рассмотрены такие прикладные разделы, связанные с обработкой и анализом нечетких данных, как нечеткая регрессия, нечеткая классификация и кластеризация, нечеткий сетевой анализ и т.д.

Другая прикладная направленность данного пособия связана с применением нечетких математических моделей в задачах принятия решений. Этому посвящены разделы сравнения и ранжирования нечетких данных, нечеткой оптимизации, многокритериального принятия решений с нечеткими данными, нечеткого логического вывода. По мнению авторов, анализ данных и принятие решений являются двуединой составляющей использования информации: анализ данных осуществляется для принятия решений, а принятие решений немыслимо без анализа данных. Поэтому выбранная прикладная направленность пособия вполне обоснованна. Кроме того, инструментарий нечетких множеств дает возможность использовать элементы принятия решений при анализе данных. Например, с помощью нечеткого логического вывода экспертная информация (принятие решений) может быть использована в задачах прогнозирования данных. Соответствующие кейсы также рассмотрены в данном пособии.

В советской научной литературе были две «настольные» книги для специалистов по нечеткой математике: переводная книга известного специалиста по теории нечетких множеств А. Кофмана (A. Kaufmann) [Кофман, 1982], которая вышла на русском языке в 1982 году (оригинальное издание 1977 года), и книга [Нечеткие множества..., 1986] под редакцией Д.А. Поспелова, вышедшая в 1986 году. Конечно, с тех пор исследования по теории нечетких множеств ушли далеко вперед, сместились некоторые акценты, изменился язык изложения материала и т.д. Среди зарубежной учебной литературы по нечеткой математике можно порекомендовать прежде всего два издания: книгу [Klir, Yuan, 1995], которая по стилю изложения, соотношению между строгостью и наглядностью, широте охвата прикладных разделов является, на наш взгляд, образцом учебного пособия, и книгу [Wang et al., 2009], которая в большей степени заинтересует математиков и поклонников строгого и доказательного стиля изложения. В качестве дополнительной литературы к отдельным разделам данного пособия можно порекомендовать монографии [Lee, 2005] (простой, но широкий по охвату приложений курс), [Liu, Pedrycz, 2009] (сильно математизированный, строгий по изложению курс с минимумом приложений), [Ekel et al., 2010] (принятие решений с нечеткими данными), [Siler, Buckley, 2005] (нечеткие экспертные системы и нечеткий вывод), [Wolkenhauer, 2001] (нечеткие модели анализа данных).

Данное учебное пособие написано на основе материалов курса «Нечеткость и неопределенность в анализе данных и принятии решений», который авторы читают магистрам программы «Науки о данных» факультета компьютерных наук на протяжении нескольких последних лет. Подытоживая, можно указать следующие отличия этой книги от других ранее публиковавшихся изданий по теме нечетких множеств:

- ориентация рассматриваемого теоретического материала как на задачи анализа данных, так и на задачи принятия решений;
- адресация пособия широкому кругу «вышкинских» читателей — студентам, аспирантам и преподавателям образовательных программ, как непосредственно связанных с анализом данных (прежде всего на факультете компьютерных наук), так и использующих анализ данных и принятие решений в своих исследованиях, — бизнес-информатикам, экономистам, финансовым аналитикам, политологам и т.д.;

- освещение разделов нечеткой математики, редко встречающихся в российской литературе, но широко востребованных в анализе данных и принятии решений: нечеткая регрессия, нечеткая оптимизация, нечеткие классификация и кластеризация и др.;
- ориентация рассматриваемых прикладных методов на традиционно «вышкинские» задачи анализа данных и принятия решений в социально-экономической сфере, финансах, политологии и т.д.;
- большое количество задач, примеров и кейсов (более 70 разобранных примеров и кейсов, более 150 задач для самостоятельного решения), что делает возможным использование данного издания не только как учебника, но и как задачника;
- включение в книгу «кейсов» конкретных проектов;
- разумное сочетание математической строгости и популярности изложения.

Структура учебного пособия следующая.

В главе 1 введены и рассмотрены базовые понятия теории нечетких множеств: функция принадлежности, срезовые множества. Введены алгебраические операции над нечеткими множествами и рассмотрены их свойства. Обсуждены основные методы построения функций принадлежности нечетких множеств: по массивам данных, по экспертным оценкам.

Глава 2 посвящена метрикам на нечетких множествах и такой важной характеристике, как степень нечеткости (размытия). В частности, рассмотрены два приложения показателя размытия. Первое приложение связано с применением этой характеристики нечетких множеств в задачах обработки изображений. Второе приложение посвящено применению показателя размытия для анализа согласованности позиций экспертов в задачах принятия решений.

В главе 3 обсуждаются такие обобщения операций над нечеткими множествами, как понятия треугольных норм и конорм. Рассмотрены также функциональные описания обобщенных операций и их приложения к моделированию нечетких высказываний.

В главе 4 вводится и рассматривается понятие нечеткого отношения, операций над нечеткими отношениями. Особое внимание уделено композиции нечетких отношений, нечетким отношениям на декартовом квадрате множеств, нечетким отношениям, обладающим определенными свойствами (рефлексивные, транзитивные и т.д.), построению транзитивного замыкания. Обсуждаются различные типы транзитивности нечетких отношений. Отдельно рассматриваются такие важные виды нечетких отношений, как различные отношения нечеткого порядка, нечеткие отношения подобия, различия и сходства, связь отношения различия с ультраметрикой. В качестве прикладной задачи рассмотрено приложение нечетких отношений к анализу согласованности рекомендаций финансовых аналитиков.

В главе 5 рассматриваются два важнейших понятия теории нечетких множеств: принцип обобщения и понятие нечеткого числа. Принцип обобщения Заде (Zadeh's extension principle) вводится как эвристическое правило, но подробно обсуждается мотивация такого введения. Основное внимание в этой главе уделено понятию нечеткого числа. Рассмотрены общий вид нечетких чисел (LR-представление), основное аналитическое свойство нечетких чисел о коммутативности непрерывного отображения с операцией среза нечетких чисел, сведении операций над нечеткими числами к соответствующим операциям над интервалами. В то же время достаточно подробно обсуждаются ограниченность алгебраических свойств над нечеткими числами и следствия этих ограничений для возможности решения уравнений с нечеткими числами. В этой же главе рассмотрены функции, уравнения и системы уравнений с нечеткими числами. Материал проиллюстрирован примерами экономического анализа (нечеткие функции спроса и предложения, нечеткая модель Леонтьева).

Глава 6 посвящена числовым характеристикам нечетких чисел. Речь прежде всего идет об ожидаемом значении, о степени нечеткости и мере неопределенности нечетких чисел. Кроме того, в этой главе рассматриваются всевозможные концепции метрик на множестве нечетких чисел: на основе расстояния между срезами нечетких чисел, на основе расстояния между LR-функциями, на основе расстояния между числовыми характеристиками, понятие нечеткого расстояния на основе транспортной метрики.

В главе 7 рассматриваются некоторые концепции введения порядка на множестве нечетких чисел. Это важная для приложений задача, которая является частью задачи принятия решения с нечеткими данными, сравнения и ранжирования вариантов нечетких решений и т.д. В этой же главе рассмотрены два приложения, в которых используется инструментарий работы с нечеткими числами, сравнения нечетких чисел, решения систем уравнений с нечеткими числами. Первое приложение связано с сетевым анализом нечетких графов, т.е. взвешенных графов, в которых веса — нечеткие числа. Второе приложение связано с применением нечетких чисел к прогнозированию волатильности фондового или валютного рынка. А именно речь идет о нечетких модификациях асимметричных GARCH-моделей.

Глава 8 посвящена некоторым обобщениям понятия нечеткого множества. В частности, рассмотрены интервальнозначные нечеткие множества, интуиционистские нечеткие множества и нечеткие случайные величины.

Последние пять глав посвящены прикладным аспектам теории нечетких множеств применительно к решению задач анализа данных и принятия решений.

Так, в главе 9 приведена общая постановка и одна из концепций решений задачи нечеткой оптимизации в рамках так называемой симметричной модели. Более подробно рассмотрены постановка и решение задачи нечеткого линейного программирования.

Глава 10 посвящена задаче нечеткой регрессии. В частности, обсуждается возможностная модель решения задачи линейной регрессии с нечеткими параметрами и метрическая модель решения задачи линейной регрессии с нечеткими данными.

В главе 11 рассматривается многокритериальная задача принятия решений при нечетких данных. В частности, подробно описаны нечеткая модель взвешенной суммы и нечеткий метод TOPSIS.

Глава 12 посвящена задачам нечеткой классификации и кластеризации. В случае классификации неразмытых образов по нечетким классам рассмотрена одна из методик (причем сугубо «нечеткая методика», отличная от методов статистического оценивания плотностей вероятностей) построения функций принадлежности описания нечетких классов по обучающей выборке. В задаче классификации нечетких образов по нечетким классам описан метрический способ классификации и подход на основе введения меры близости. Достаточно подробно в этой главе рассмотрены методы нечеткой кластеризации. Это и наиболее популярный нечеткий алгоритм *c*-средних, и алгоритм Густафсона — Кесселя, и возможностный алгоритм кластеризации.

Наконец, последняя глава 13 пособия посвящена вопросам нечеткого логического вывода. В первых разделах этой главы рассмотрены различные нечеткие обобщения операции логической импликации. Далее рассмотрены понятия нечеткой и лингвистической переменных, приведены некоторые виды простейших нечетких высказываний и нечеткие правила дедуктивного вывода. В частности, рассмотрено общее композиционное правило вывода и такие его популярные реализации, как правило Мамдани и правило Ларсена, а также соответствующие схемы вывода, состоящие из многих правил и антецедентов. Затем рассмотрены некоторые схемы нечеткого моделирования на основе правил логического вывода, в частности популярная адаптивная схема вывода Такаги — Сугено. Кроме того, обсуждаются аппроксимативные возможности систем нечеткого моделирования. Завершается глава рассмотрением возможности применения систем логического вывода в задаче прогнозирования волатильности фондового или валютного рынка.

Большинство рассмотренных в этом пособии приложений (кейсов) тех или иных разделов теории нечетких множеств — это результат адаптации под учебное пособие материалов курсовых или выпускных квалификационных работ, выполненных студентами под руководством авторов пособия (соответствующие ссылки есть в тексте пособия). Поэтому авторы выражают всем им свою благодарность. Кроме того, авторы благодарят студентов магистерской программы «Науки о данных» НИУ ВШЭ, которые были первыми слушателями курса лекций, положенного в основу данного пособия.

Особую признательность авторы выражают рецензентам данного пособия профессорам А.Н. Каркищенко и Б.И. Яцало за ряд ценных замечаний.

И конечно, авторы признательны своим коллегам — преподавателям департамента математики на факультете экономических наук, которые поддержали издание этой книги, академическому руководителю программы «Науки о данных» С.О. Кузнецову, который был инициатором появления соответствующего курса лекций, руководителю департамента математики на факультете экономических наук Ф.Т. Алескерову, руководству факультета экономических наук за инициативную поддержку решения о включении соответствующих разделов в программу цикла курсов по цифровой экономике.

Авторы благодарят РФФИ за частичную поддержку работы грантом № 18-01-00877-а. А.Е. Лепский благодарит за частичную поддержку работы Международный центр анализа и выбора решений НИУ ВШЭ, поскольку книга подготовлена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Глава 1
НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1. Понятие нечеткого множества

Нечеткие множества можно рассматривать как обобщение обычных (четких или неразмытых) множеств. В нечетком множестве A не указывается точно, принадлежит или не принадлежит произвольный элемент x множеству A, а устанавливается лишь степень принадлежности, которая может принимать значения из некоторого множества $U \subseteq \mathbb{R}$, называемого множеством принадлежности. Всюду далее будем считать, если не оговорено противное, что $U = [0; 1]$. Понятие нечеткого множества и рассмотренные ниже операции над такими множествами впервые были введены Лотфи Заде в 1965 году в работе [Zadeh, 1965].

Пусть задано универсальное множество X. Тогда, по определению, произвольное *нечеткое множество* $A \subseteq X$ можно задать с помощью *функции принадлежности* $\mu_A(x)$, $x \in X$, которая отображает универсальное множество X во множество U, т.е. $\mu_A\colon X \to U$. Отметим, что обычное (четкое или неразмытое) множество A также принадлежит классу нечетких множеств, при этом функция принадлежности $\mu_A(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ является характеристической функцией множества A.

Обозначения нечетких множеств:

1) $\mu_A(x)$ для несчетного множества X;

2) $A = \{(x_1 \mid \mu_A(x_1)); (x_2 \mid \mu_A(x_2)); \ldots\}$, $A = \left\{\dfrac{x_1}{\mu_A(x_1)}; \dfrac{x_2}{\mu_A(x_2)}; \ldots\right\}$,

$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & \ldots \\ \hline \mu_A(x_1) & \mu_A(x_2) & \ldots \\ \hline \end{array}$ для конечного или счетного множества X.

Нечеткое множество A имеет следующую логическую интерпретацию. Функция принадлежности $\mu_A(x)$ отражает степень истинности высказывания $V = \{x \in A\}$, оцениваемого из интервала $U = [0; 1]$: если $\mu_A(x) = 0$, то высказывание V считается точно ложным, а когда $\mu_A(x) = 1$ — точно истинным.

Пример 1.1. Рассмотрим высказывание «$x \approx 2$» («число x приближенно равно 2»). Тогда этому высказыванию можно поставить в соответствие нечеткое множество чисел A, близких по значению к числу 2:

$$A = \{(x_i \mid \mu_A(x_i)) \colon i = 1,\ 2,\ \ldots\} =$$
$$= \{(1{,}2 \mid 0{,}1);\ (1{,}5 \mid 0{,}6);\ (1{,}7 \mid 0{,}8);\ (2 \mid 1);\ (2{,}2 \mid 0{,}85),\ \ldots\}$$

в дискретном случае (см. рис. 1.1*а*). Или можно поставить в соответствие непрерывную функцию принадлежности $\mu_A(x) = \max\{0;\ 1 - |x-2|\}$, график которой изображен на рис. 1.1*б*. ■

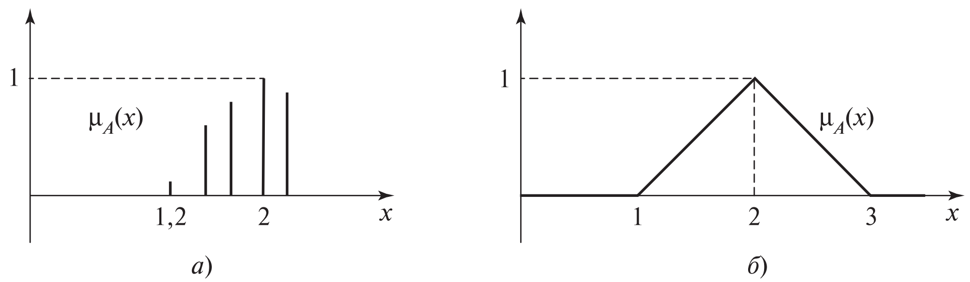
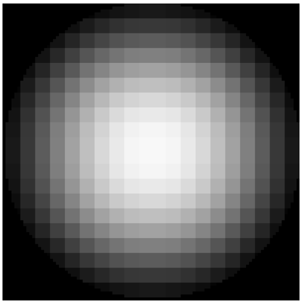


Рис. 1.1. Дискретная (*а*) и непрерывная (*б*) функции принадлежности нечетких чисел, соответствующих высказыванию «примерно 2»

Очевидно, что рассмотренное нечеткое множество *A* было определено из эвристических соображений и отражает субъективную точку зрения на установление значений истинности высказывания «$x \approx 2$» при различных x.

Общий вид функции принадлежности нечеткого множества задается характером моделируемого высказывания или объекта, а значения конкретных параметров функции принадлежности могут определяться посредством статистического или экспертного оценивания или носить субъективный характер. Более подробно о способах оценивания функции принадлежности см. раздел 1.3.

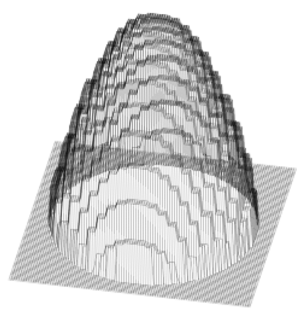
Природа нечеткости может быть различной. Более подробно об этом пойдет речь в разделе 8.5. Например, нечеткость может отражать недостаток информации об объекте, как в примере 1.1. Или сам описываемый объект нельзя «четко» определить. Примерами таких объектов прежде всего являются качественные понятия: «большой», «высокий», «яркий», «сильный» и т.д. Например, на рис. 1.2*а* показано оцифрованное полутоновое изображение светлого круга на однородном темном фоне, на рис. 1.2*б* — матрица значений яркости этого изображения в пикселях, на рис. 1.2*в* — график соответствующей функции яркости. Множество пикселей изображения светлого круга можно считать нечетким множеством. Про многие пиксели нельзя достоверно сказать, принадлежат они кругу или нет. Но значения



а)

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	20
0	0	0	0	0	20	20
0	0	0	11	11	20	20
0	11	11	11	11	20	20
15	26	26	26	26	35	35
15	26	26	26	26	35	35
15	26	26	26	26	35	35
15	26	26	26	26	35	35
28	39	39	39	39	48	48
28	39	39	39	39	48	...

б)



в)

Рис. 1.2. (*а*) — полутоновое изображение круга; (*б*) — матрица значений яркости; (*в*) — график функции яркости

функции яркости будут характеризовать степень истинности высказывания, что данный пиксель принадлежит кругу.

Примеры графиков наиболее популярных функций принадлежности, когда $X = \mathbb{R}$, приведены на рис. 1.3. Примерами нечетких множеств на $\mathbb{R}$ с функцией принадлежности, изображенной на рис. 1.3*а*, могут быть: «число принадлежит примерно отрезку $[a, b]$», «человек имеет средний рост», «компания будет иметь среднюю прибыль» и т.д. А примерами нечетких множеств с функцией принадлежности, изображенной на рис. 1.3*б*, являются: «высокий человек», «компания будет иметь большую прибыль» и т.д.

Если нечеткое множество задано на универсальном множестве $X = \mathbb{R}$, то его называют еще нечеткой величиной. Нечетким величинам и их наиболее важному частному случаю — нечетким числам — посвящены главы 5, 6 и 7 этого пособия.

Пример 1.2. Найдите аналитически функции принадлежности, графики которых приведены на рис. 1.3*а*, *б* в классе: 1) кусочно-линейных функций; 2) модульно-линейных функций (т.е. функций, которые могут быть получены с помощью применения конечного числа раз арифметических операций и операции суперпозиции к линейной $y = kx + b$ и модульной $y = |x|$ функциям).

Решение. а) Нечеткое множество (величина), определенное на $\mathbb{R}$, функция принадлежности которого имеет вид, показанный на рис. 1.4*а*, называется треугольным нечетким числом (см. главу 5). Это множество полностью определяется тремя числами a, b, c ($a \le b \le c$) при условии, что эти множества — нормальные, т.е. $\sup\limits_x \mu_A(x) = 1$, и обозначаются $A(a, b, c)$. Нетрудно видеть, что функция

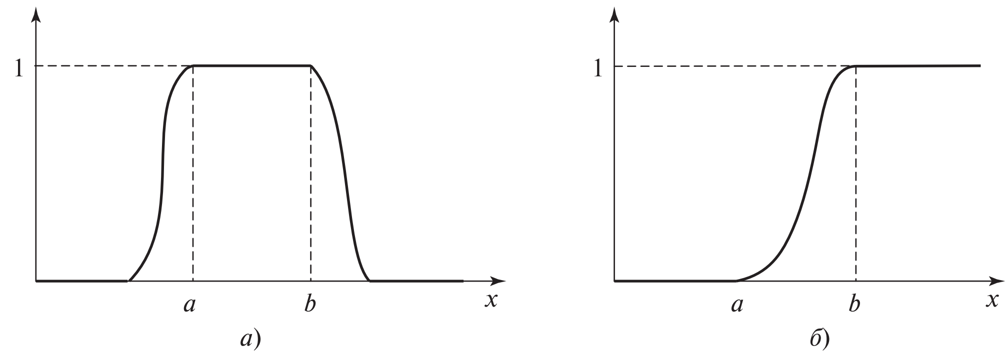


Рис. 1.3. Примеры графиков функций принадлежности нечетких множеств на $\mathbb{R}$

принадлежности будет иметь следующий вид в классе кусочно-линейных функций:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a;\, b], \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & x \in (b;\, c], \\ 0, & x \notin [a;\, c] \end{cases} = \max\left\{0;\ \min\left\{\dfrac{x-a}{b-a};\ \dfrac{c-x}{c-b}\right\}\right\}.$$

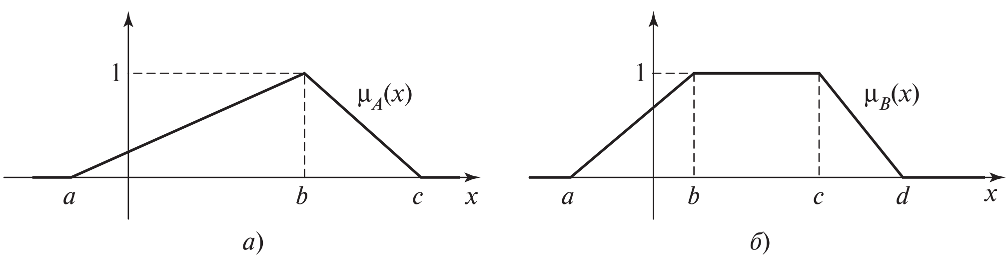


Рис. 1.4. Графики треугольной (*а*) и трапециевидной (*б*) функций принадлежности

Функция принадлежности μ_A в классе модульно-линейных функций будет иметь вид

$$\mu_A(x) = \begin{cases} k_1|x-b| + k_2(x-b) + 1, & x \in [a;\, c], \\ 0, & x \notin [a;\, c], \end{cases}$$

где $k_1 = -\dfrac{c-a}{2(b-a)(c-b)}$, $k_2 = -\dfrac{2b-a-c}{2(b-a)(c-b)}$, если $a < b < c$. Например, нечеткое число $A(1; 2; 3)$ с функцией принадлежности $\mu_A(x) = \max\{0; 1 - |x-2|\}$ может моделировать высказывание «число x примерно равно 2».

б) Нечеткое множество (величина), определенное на $\mathbb{R}$, функция принадлежности которого имеет вид, показанный на рис. 1.4*б*, называется *трапециевидным* нечетким числом. Более подробно такие нечеткие множества рассмотрены в главе 5. Это множество полностью определяется четырьмя числами a, b, c, d ($a \le b \le c \le d$) при условии, что эти множества — нормальные, т.е. $\sup\limits_x \mu_A(x) = 1$, и обозначаются $A(a, b, c, d)$. Функция принадлежности трапециевидного числа в классе кусочно-линейных функций будет иметь вид

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a; b], \\ 1, & x \in (b; c], \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & x \in (c; d], \\ 0, & x \notin [a; d] \end{cases} = \max\left\{0;\ \min\left\{\dfrac{x-a}{b-a};\ 1;\ \dfrac{d-x}{d-c}\right\}\right\}.$$

А в классе модульно-линейных такая функция будет иметь вид

$$\mu_B(x) = \begin{cases} k_1(|x-b| - (x-b)) + k_2(|x-c| + x - c) + 1, & x \in [a; d], \\ 0, & x \notin [a; d], \end{cases}$$

где $k_1 = -\dfrac{1}{2(b-a)}$, $k_2 = -\dfrac{1}{2(d-c)}$, если $a < b$ и $c < d$. ■

Нечеткое множество A можно однозначно описать с помощью его так называемых α-уровней (α-срезов, α-cuts)

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \ge \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1].$$

Заметим, что α-срезы являются неразмытыми множествами и справедливо включение: $A_\alpha \subseteq A_\beta$, если $\alpha \ge \beta$. Множество α-срезов $\{A_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}$ определяет нечеткое множество A однозначно, так как справедлива следующая теорема о декомпозиции.

Теорема 1.1 (о декомпозиции). *Для любого нечеткого множества A верно равенство*

$$\mu_A(x) = \sup\{\alpha : x \in A_\alpha\} = \sup_\alpha\{\alpha\chi_{A_\alpha}(x)\}, \tag{1.1}$$

где χ_B — характеристическая функция множества B.

Пример 1.3. Для нечеткого множества $A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0,7 & 0,3 & 0,5 \\ \hline\end{array}$ декомпозиция будет следующей:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 0,7 & 0,3 & 0,5 \\ \hline\end{array} = \max\left\{0,7\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline\end{array};\ 0,3\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array};\ 0,5\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}\right\}.$$

Здесь предполагается, что умножение строки на число и операция max выполняются покоординатно. ■

С помощью формулы (1.1) можно также синтезировать нечеткое множество из конечной последовательности вложенных неразмытых множеств $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$, удовлетворяющей условию: $1 \geq \alpha_i \geq \alpha_j > 0 \Rightarrow A_{\alpha_i} \subseteq A_{\alpha_j}$.

Вместе с нестрогим рассматривают также и строгие α-срезы $\operatorname{int} A(\alpha)$ множества A, для которых

$$\operatorname{int} A_\alpha = \{x \in X: \mu_A(x) > \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Неразмытое множество $\ker A = A_1$ называют *ядром* нечеткого множества A, а множество строгого уровня $\operatorname{supp} A = \operatorname{int} A_0$ — *носителем* нечеткого множества A[1]. Таким образом, ядро — это элементы универсального множества X, которые определенно принадлежат множеству A, а носитель — это элементы множества X, которые могут принадлежать A.

1.2. Алгебраические операции над нечеткими множествами и их свойства

Теоретико-множественные отношения и операции над нечеткими множествами определяются как продолжение соответствующих отношений и операций над неразмытыми множествами (или, что то же самое, над их характеристическими функциями). Пусть заданы нечеткие множества A, B, C на универсальном множестве X. Тогда по определению:

1) нечеткие множества A и B равны ($A = B$), если $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ для любого $x \in X$;

2) нечеткое множество A включается в нечеткое множество B ($A \subseteq B$), если $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ для любого $x \in X$;

[1] Понятие носителя нечеткого множества отличается от понятия носителя функции. Обычно под носителем функции понимают замыкания множества ненулевых значений функции.

3) нечеткое множество C — объединение нечетких множеств A и B ($C = A \cup B$), если $\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x); \mu_B(x)\}$ для любого $x \in X$;

4) нечеткое множество C — пересечение нечетких множеств A и B ($C = A \cap B$), если $\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x); \mu_B(x)\}$ для любого $x \in X$;

5) нечеткое множество C — алгебраическая сумма нечетких множеств A и B ($C = A + B$), если $\mu_C(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$ для любого $x \in X$;

6) нечеткое множество C — алгебраическое произведение нечетких множеств A и B ($C = A \cdot B$), если $\mu_C(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$ для любого $x \in X$;

7) нечеткое множество C — дополнение нечеткого множества B ($C = \neg B$), если $\mu_C(x) = 1 - \mu_B(x)$ для любого $x \in X$ (если $U = [0; 1]$).

Данные теоретико-множественные операции и отношения можно выразить через соответствующие «четкие» операции и отношения над α-уровнями нечетких множеств A, B и C. Например,

1) $A = B$, если $A_\alpha = B_\alpha$ для любого $\alpha \in (0; 1]$;

2) $A \subseteq B$, если $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ для любого $\alpha \in (0; 1]$;

3) $A \cup B = C$, если $A_\alpha \cup B_\alpha = C_\alpha$ для любого $\alpha \in (0; 1]$;

4) $A \cap B = C$, если $A_\alpha \cap B_\alpha = C_\alpha$ для любого $\alpha \in (0; 1]$;

5) $\neg A = C$, если $\neg(A_{1-\alpha}) = C_\alpha$ для любого $\alpha \in (0; 1]$.

Пусть $\mathcal{F}(X)$ — множество всех нечетких подмножеств множества X, включая пустое множество $\varnothing$ (с функцией принадлежности $\mu_\varnothing(x) = 0$ для любого $x \in X$) и все множество X (с функцией принадлежности $\mu_X(x) = 1$ для любого $x \in X$). Нетрудно показать, что множество $\mathcal{F}(X)$ относительно пары операций ($\cap$, $\cup$), рассматриваемых как операции умножения и сложения, образует алгебру. В частности, для операций ($\cap$, $\cup$) будут выполняться свойства коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, идемпотентности (см. табл. 1.1).

В отличие от алгебры неразмытых множеств алгебра нечетких множеств ($\mathcal{F}(X)$, $\cap$, $\cup$) не будет булевой алгеброй [Владимиров, 1969], поскольку для нее не выполняется свойство дополнительности относительно унарной операции дополнения $\neg$, т.е. $A \cup \neg A \neq X$ (закон исключенного третьего) и $A \cap \neg A \neq \varnothing$ (закон противоречия). Тем не менее в алгебре ($\mathcal{F}(X)$; $\cap$, $\cup$, $\neg$) выполняются законы инволюции ($\neg(\neg A) = A$) и де Моргана ($\neg(A \cup B) = (\neg A) \cap (\neg B)$, $\neg(A \cap B) = (\neg A) \cup (\neg B)$). Алгебра нечетких множеств ($\mathcal{F}(X)$; $\cap$, $\cup$, $\neg$), для унарной операции $\neg$ которой выполняется закон инволюции и правило де Моргана, называется алгеброй де Моргана или мягкой алгеброй [Wang et al., 2009].

Для операций ($\cdot$, +) свойства дистрибутивности и идемпотентности, так же как и свойство дополнительности, вообще говоря, не выполняются (см. табл. 1.1), но выполняются законы де Моргана.

Таблица 1.1

Свойства операций над нечеткими множествами

Свойства	$(\cap, \cup)$	$(\cdot, +)$
1. Коммутативность	$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$	$A + B = B + A,\ A \cdot B = B \cdot A$
2. Ассоциативность	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A + (B + C) = (A + B) + C,$ $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
3. Дистрибутивность	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cdot (B + C) \neq (A \cdot B) + (A \cdot C),$ $A + (B \cdot C) \neq (A + B) \cdot (A + C)$
4. Идемпотентность	$A \cup A = A,\ A \cap A = A$	$A + A \neq A,\ A \cdot A \neq A$
	$A \cup X = X,\ A \cap X = A,$ $A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing$	$A + X = X,\ A \cdot X = A,$ $A + \varnothing = A,\ A \cdot \varnothing = \varnothing$

Вместе с парами операций $(\cap, \cup)$ и $(\cdot, +)$ рассматриваются и другие пары операций над нечеткими множествами (а также другая унарная операция «дополнения»), относительно которых множество $\mathcal{F}(X)$ обладает рядом «хороших» алгебраических свойств. Подробнее об этом см. в главе 3.

1.3. Методы построения функций принадлежности нечетких множеств

Одно из «слабых» мест теории нечетких множеств — известный произвол в выборе функций принадлежности элементов нечеткому множеству. Похожая проблема есть и в теории вероятностей, но там вероятностная мера подчинена «жесткой» аксиоме аддитивности. Кроме того, в теории вероятностей существуют различные подходы к вычислению оценок вероятностных распределений: от классического статистического подхода до теоретико-игрового подхода [Shafer, Vovk, 2001].

Тем не менее и в теории нечетких множеств существуют определенные методы построения функции принадлежности μ_A нечеткого множества A, определенного на универсальном множестве X. Прежде всего можно выделить два подхода в соответствии с тем, какой источник данных используется. Это — построение функции принадлежности:

- по массивам данных;
- по экспертным оценкам.

В первом случае может быть использован частотный подход к построению функций принадлежности.

Пример 1.4. Предположим, что три аналитические компании (AK BARS Finance ABF, BCS, Finance Investment Company — UFIC) и пять инвестиционных банков (ВТБ — BVTB, Уралсиб — URS, Сбербанк России — SB, Ренессанс Кредит — RK, Райффайзенбанк — RB) дали рекомендации («покупать» — B, «держать» — H или «продавать» — S) относительно десяти голубых фишек[2] российского фондового рынка — акций Газпромбанка GAZP, Лукойла — LKOH, Роснефти — ROSN, Сбербанка — SBER, Магнита — MAGN, Сургутнефтегаза — SNGS, Норильского никеля — GMKN, ВТБ — VTBR, Транснефти — TRNFP и МТС — MTSS. Все рекомендации сведены в табл. 1.2[3].

Таблица 1.2

Рекомендации аналитиков

Аналитики	GAZP	LKOH	ROSN	SBER	MAGN	SNGS	GMKN	VTBR	TRNFP	MTSS
ABF	H	B	S	H	H	S	S	S	B	H
BCS	H	H	S	H	H	H	S	H	B	H
UFIC	S	B	H	H	B	H	S	S	B	H
BVTB	H	B	H	B	B	H	H	S	H	H
URS	S	H	B	B	B	S	H	S	H	H
SB	S	H	H	H	H	S	H	H	H	H
RK	B	H	B	B	H	H	H	B	H	S
RB	H	S	H	B	S	B	S	H	H	S

Рассмотрим универсальное множество из трех рекомендаций $X = \{B, H, S\}$. Пусть $n_j(r)$ число рекомендаций $r \in X$ относительно ценной бумаги j. Например, относительно ценной бумаги ROSN четыре инвестиционных банка и аналитических компании дали рекомендацию «держать» H: $n_{\mathrm{ROSN}}(H) = 4$. Тогда функция принадлежности для ценной бумаги j может быть оценена по формуле

[2] Голубые фишки — это акции или ценные бумаги наиболее крупных, ликвидных и надежных компаний со стабильными показателями получаемых доходов и выплачиваемых дивидендов.

[3] Приведенные данные являются гипотетическими.

$$\mu_j(r) = \frac{n_j(r)}{\max\{n_j(B);\ n_j(H);\ n_j(S)\}}, \quad r \in X.$$

Например, рекомендация относительно ценной бумаги ROSN будет нечетким множеством ROSN $= \{(B\,|\,0{,}5);\ (H\,|\,1);\ (S\,|\,0{,}5)\}$. Значения функций распределения рекомендаций относительно других ценных бумаг приведены в табл. 1.3 ■.

Таблица 1.3

Значения функций распределения рекомендаций

Рекомендации	GAZP	LKOH	ROSN	SBER	MAGN	SNGS	GMKN	VTBR	TRNFP	MTSS
B	0,25	0,75	0,5	1,0	0,75	0,25	0	0,25	0,6	0
H	1,0	1,0	1,0	0,6	1,0	1,0	1,0	0,75	1,0	1,0
S	0,75	0,25	0,5	0	0,25	0,75	1,0	1,0	0	0,33

Кроме того, в случае достаточной выборки для построения надежных статистических оценок вероятности $\mu_A(x) = P(A\,|\,x)$ могут быть использованы традиционные методы статистического оценивания. Например, метод параметрического оценивания.

Параметрическое оценивание функции принадлежности по обучающей выборке. В этом методе предполагается известным общий вид функции принадлежности, заданный, например, экспертами. Требуется только уточнить параметры этой функции. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.5. *Задача выбора торговой стратегии*. Рассмотрим задачу разработки экспертной системы, которая по значениям некоего технического индикатора $t = [0;\ 100]$ должна принять решение о покупке или продаже акций на фондовой бирже [Dymova et al., 2016]. Имеются три торговые стратегии: «покупать» (buy), «держать» (hold) или «продавать» (sell). Эти стратегии можно описать с помощью трех нечетких множеств *Sell*, *Hold*, *Buy*. Общий вид функций принадлежности этим множествам, который определяется экспертно, показан на рис. 1.5.

Таким образом, $\mu_{Sell}(\mathbf{a}_{Sell};\ t)$, $\mu_{Hold}(\mathbf{a}_{Hold};\ t)$ и $\mu_{Buy}(\mathbf{a}_{Buy};\ t)$, где $\mathbf{a}_{Sell} = (a_1,\ a_3)$, ..., $\mathbf{a}_{Buy} = (a_6,\ a_8)$. Значения параметров a_1, ..., a_8 определяются на этапе оптимизации экспертной системы по обучающей выборке $\{(t_i,\ y_i)\}_{i=1}^{N}$, где $t_i \in [0;\ 100]$ — значение технического индикатора, $y_i \in \{sell,\ hold,\ buy\}$ — метки определенной торговой

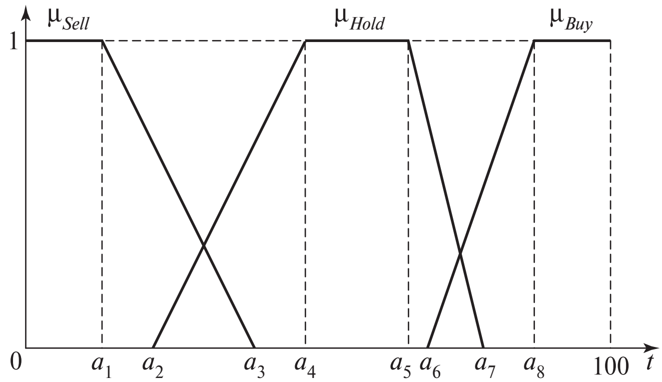


Рис. 1.5. Параметрические функции принадлежности торговых стратегий

стратегии. Например, можно поступить следующим образом. Разобьем промежуток возможных значений технического индикатора [0; 100] на равные промежутки точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = 100$. Пусть s_k, h_k, b_k — количества элементов обучающей выборки, попавших в k-й промежуток и имеющих метку *sell*, *hold* и *buy* соответственно. Тогда параметры $a_1, \ldots, a_8$ можно определить путем минимизации функционала среднеквадратичной ошибки

$$\sum_k \left(\mu_{Sell}(\mathbf{a}_{Sell};\, t_k) - \frac{s_k}{s_k + h_k + b_k}\right)^2 + \left(\mu_{Hold}(\mathbf{a}_{Hold};\, t_k) - \frac{h_k}{s_k + h_k + b_k}\right)^2 +$$
$$+ \left(\mu_{Buy}(\mathbf{a}_{Buy};\, t_k) - \frac{b_k}{s_k + h_k + b_k}\right)^2 \to \min.$$

На рис. 1.6 показан результат описанной выше оптимизации для упрощенной задачи двух стратегий («продавать» и «покупать»).

На рисунке показаны гистограммы распределения значений обучающих выборок $\left\{\frac{s_k}{s_k + b_k}\right\}$ «покупать» (черный цвет) и $\left\{\frac{b_k}{s_k + b_k}\right\}$ «продавать» (серый цвет) соответственно. ■

Если в нашем распоряжении нет достаточной статистической выборки (или ее в принципе не может быть), то для оценивания функции принадлежности может быть использована информация от экспертов. В этом случае предполагается, что имеется эксперт или группа экспертов, которые указывают некоторую информацию о функции принадлежности. После чего эта информация может

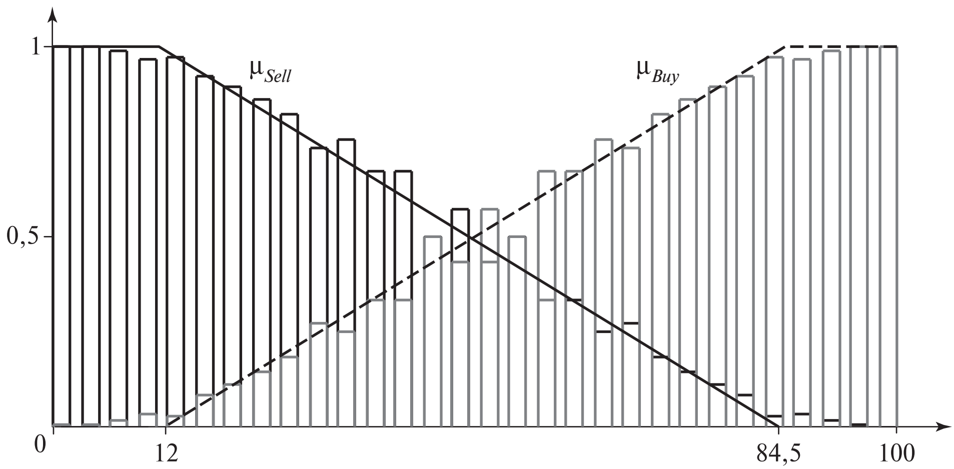


Рис. 1.6. Результат оптимизации для задачи двух стратегий

быть обработана с целью окончательного построения функции принадлежности. Одной из важных особенностей использования информации от экспертов является необходимость проверки согласованности такой информации. Некоторые условия согласованности будут обсуждаться ниже. В случае обнаруженной рассогласованности экспертных данных, экспертов просят пересмотреть свои оценки, меняют экспертов и т.д.

Среди способов оценивания функции принадлежности на основе экспертной информации выделяют прямые и косвенные методы.

Прямые методы для одного эксперта предполагают, что эксперт может явно указать как общий вид функции принадлежности (например, будет ли эта функция задавать треугольное нечеткое число), так и конкретные параметры этой функции в виде графика, таблицы или формулы. При этом со стороны «потребителя» функции принадлежности должна быть большая степень доверия к мнению эксперта.

Прямые методы для групп экспертов сходны с рассмотренным выше подходом статистического оценивания. Здесь в качестве статистических данных выступают оценки экспертов. Например, может быть использована следующая процедура оценивания значений функции принадлежности $\mu_A(x_k)$ элемента $x_k \in X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ нечеткому множеству A, основанная на методе голосований.

1. Разобьем отрезок $[0; 1]$ на r равных частей точками $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{r+1} = 1$.

2. Пусть $m_i(x_k)$ — число экспертов, проголосовавших за то, что $\mu_A(x_k) \in (\alpha_i; \alpha_{i+1})$, $i = 1, \ldots, r$, m — общее число экспертов.

3. Пусть $I(x_k) = \{i\colon m_i(x_k) = \max_j m_j(x_k),\ m_i(x_k) > h_i\}$, где h_i — некоторое пороговое значение, характеризующее надежность решения относительно принадлежности i-му промежутку. Известно, что эксперты часто смещают оценки к концам оценочной шкалы, поэтому для крайних промежутков лучше использовать большие значения h_i, чем для средних промежутков. Тогда возможны следующие случаи:

3.1) если $I(x_k) = \{i_0\}$, то $\mu_A(x_k) = \frac{1}{2}(\alpha_{i_0} + \alpha_{i_0+1})$;

3.2) если $I(x_k)$ состоит из нескольких подряд идущих индексов, то $\mu_A(x_k) = \frac{1}{|I(x_k)|+1}(\alpha_{\min I(x_k)} + \alpha_{\max I(x_k)+1})$;

3.3) если $I(x_k) = \varnothing$, то в этом случае $\mu_A(x_k)$ не оценивается либо уменьшаются пороговые значения $h_i > 0$;

3.4) если $I(x_k)$ состоит из нескольких не подряд идущих индексов, то это означает, что мнения экспертов рассогласованы и им необходимо пересмотреть свои оценки.

Прямые методы применяются, как правило, для оценивания функций принадлежности измеряемых величин (см. пример 1.4). В том случае, когда необходимо оценить функцию принадлежности качественных нечетких множеств, чаще применяют косвенные методы для одного или группы экспертов. Считают, что с помощью косвенных методов получаются более надежные оценки. В косвенных методах функция принадлежности вычисляется исходя из некоторых условий на искомую функцию. Иногда значения функции принадлежности получают как решение некоторой оптимизационной задачи. Рассмотрим два популярных способа косвенного оценивания для одного эксперта.

Метод парных сравнений. Этот метод был предложен Т.Л. Саати (T. Saaty) в рамках разработанного им в начале 70-х годов прошлого века очень популярного инструмента системного подхода к принятию решений метода анализа иерархий (Analytic Hierarchy Process, AHP) [Саати, 1993]. В этом методе неизвестные значения $\mu_A(x_i) = v_i$, $i = 1, \ldots, n$ функции принадлежности нечеткого множества A характеризует степень уверенности эксперта, что элемент $x_i \in A$. Например, для нечеткого множества A высоких людей степень уверенности того, что $x = 180$ см — это высокий рост человека, может быть равна, например, $\mu_A(180) = 0{,}7$. Будем считать, что все $v_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, и нам необходимо оценить вектор $\mathrm{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$. Обычно эксперту трудно «назначить» точные значения v_i. Вместе с тем ему значительно проще дать оценку парных сравнений $\frac{v_i}{v_j} = c_{ij}$.

В результате работы эксперта мы имеем квадратную положительную матрицу парных сравнений $C = (c_{ij})$. Элементы этой матрицы — положительные числа — удовлетворяют условиям взаимности (reciprocity) $c_{ij} \cdot c_{ji} = 1$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$ и, как следствие, $c_{ii} = 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Такие матрицы называют обратно-симметричными.

Лемма 1.1. *Для заданной положительной квадратной матрицы $C = (c_{ij})$ существует вектор $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$, удовлетворяющий условию*

$$\frac{v_i}{v_j} = c_{ij} \text{ для всех } i, j = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

тогда и только тогда, когда матрица C является согласованной (consistent), т.е. $c_{ij} \cdot c_{jk} = c_{ik}$ для всех $i, j, k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что из согласованности (и положительности) следует обратная симметричность матрицы C: $c_{ii} \cdot c_{ik} = c_{ik} \Rightarrow c_{ii} = 1$ и $c_{ij} \cdot c_{ji} = c_{ii} = 1$. Пусть теперь, например, $v_i = c_{i1}$, $i = 1, \ldots, n$, тогда из условия согласованности и обратно-симметричности следует, что $c_{ik} = c_{i1} \cdot c_{1k} = c_{i1} \cdot \dfrac{1}{c_{k1}} = \dfrac{v_i}{v_k}$. ■

Нетрудно видеть, что для согласованной матрицы C и вектора $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$, удовлетворяющего условию (1.2), верно равенство

$$(C\mathbf{v})_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} v_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{v_i}{v_k} v_k = n v_i, \quad i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow C\mathbf{v} = n\mathbf{v}.$$

Другими словами, вектор $\mathbf{v}$ будет собственным вектором матрицы C, соответствующим собственному значению $\lambda = n$. Кроме того, из (1.2) следует, что любой столбец согласованной матрицы C будет ее собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda = n$.

Известно, что [Саати, 1993] обратно-симметричная положительная матрица C порядка n будет согласованной тогда и только тогда, когда ее максимальное по модулю собственное значение равно n: $\lambda_{\max} = n$. Но зачастую оценки экспертов не являются согласованными. В этом случае максимальное по модулю собственное значение (в силу теоремы Фробениуса — Перрона) $\lambda_{\max} > 0$ будет больше порядка матрицы: $\lambda_{\max} > n$. В качестве меры согласованности тогда рассматривают величину $CI = \dfrac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$ или другую близкую по смыслу характеристику. Если величина CI мала, то можно считать матрицу C близкой к согласованной. В противном случае (при высокой несогласованности) эксперту нужно уточнить матрицу парных сравнений C.

Существуют способы быстрого приближенного оценивания $\lambda_{\max}$ для положительных матриц, близких к согласованным, без решения характеристического уравнения (см. [Саати, 1993]). Могут быть также задействованы итерационные методы приближенного нахождения $\lambda_{\max}$ [Уилкинсон, 1970].

Пример 1.6. Найдите функцию принадлежности $\mu_A(x)$, $x \in X = \{x_1, x_2, x_3\}$ нечеткому множеству B по экспертной информации о парных сравнениях значений функции принадлежности, заданной в виде матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 1 & t & 3t^2 \\ \frac{1}{t} & 1 & 2t \\ \frac{1}{3t^2} & \frac{1}{2t} & 1 \end{pmatrix}, t > 0,$$

методом собственных значений.

Решение. Составим и решим соответствующее характеристическое уравнение: $\det(C - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow 6\lambda^3 - 18\lambda^2 - 1 = 0$. Максимальный по модулю корень этого уравнения равен $\lambda_{\max} = 1 + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 3{,}018.$

Это и есть максимальное по модулю собственное значение матрицы C. Мера рассогласования будет равна $CI = \frac{\lambda_{\max} - 3}{2} \approx 0{,}00915.$ Для нахождения собственного вектора, соответствующего $\lambda_{\max}$, решим однородную систему $(C - \lambda_{\max}E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Пусть $a = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, тогда имеем

$$C - \lambda_{\max}E = \begin{pmatrix} -a & t & 3t^2 \\ \frac{1}{t} & -a & 2t \\ \frac{1}{3t^2} & \frac{1}{2t} & -a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -at & 2t^2 \\ -a & t & 3t^2 \\ 1 & \frac{3}{2}t & -3at^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -at & 2t^2 \\ 0 & (1-a^2)t & (3+2a)t^2 \\ 0 & \left(\frac{3}{2}+a\right)t & (-3a-2)t^2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 & -at \\ 0 & (3+2a)t & (1-a^2) \\ 0 & 0 & 9a - 3a^3 + \frac{13}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2t^2 & -at \\ 0 & (3+2a)t & (1-a^2) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так как $9a - 3a^3 + \frac{13}{2} = 0$. Следовательно, собственный вектор равен

$$\mathbf{x} = c((3a+2)t^2;\ a^2 - 1;\ (3+2a)t)^T \approx c(8t^2;\ 3;\ 7t)^T.$$

Поэтому $\mu_A(x_1) = \frac{8t^2}{m}, \mu_A(x_2) = \frac{3}{m}, \mu_A(x_3) = \frac{7t}{m}$, где $m = 8t^2 + 7t + 3$. ■

Оптимизационные методы. Близкими по смыслу к методу парных сравнений являются оптимизационные методы, в которых решение $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n)^T$, $\mu_A(x_i) = v_i$, $i = 1, ..., n$ находится из условия минимизации рассогласования матрицы парных сравнений C и матрицы $\left(\frac{v_i}{v_j}\right)$. Например, рассматривается следующий критерий рассогласования:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}v_j - v_i)^2,$$

который надо минимизировать при наличии ограничений: $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$, $v_i > v_0$, $i = 1, ..., n$, где $v_0 \in [0, 1)$ — некоторое пороговое значение.

Пример 1.7. Для матрицы парных сравнений из предыдущей задачи при $t = 1$ и $v_0 = 0$ получим $\mu_A(x_1) = 0{,}44$, $\mu_A(x_2) = 0{,}4$, $\mu_A(x_3) = 0{,}16$. ■

Метод уровневых множеств. Этот метод был предложен Р. Ягером в [Yager, 1982] и основан на оценке вероятности выбора элементов из уровневых множеств. Предположим, что мы хотим оценить значения функции принадлежности $\mu_A(x_k) = a_k$, $k = 1, ..., n$ нечеткого множества A, заданного на конечном универсальном множестве $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Без ограничения общности будем считать, что искомые значения a_k упорядочены по возрастанию: $0 < a_1 \le ... \le a_n \le 1$. Рассмотрим такой эксперимент случайного выбора элемента x_i: случайным образом выбирается уровень a_k, а затем также случайно элемент из уровневого множества A_{a_k}. Поскольку $A_{a_k} = \{x_k, ..., x_n\}$, $k = 1, ..., n$, то вероятность выбора элемента x_i с a_k-уровневого множества равна $P\{x_i \mid A_{a_k}\} = \frac{1}{|A_{a_k}|} = \frac{1}{n-k+1}$, если $x_i \in A_{a_k}$ и $P\{x_i \mid A_{a_k}\} = 0$, если $x_i \notin A_{a_k}$. Вероятность же случайного выбора a_k-уровневого множества, отличного от других, равна $P\{A_{a_k}\} = a_k - a_{k-1}$. Тогда по формуле полной вероятности получим (считая $a_0 = 0$)

$$P\{x_1\} = P\{x_1 \mid A_{a_1}\}P\{A_{a_1}\} = \frac{a_1}{n},\ P\{x_2\} = P\{x_1\} + \frac{a_2 - a_1}{n-1},\ \ldots,$$
$$P\{x_{k-1}\} = P\{x_{k-2}\} + \frac{a_{k-1} - a_{k-2}}{n-k+2},\ \ldots,\ P\{x_n\} = P\{x_{n-1}\} + \frac{a_n - a_{n-1}}{1}.$$

Из последней системы можно выразить искомые значения a_k через вероятности $P(x_i)$:

$$a_1 = nP\{x_1\},\ a_2 = (n-1)P\{x_2\} + P\{x_1\},\ \ldots,$$
$$a_k = (n-k+1)P\{x_k\} + \sum_{i=1}^{k-1} P\{x_i\},\ \ldots,\ a_n = \sum_{i=1}^{n} P\{x_i\}. \quad (1.3)$$

Заметим, что $1 - \sum_{i=1}^{n} P\{x_i\} = 1 - a_n = P\{A_{a_{n+1}}\}$, если считать, что $a_{n+1} = 1$. Из системы (1.3) следует, что искомые оценки функции принадлежности могут быть найдены, если будут известны оценки вероятностей $P\{x_i\}$, $i = 1, \ldots, n$. Но эти оценки можно получить из экспертной информации.

Алгоритм метода уровневых множеств следующий:

1. Промежуток [0, 1] разбивается на r равных частей точками $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_r \le 1$; задаем начальные значения счетчиков частот: $m_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

2. Случайным образом и без повторения выбирается точка $\alpha_i \in \{\alpha_k\}_{k=1}^{r}$.

3. Эксперту предлагается сформировать множество α_i-уровня A_{α_i}.

4. Для каждого элемента $x_k \in A_{\alpha_i}$ наращиваем значения счетчиков:

$$m_k \to m_k + \frac{1}{|A_{\alpha_i}|};$$

повторяем шаги 2÷4 до тех пор, пока не переберем все значения $\alpha_i \in \{\alpha_k\}_{k=1}^{r}$.

5. Найдем оценки вероятностей $P\{x_k\}$: $\tilde{p}_k = \frac{m_k}{r}$, $k = 1, \ldots, n$.

6. Упорядочим элементы универсального множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ по возрастанию оценок $\{\tilde{p}_k\}$; обозначим упорядоченное универсальное множество вновь через $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

7. Найдем искомые оценки функций принадлежности по формуле (сравни с (1.3)) $\mu_A(x_k) = a_k = (n-k+1)\tilde{p}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{p}_i$, $k = 1, \ldots, n$.

Заметим, что в методе уровневых множеств вопрос согласованности экспертных оценок не обсуждается, т.е. считается, что все оценки согласованы. В частности, нужно следить, чтобы при формировании экспертом уровневых множеств выполнялось условие $A_{\alpha_i} \subseteq A_{\alpha_j}$, если $\alpha_i > \alpha_j$.

Пример 1.8. Найти функцию принадлежности нечеткого множества A высоких людей по экспертной информации об уровневых множествах. Рассмотрим универсальное множество $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \ni i$ — рост высокого человека (в сантиметрах). Будем считать, что $\mu_A(i) = 0$, $i < 170$ и $\mu_A(i) = 1$, если $i \geq 200$. Для оценивания значений функции принадлежности $\mu_A(i)$ в остальных целочисленных точках множества $X_0 = \{170, \ldots, 199\} = \{169 + i\}_{i=1}^{30}$ воспользуемся методом уровневых множеств. Разобьем промежуток $[0, 1]$ на $r = 4$ равные части точками $\alpha_1 = 0{,}25$, $\alpha_2 = 0{,}5$, $\alpha_3 = 0{,}75$, $\alpha_4 = 1$. Предположим, что случайный выбор без повторений дал нам вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, а эксперт сформировал следующие уровневые множества:

$$\begin{gathered} A_{\alpha_1} = A_{0,25} = \{170, \ldots, 199\}, |A_0| = 30, \\ A_{\alpha_2} = A_{0,5} = \{180, \ldots, 199\}, |A_{0,25}| = 20, \\ A_{\alpha_3} = A_{0,75} = \{188, \ldots, 199\}, |A_{0,5}| = 12, \\ A_{\alpha_4} = A_1 = \{192, \ldots, 199\}, |A_{0,75}| = 8. \end{gathered}$$

Тогда для $i \in A_{0,25} = \{170, \ldots, 199\}$ получим, что $m_i = \frac{1}{30}$; для $i \in A_{0,5} = \{180, \ldots, 199\}$ — $m_i = \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{12}$; для $i \in A_{0,75} = \{188, \ldots, 199\}$ — $m_i = \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$; для $i \in A_1 = \{192, \ldots, 199\}$ — $m_i = \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$.

В этом случае оценки вероятностей $P\{169 + i\}$ будут равны:

$$\tilde{p}_{169+i} = \frac{m_{169+i}}{r} = \begin{cases} \frac{1}{120}, & i = 1, \ldots, 10, \\ \frac{1}{48}, & 11 \leq i \leq 18, \\ \frac{1}{24}, & 19 \leq i \leq 22, \\ \frac{7}{96}, & 23 \leq i \leq 30. \end{cases}$$

Элементы множества X_0 уже упорядочены по возрастанию оценок $\tilde{p}_k$, поэтому делаем последний, 7-й шаг алгоритма, вычисляем оценки функций принадлежности. Получим:

- для $170 \le k \le 179$

$$\mu_A(k) = (30 - (k - 169) + 1) \cdot \frac{1}{120} + \sum_{i=1}^{k-170} \frac{1}{120} = \frac{1}{4};$$

- для $180 \le k \le 187$

$$\mu_A(k) = (30 - (k - 169) + 1) \cdot \frac{1}{48} + 10 \cdot \frac{1}{120} + \sum_{i=11}^{k-170} \frac{1}{48} = \frac{1}{2};$$

- для $188 \le k \le 191$

$$\mu_A(k) = (30 - (k - 169) + 1) \cdot \frac{1}{24} + 10 \cdot \frac{1}{120} + 8 \cdot \frac{1}{48} + \sum_{i=19}^{k-170} \frac{1}{24} = \frac{3}{4};$$

- для $192 \le k \le 199$

$$\mu_A(k) = (30 - (k - 169) + 1) \cdot \frac{7}{96} + 10 \cdot \frac{1}{120} + 8 \cdot \frac{1}{48} + 4 \cdot \frac{1}{24} + \sum_{i=23}^{k-170} \frac{7}{96} = 1.$$

Таким образом, имеем

$$\mu_A(k) = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le 169, \\ \frac{1}{4}, & 170 \le k \le 179, \\ \frac{1}{2}, & 180 \le k \le 187, \\ \frac{3}{4}, & 188 \le k \le 191, \\ 1, & k \ge 192. \end{cases} \blacksquare$$

1.4. Задачи

1. Найдите аналитически функцию принадлежности, график которой приведен на рис. 1.7, в классе: а) кусочно-линейных функций; б) модульно-линейных функций.
2. Найдите аналитически функции принадлежности в классе модульно-линейных функций, графики которых приведены на рис. 1.8*а*, *б*, *в*.
3. Найдите функцию принадлежности, график которой приведен на рис. 1.9, в классе кусочно-показательных (кусочно-тригонометрических) функций.

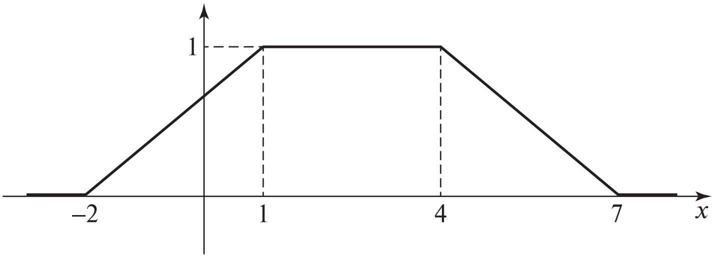


Рис. 1.7. Трапециевидная функция принадлежности

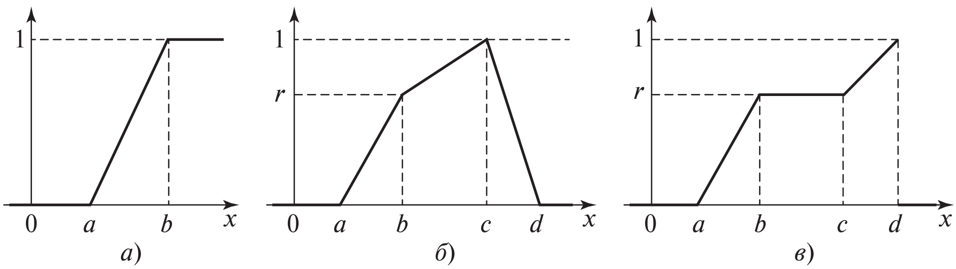


Рис. 1.8. Графики функций принадлежности

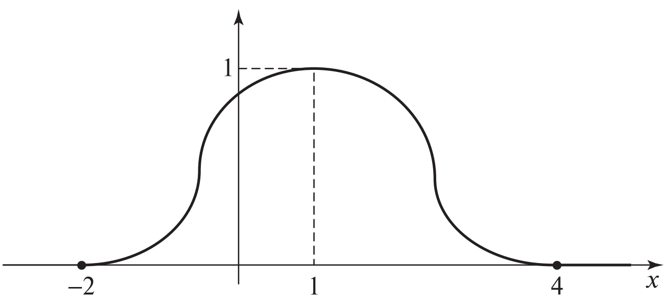


Рис. 1.9. График функции принадлежности

4. Найдите декомпозицию множества

$A =$

x_1	x_2	x_3	x_4
0,4	0,1	0,6	0,7

.

5. Синтезируйте нечеткое множество из последовательности вложенных неразмытых множеств $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c, d\}$ и последовательности чисел $0{,}8 > 0{,}5 > 0{,}3$.

6. Докажите, что для любых нечетких множеств A и B верны следующие соотношения для их α-срезов, $\alpha \in (0; 1]$:

а) $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$;

б) $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$;

в) $(\neg A)_\alpha = \neg(A_{1-\alpha})$.

7. Докажите свойство ассоциативности для операции алгебраического сложения (пересечения) нечетких множеств.

8. Докажите свойство дистрибутивности для операций пересечения и объединения нечетких множеств.

9. Покажите, что свойство дистрибутивности не выполняется для операций алгебраического умножения и сложения нечетких множеств.

10. Докажите правило де Моргана для дополнения алгебраической суммы нечетких множеств.

11. Найдите нечеткое множество $C = A \cap (B \cup \neg A)$, если

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x^2, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 1 - 2(x-1)^2, & \dfrac{1}{2} < x \le 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases} \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \vee x > 2, \\ 1 - |x - 1|, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

12. Найдите нечеткое множество $C = (A + \neg A) \cdot A$, если

$$\mu_A(x) = \max\left\{0;\ 2 - \frac{1}{2}(|x-1| + |x-3|)\right\}.$$

13. Найдите функцию принадлежности $\mu_A(x)$, $x \in X = \{x_1, x_2, x_3\}$ нечеткому множеству A по экспертной информации о парных сравнениях значений функции принадлежности, заданной в виде матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \\ \dfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) & 1 & 2+\sqrt{5} \\ \dfrac{1}{4}(3+\sqrt{5}) & \sqrt{5}-2 & 1 \end{pmatrix}:$$

а) методом собственных значений;

б) оптимизационным методом.

14. Найдите оценки функции принадлежности нечеткого множества A, заданного на универсальном множестве $X = \{x_1, \ldots, x_6\}$ методом уровневых множеств, если эксперт сформировал следующие случайно выбранные уровневые множества:

$$A_{0,5} = \{x_2, x_3, x_4\},\ A_{0,1} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},\ A_{0,4} = \{x_2, x_3, x_4\},$$
$$A_{0,8} = \{x_2, x_3\},\ A_{0,6} = \{x_2, x_3, x_4\},\ A_{0,9} = \{x_3\},\ A_{0,3} = \{x_2, x_3, x_4, x_5\},$$
$$A_{0,2} = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},\ A_{0,7} = \{x_2, x_3\}.$$