Оглавление

Введение

В далеком 1977 году в свет вышла книга, которую быстро начали разбирать на цитаты все кому не лень — от журналистов до ученых. Выдержки из нее превратились в «народную мудрость», стали появляться в заголовках газет и журналов и даже упоминаться в серьезных научных трудах. Однако сама по себе она ничему не учила, в ней не предлагалось новаторских методик, она не раскрывала глаза на какую-то «правду». В ней можно было найти только то, что хорошо известно всем на свете, и именно этим она подкупила читателя. Книга называлась «Закон Мёрфи и другие причины, почему все идет не так», а написал ее американский публицист Артур Блох*. Почему же некие «законы» пришлись по душе широкой публике? Потому что они относятся к повседневным неприятностям, досадным совпадениям, надоевшему несовершенству нашего мира. А мы, люди, очень любим жаловаться. Особенно когда жалобы «объективны». Иначе говоря, виноваты в неприятностях могут быть какие угодно обстоятельства, случайности или закономерности, но только не тот, кто жалуется, и не тот, кто его выслушивает.

В этой книге речь тоже пойдет о различных неприятностях. Привычных, ожидаемых и настолько предсказуемых, что они получили статус «законов». Их в книге Блоха и нами самими сформулировано великое множество, это и закон падающего бутерброда,

---

* Блох А. Закон Мёрфи. — Мн. : Попурри, 2005.

и закон Мёрфи*: *«Если какая-нибудь неприятность может произойти, она случится»*, — и законы Чизхолма, утверждающие: *«Когда все идет хорошо, что-то должно случиться в самом ближайшем будущем»*, и наблюдение Этторе: *«Соседняя очередь всегда движется быстрее»*. Бóльшая их часть вполне тривиальна, но, согласно закону Муира, *«Когда мы пытаемся вытащить что-нибудь одно, оказывается, что оно связано со всем остальным»*. Наша задача — найти рациональное зерно этих закономерностей. Не для того, чтобы с ними бороться, а для удовольствия. И поскольку при этом мы будем использовать математику, удовольствие будет своеобразным и полезным, в отличие от самого результата. Ну а если рассуждения заведут нас слишком далеко, можно взять на вооружение постулат Персига: *«Число разумных гипотез, объясняющих любое данное явление, бесконечно»*. Со всеми этими глубокомысленными фразами и законами мы и станем разбираться, опираясь на язык математики и по возможности строгие выкладки.

Современная математика — огромная страна со сложным «ландшафтом». В ней есть и цветущие долины, и древние памятники, развлекательные центры и пряничные городки, даже супермаркеты с готовыми решениями на все случаи жизни. Все это связано хорошо оборудованными дорогами с указателями и путеводителями. Но есть в математической стране и глухие участки с густыми непроходимыми лесами, горами и топкими болотами, через которые проходят внезапно исчезающие тропинки с шаткими мостиками гипотез и предположений. Наконец, она окружена неизведанными землями, куда если и осмеливался ступить человек,

---

* Первоисточником закона Мёрфи была не книга Блоха. В ней собраны многочисленные его следствия, но сам закон появился раньше. Блох приписывает его Эдварду Мёрфи, инженеру Лаборатории реактивного движения, так сформулировавшему закономерность в 1949 году: «Если что-то можно сделать неправильно, он так и сделает» (If there is any way to do it wrong, he will). В книге Анны Роу 1952 года формулировка «закона Мёрфи, или четвертого начала термодинамики» звучит так: «Если что-то может пойти не так, это пойдет не так» (If anything can go wrong it will), и она приписывается безымянному физику. Как позже установлено, это был физик Ховард Перси Робертсон, который дал интервью Роу в 1949 году. Однако близкие по смыслу формулировки существовали намного раньше. Например, в 1877 году британский инженер Альфред Холт писал: «Установлено, что, если что-нибудь может в море пойти неправильно, это рано или поздно пойдет неправильно» (It is found that anything that can go wrong at sea generally does go wrong sooner or later).

то лишь очень отважный и часто одинокий в своих поисках. Я не случайно так увлекся этой аллегорией. Она гораздо ближе к пониманию того, что такое наука, чем кажется на первый взгляд. Ведь в любом городе можно ходить по-разному от одной площади до другой, от одного здания к другому. Наконец, в любом городе поразному можно жить.

Выходя на улицы родного города ребенком, вы изучаете правила перехода улиц, назначение тротуаров и магазинов, узнаёте первые надежные тропинки. Если уже взрослым вы впервые попадаете в новый интересный для вас город, то, скорее всего, выберете для ознакомления экскурсионный маршрут, который уже отработан годами и представляет собой своеобразное произведение искусства. Так за какие-нибудь пару часов вы получите яркие впечатления о городе, которые останутся с вами на всю жизнь. Но вы не сможете сказать, что узнали его по-настоящему. Быть может, вас туда занесет по работе — скажем, случится более или менее длинная командировка. Тогда неплохо удастся изучить основные полезные маршруты, и у вас появятся навыки мастерски пользоваться общественным транспортом, перемещаясь быстро, эффективно и удобно. Но и после нескольких недель такой жизни город может остаться незнакомым вам.

Наконец, порой случается так, что город становится вашим по-настоящему. Возможно, вы полюбите его и будете бродить по его улочкам бесцельно, получая удовольствие от самих прогулок. Вы станете отыскивать новые проходы от одной площади к другой через закоулки и дворы, удивительным путем попадать парками и тропинками в нужную точку. Эти дороги могут оказаться на удивление короткими, а способны завести бог знает куда. Но это не страшно: вы знаете этот город и никогда в нем не заблудитесь.

Общий школьный курс похож на освоение элементарных правил жизни в городе. Университетский курс математики уже ближе к экскурсии. Вам покажут главные древние памятники и знаменитые площади, к которым ведут большие проспекты. Глубокое погружение в ту или иную прикладную задачу напоминает командировку: тут не до блужданий, важно четко понять, на какую линию садиться и на какой остановке пересаживаться каждый день, чтобы не терять драгоценных сил и времени. Но с математикой у вас может случиться и настоящая любовь. И тогда вы уже не остаетесь в рамках лишь практической пользы или удобства, вам становится важно понять, почувствовать, что математика как большой город — это не только дома и площади, даже не линии метро и трамвайных маршрутов. Это единая система, соединяющая всё, что в ней есть, не только взаимным расположением, но и смыслами, контекстами, историями.

Эта книга не совсем о математике. Я приглашаю вас на прогулку по некоторым ее местечкам, хорошо известным и имеющим большую практическую пользу. Но двигаться мы будем несколько необычным маршрутом. Не прямым, как в учебнике, и не сложным и запутанным, как в научной работе, а легким, как бесцельное шатание в хорошей компании под интересный разговор. То и дело мы будем оказываться на развилках и площадях с четко обозначенными названиями, соответствующими разделам математики. Оглянувшись, мы отправимся дальше, но читатель может отметить про себя, что пересеченный нами проспект или бульвар — целое направление, куда можно углубиться самостоятельно, будь на то интерес или необходимость.

В стране математики говорят на своем языке, и не все указатели и надписи легко перевести на русский. Иногда я буду приводить цитаты на языке аборигенов. Иначе говоря, в книге есть формулы. Но это вовсе не единственный алфавит языка математики. Формулы можно выразить графически, и я всегда буду сопровождать уравнения иллюстрациями, которые можно понять интуитивно. Почему же я не отказался от формул, как многие авторы научно-популярных книг? В нашей математической стране не принято верить каждому встречному, не принято сильно полагаться на интуицию, чутье и даже на опыт. Да, опыт, в отличие от физики или психологии, здесь имеет сравнительно невысокую цену. В ходу только доказательство — самая твердая валюта, которой неведомы ни девальвация, ни инфляция, ни мода, ни конъюнктура. Она не обесценивается тысячелетиями (и это не фигура речи, мы используем доказательства тысячелетней давности каждый день). Таким образом, все, что я вам здесь наговорю, не должно приниматься на веру. Любое мое утверждение, вывод, даже самый неожиданный, можно проверить строгими доказательствами. Именно поэтому везде, где уместно, есть ключи-заметки в виде формул, которыми я руководствовался. Это, впрочем, не лишает читателя возможности любоваться непонятными значками, воспринимая их как орнамент, а автор оставляет за собой право давать математическим закономерностям не очень серьезные и даже фривольные житейские интерпретации. Ведь так гораздо интереснее!

Глава 6

Почему уж не везет так не везет?

Говорят, жизнь похожа на зебру: то белая полоса, то черная… А еще бывает, что к одной неприятности добавляется другая: и так все непросто в жизни, а тут еще кошка рожать принялась! То густо, то пусто! Одно к одному! Но самое печальное, что когда становится хорошо и в жизни наступает светлая полоса, то мысли закрадываются нехорошие: ох, не сглазить бы… ох, не придется ли за счастье расплачиваться… Знакомое ощущение? Об этом говорит один из законов мерфологии — **второй закон Чизхолма**:

Когда дела идут хорошо, что-то должно случиться в самом ближайшем будущем.

Но поскольку Френсис Чизхолм в своей оригинальной работе не дает детального анализа или доказательства этого закона, мы постараемся сами выяснить, кроется ли за этим какая-либо закономерность или нам так только кажется. А если это причуды математики, можно ли определить характерную длительность или частоту полосок на теле нашей зебры и от чего эти параметры зависят?

В жизни то и дело происходят *события*. Иногда они вовсе не связаны друг с другом, иногда образуют цепочки причинно-следственных взаимоотношений. Рассуждения об этих связях, цепочках и предопределенности жизненного пути могут увести нас очень далеко, мы поговорим о них позже. А пока попробуем, как всегда, обойтись наименьшим количеством исходных данных для анализа нашего закона. Рассмотрим последовательность никак не связанных между собой событий и посмотрим, что удастся из нее добыть.

Синтезируем злодейку-судьбу

Наступление событий, которые никак не связаны между собой и происходят во времени случайно, описывается с помощью хорошо известного *пуассоновского потока*. Он соответствует многим случайным явлениям — от землетрясений до прихода покупателей в магазин.

Предположим, выполнены такие естественные условия.

1. Если есть два непересекающихся отрезка времени $[t_1,t_2]$ и $[t_3,t_4]$, то число событий в первом отрезке не зависит от числа событий во втором (отсутствие последействия).

2. Количество событий, произошедших на каком-либо отрезке времени, зависит только от длины отрезка, но не его положения (стационарность).

3. Вероятность, что два события происходят одновременно, пренебрежимо мала (ординарность).

Тогда можно показать, что число событий, попадающих на отрезок длины t, подчиняется *распределению Пуассона*. То есть вероятность P_m того, что на этом отрезке произойдет m событий, определяется так:

$$P_m = \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!}.$$

Число λ называется интенсивностью или плотностью потока и имеет смысл «среднего» числа наблюдений. Например, при измерении времени в днях значению параметра $\lambda = 1/7$ соответствует цепочка случайных событий, в среднем происходящих раз в неделю. Это вовсе не означает, что события будут происходить строго с *частотой* раз в неделю. Никакой определенной частоты у последовательности событий нет. Это среднее число событий: поскольку в году 52 недели, за год должно произойти около

52 событий (в среднем за много лет), но они будут разбросаны в году неравномерно. На рисунке 6.1 показаны 52 случайные равномерно распределенные даты в году, которые можно рассматривать как моменты появления пуассоновских событий.

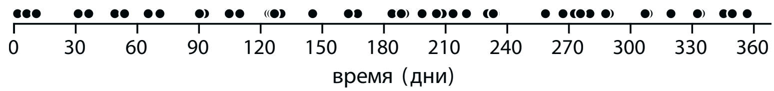

Рис. 6.1. Пример построения пуассоновского потока с интенсивностью 1/7 (время измеряется в днях). На отрезке в 365 дней случайным образом разбросали никак не связанные между собой 52 события

Как видите, о какой-либо периодичности в этих событиях речь не идет: когда пожелают, тогда и случатся. Но и в этом беспорядке статистика может нам показать определенные закономерности. Например, распределение длительности периодов между событиями, показанными на предыдущем рисунке, будет вовсе не равномерным (рис. 6.2).

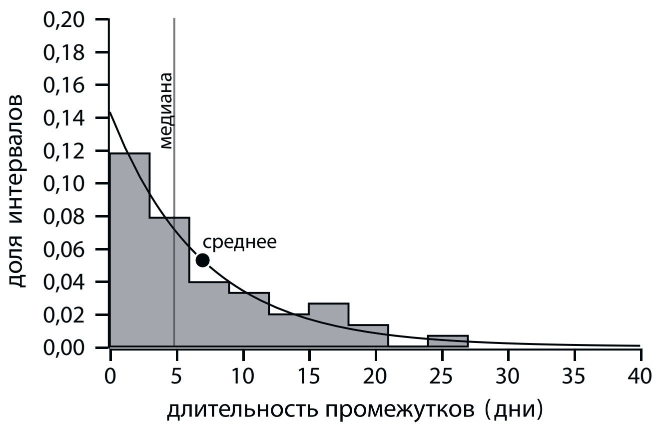

Рис. 6.2. Плотность распределения длительностей промежутков между 52 событиями, случайно разбросанными по отрезку в 365 дней

Промежутки времени между соседними пуассоновскими событиями имеют экспоненциальное распределение с плотностью $\lambda e^{-\lambda t}$

(на рисунке для нашего случая показана сплошной линией). У этого распределения максимум (мода) находится в нуле, а среднее значение равно $1/\lambda$, в нашем случае 7 дней. Более того, стандартное отклонение σ тоже равно 7 дням, поскольку дисперсия экспоненциального распределения $\sigma^2 = 1/\lambda^2$. Как видите, эти характеристики вовсе не гарантируют того, что между событиями будет проходить одна неделя. В среднем — да, но чаще всего меньше; к тому же могут наблюдаться и достаточно долгие промежутки без событий. Наконец, медиана показывает, что половина всех промежутков будет иметь длительность не более 5 дней. Интенсивность и частота — совсем не одно и то же; это очень важное замечание, к которому мы еще вернемся в этой главе.

Для справедливости положим, что хорошие и плохие события происходят равновероятно, но яркие и значимые (как хорошие, так и плохие) — существенно реже мелких и незначительных. Пусть это будет «обычная» жизнь, в которой эмоциональная окраска событий подчиняется нормальному (гауссовскому) распределению. Вот как может выглядеть год синтетической судьбы в виде череды случайных абсолютно независимых жизненных перипетий (рис. 6.3).

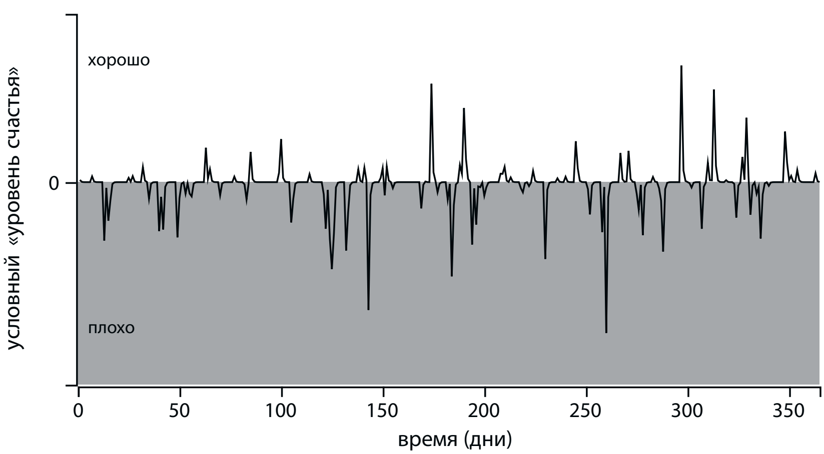

Рис. 6.3. Череда событий различной эмоциональной окраски, образующая пуассоновский поток с интенсивностью 2/7 (2 события в 7 дней)

Знак пиков отражает эмоциональную окраску, а их высота соответствует важности события или глубине переживаний, с ним связанных. Пока никаких полос не наблюдается, есть некий шум. Каждое событие проходит бесследно, ничего не оставляя ни в памяти, ни в настроении. Так не бывает, поэтому наделим нашего модельного героя памятью — для начала идеальной. Каждое событие пусть навсегда врежется в его память и отразится на настроении, либо улучшая, либо ухудшая его. Вот какую картинку мы можем получить, понаблюдав за судьбой нашего героя на протяжении десяти лет (рис. 6.4). Текущий «уровень счастья» вычисляется суммированием вкладов всех предшествующих событий. Позитивные события эту сумму увеличивают, а негативные — уменьшают.

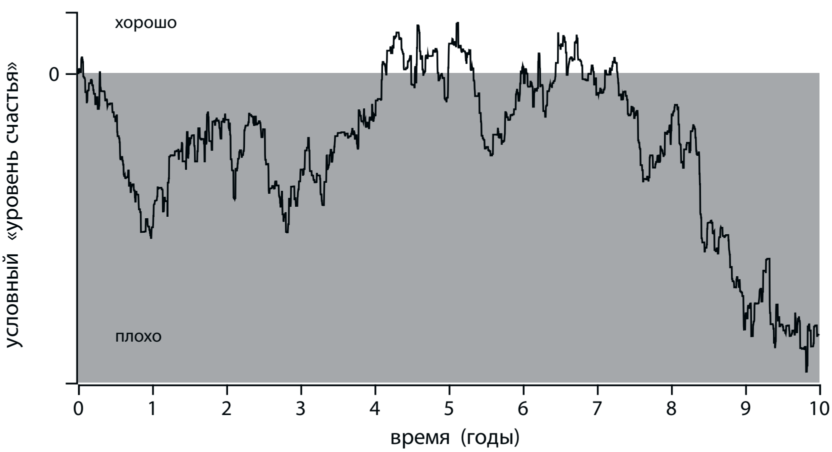

Рис. 6.4. События, сливаясь в памяти, образуют эмоциональную окраску «синтетической жизни»

Ну что же, мы уже видим какое-то чередование настроения, но картинка вышла не особо радостной. Наш герой после череды смен настроения впал в глубочайшую депрессию. Жаль. Попробуем сгенерировать еще несколько судеб (рис. 6.5). Все они проходят череду светлых и темных полос, но надолго увязают либо в беспросветной тоске, либо в запредельном счастье. Так бывает, конечно, но это явно ненормально.

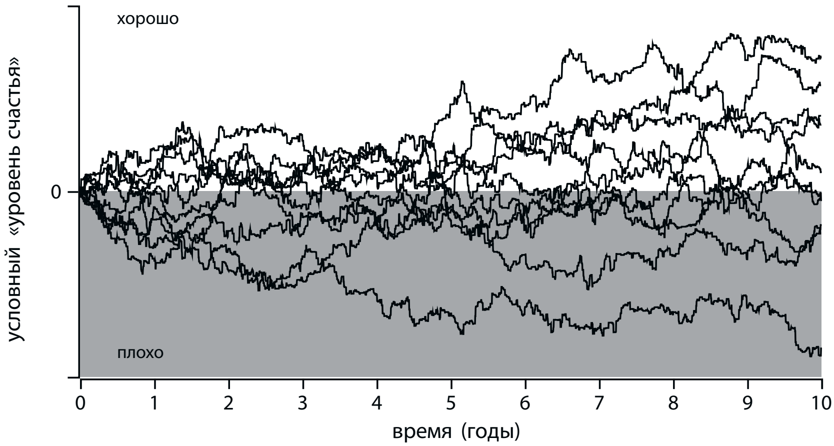

Рис. 6.5. Несколько примеров «синтетических судеб» людей с идеальной памятью

Ценность релаксации

Наши модельные судьбы мы описали очень примечательным процессом. Он называется *одномерным случайным блужданием* и имеет ряд необычных свойств, среди которых — *самоподобие,* то есть отсутствие какого-либо характерного временнóго масштаба. Получив в свое распоряжение неограниченное время, случайное блуждание способно увести неограниченно далеко. Более того, оно обязательно уведет вас на любое наперед заданное расстояние от начального значения! Таким образом, как бы хорошо ни шли ваши дела, но если они подчинены случайному блужданию, то обязательно скатятся до нуля и уйдут ниже — это просто вопрос времени! Правда, если речь о существенных отклонениях, то очень большого времени. Можно показать, что в рассмотренном нами процессе ожидаемая величина отклонения от начального состояния пропорциональна квадратному корню от времени. Это значит, что ожидаемое время, за которое система, отклонившаяся от нуля, вновь вернется в нулевое состояние, пропорционально квадрату начального отклонения.

Помните, как говорил кот Матроскин в известном мультфильме «Каникулы в Простоквашино»: «Я и так счастливый был, а теперь в два раза счастливей стану. Потому что у меня две коровы есть!» Таким образом, можно предположить, что рождение теленка (появление второй коровы) продлит счастье Матроскина в четыре раза.

Но все же идеальная эмоциональная память — это не очень хорошо. Наши герои не забывают ничего и тщательно хранят в памяти всё, даже самые давние события! На их настроение в старости влияет горе от поломанной игрушки в детстве или радость от поцелуя в юности. Причем все последующие поцелуи и игрушки имеют для них такую же важность. Надо этих бедолаг спасать. Эмоции со временем стихают, горе притупляется, радость, увы, тоже. Забывание во многом подобно остыванию, диффузии или замедлению движения в вязкой жидкости, поэтому разумно смоделировать его подобным образом. Перечисленные события относятся к *процессам релаксации*, о которых мы говорили в конце главы 1. Наделим же и наших героев способностью к релаксации!

Релаксирующая система возвращается к равновесному состоянию, причем тем быстрее, чем больше отклонение от равновесия. Это свойство можно смоделировать геометрической прогрессией или экспоненциальным законом. Введем в нашу модель новый параметр — скорость забывания μ. Его можно выразить через время (в отсчетах нашей модели), за которое уровень эмоции уменьшится достаточно сильно. Например, для $\mu = 1/60$ эмоциональный след от события уменьшится на порядок через два месяца. И вот теперь жизнь стала по-хорошему «полосатой» (рис. 6.6)!

Меняя «степень забывчивости», мы можем получить более или менее эмоционально уравновешенных подопытных. Кажется, мы нашли источник зеброобразности! Это, во-первых, случайные блуждания, склонные к расползанию во все стороны; во-вторых, целительная забывчивость, возвращающая настроение в норму. Результатом становится волнообразное меандрирование* настроения.

* Меандр в математике — замкнутая кривая без самопересечений, которая при этом пересекает прямую несколько раз. *Прим. ред.*

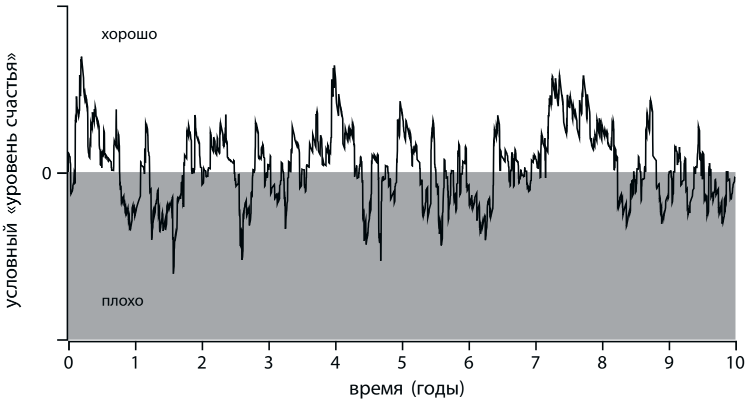

Рис. 6.6. Ограничение памяти приводит к тому, что череда событий и их следов в памяти, сливаясь, образует череду эмоционально окрашенных полос

Изучим свойства полученных нами «синтетических» житейских полос. Построим гистограмму, показывающую распределение их длительностей для длиннющей жизни (или множества обычных) с параметрами $\lambda=1/7$, $\mu=1/60$ (рис. 6.7).

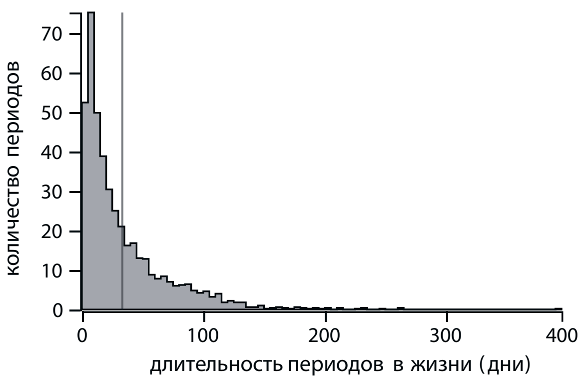

Рис. 6.7. Распределение длительностей периодов счастья и горя для большого числа синтетических судеб. Вертикальной линией отмечено среднее значение, равное 33

Первое, что бросается в глаза, — максимум распределения (мода) находится вблизи нуля. Значит, чаще всего времена счастья и несчастья очень коротки, однако встречаются и периоды длительностью более года. В среднем же их продолжительность составляет 33 дня со стандартным отклонением в 36 дней. Это распределение близко к экспоненциальному (на самом деле оно неплохо описывается более общим *гамма-распределением* с такими параметрами, которые приближают его к экспоненциальному). В свою очередь, экспоненциальное распределение длительностей полос в жизни означает, что смены настроений можно рассматривать как пуассоновский поток — цепочку независимых случайных событий, не имеющих определенной частоты, но случающихся с некоторой известной интенсивностью. Например, в рассмотренном нами примере темные и светлые полосы сменяются с интенсивностью раз в 33 дня, но гораздо чаще в жизни наблюдаются короткие периоды: половина их не дольше десяти дней.

В случае отсутствия «памяти» (для $\mu = 0$) распределение перестает быть экспоненциально убывающим и описывается *распределением Юла*, которое можно приблизить степенным распределением *(распределением Парето)* для длительности меандров T (рис. 6.8).

$$p(T) = \frac{\Gamma(T)}{\Gamma(T+2/3)\Gamma(3+1/3)} \approx \frac{1}{3} T^{-\frac{2}{3}}.$$

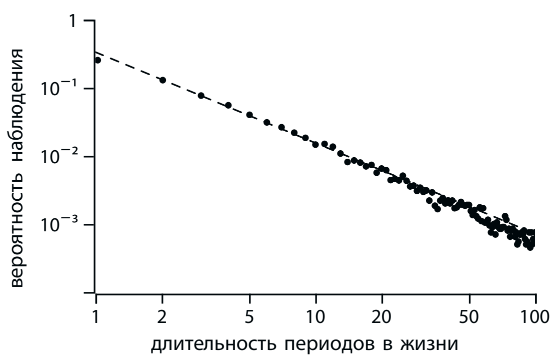

Рис. 6.8. Распределение длительностей меандров для случайного блуждания имеет характер степенного. Двойной логарифмический масштаб графика позволяет распознать степенную зависимость

Статистики говорят, что у таких распределений *тяжелый хвост*, делающий вполне вероятными очень большие отклонения от среднего значения. Мы наблюдали их в виде долгих «погружений» в то или иное настроение. У полученного распределения есть одно непривычное и странное свойство: для него не определены ни среднее значение (математическое ожидание), ни стандартное отклонение. В предыдущей главе мы уже упоминали, что такое бывает, например, у распределения Коши. Дело в том, что все соответствующие интегралы для распределения Юла расходятся. В связи с этим можно слышать, что и среднее значение в таком случае бесконечно, но это не так. Посмотрите, что произойдет при попытке вычислить математическое ожидание длительности меандров случайного блуждания (рис. 6.9).

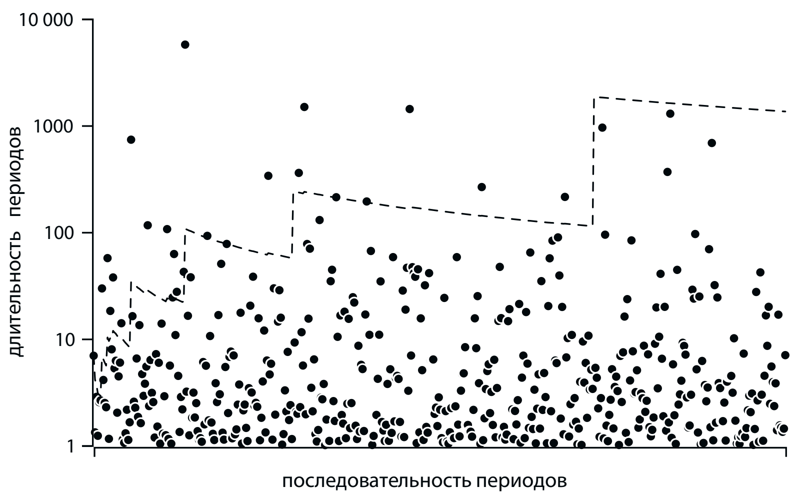

Рис. 6.9. Попытка вычислить среднее значение для последовательности длительностей периодов между сменами настроения при отсутствии памяти. Появляющиеся экстремальные значения из тяжелого хвоста распределения приводят к тому, что значение среднего не сходится к какому-либо пределу

Огромные скачки из тяжелого хвоста то и дело сбивают значение среднего, и последовательность усреднений не сходится ни к какому пределу. Значение среднего вовсе не бесконечно, но интеграл не сходится и о каком-то конкретном значении говорить нельзя. Именно в невозможности вычислить среднее для длительности меандров отражается свойство самоподобия случайного блуждания, или отсутствие собственного масштаба времени.

Мы моделировали приспосабливаемость к житейским неурядицам с помощью релаксации — затухания эмоциональных всплесков. Можно истолковать этот процесс иначе — как приспосабливаемость человека к жизненным обстоятельствам. При обработке зашумленных сигналов или последовательностей часто для сглаживания и выделения полезного сигнала используют *метод скользящего среднего,* рассматривая в каждый момент не сам сигнал, а усредненное его значение за некоторый промежуток времени. Так удается избавиться от шума и получить представление о долговременных тенденциях сигнала. Применяя такое усреднение к житейским неурядицам, мы можем моделировать приспосабливаемость человека. Люди влюбляются и находят повод для радости даже во время войн, а жизнь богатых бездельников не безоблачна. Смещается локальное представление о норме (привычном состоянии дел), от которой настроение отклоняется в ту или иную сторону. Рассматривая разницу между последовательностью эмоций и сглаженной линией фона, мы получим такую же картину полос, какую дала предыдущая модель, с теми же статистическими характеристиками. Это неудивительно, ведь концептуально они практически не различаются, описывая систему с релаксацией (рис. 6.10).

Какие выводы можно сделать из нашего несерьезного исследования? Череда светлых и темных полос в жизни не иллюзия, они существуют на самом деле. Но в них нет особенных закономерностей. Чаще всего они коротки, но бывают и затяжными. Все зависит от легкости характера и способности отпускать прошлое. Более того, если события будут происходить редко, то жизнь станет серой чередой исчезающих в прошлом воспоминаний. Так что в наших интересах запоминать прожитое и в наших силах сделать так, чтобы жизнь не становилась случайным блужданием. Мы можем добиться того, чтобы хороших событий становилось больше и происходили они почаще, пусть даже они окажутся и незначительными.

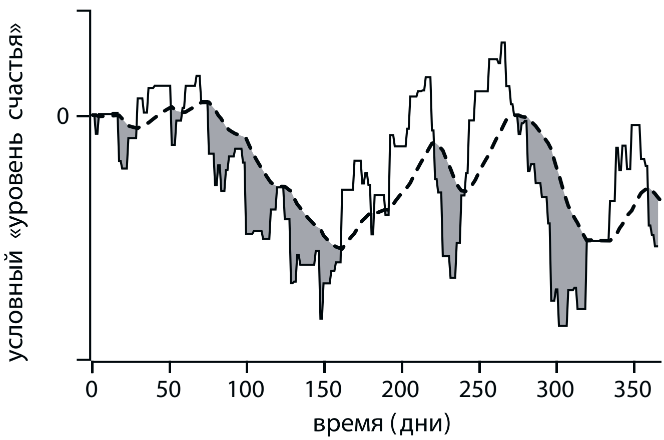

Рис. 6.10. Меандрирование и смену настроений можно получить, моделируя скользящим средним приспосабливаемость человека к обстоятельствам

Лыжная прогулка, искренняя улыбка прохожего, билет на концерт, чашка горячего шоколада в холодный день — все это поможет создать положительный тренд и продлит светлую полосу в жизни. Правда, неизбежные грустные события обязательно сменят настроение. Но не надо винить в этом свое счастье. Это не расплата за него и не сглаз. Это свойство релаксирующих систем — склонность к колебаниям при стохастическом внешнем воздействии.

О марковских цепях и пессимистах с оптимистами

В рассмотренных моделях мы получали пуассоновский поток смены настроений, генерируя события с помощью его же. В этом можно усмотреть подтасовку: пуассоновский случайный процесс оказался изначально «вшит» в модель. Насколько при этом универсален результат? Можно ли получить его как-нибудь совсем иначе?

Житейский опыт — штука плохо формализуемая, его можно подогнать под различные математические инструменты, внося не только упрощающие допущения, но и спекуляции. В науке такой подход недопустим, но в путешествии по методам теории случайных процессов мы можем позволить себе поиграть с ними, чтобы познакомиться получше.

Выше для объяснения полос в жизни мы учитывали память, то есть вклад предыдущих состояний в текущее. Но можно получить характерное «полосатое» поведение и полностью исключив влияние прошлого.

Для этого полезны объекты, называемые цепями Маркова.

Последовательность дискретных случайных величин $x_1, x_2, \ldots$ называется цепью Маркова, если распределение величины x_{n+1} зависит только от распределения величины x_n, но не от предыдущих величин $x_1, \ldots x_n$. Иными словами, будущее зависит от настоящего, но не от прошлого. Область значений наших величин x_n называется пространством состояний цепи. Переходы между состояниями определяются числами p_{ij} — вероятностями перейти из состояния с номером i в состояние с номером j. Мы ограничимся случаем, когда эти вероятности не зависят от номера n (тогда цепь Маркова называется однородной). Числа p_{ij} образуют так называемую матрицу переходов, о которой мы поговорим позже.

Такие цепи удобно представлять в виде *взвешенных графов**. Вершинами графа оказываются состояния цепи, а ребрами — возможные переходы между ними. Например, однородная марковская цепь, описывающая динамику настроения, может быть представлена в следующем виде. Пусть для простоты у человека есть всего два состояния (радостное и печальное) и он каждый день может оказаться либо в одном, либо в другом. При этом вероятность остаться на следующий день в прежнем состоянии равна 0,75, а вероятность поменять его — 0,25 (рис. 6.11).

Почему мы выбрали такие вероятности? Наблюдая за динамикой настроения и мировосприятия, можно заметить, что человеку свойственно «залипать» в определенном состоянии духа.

* Граф — это еще одна универсальная математическая структура, пожалуй, наиболее общая из всех. Это абстракция структуры как таковой. Теория графов достойна отдельного большого разговора, поэтому я предупреждаю читателя, с ней не знакомого: во-первых, вы рано или поздно с ней обязательно познакомитесь, а во-вторых, получите удовольствие!

Если дела идут в целом хорошо, то и дурная новость может быть воспринята с оптимизмом. И напротив, меланхолическое настроение, однажды поглотив человека, способно испортить даже радостное известие. С математической точки зрения это значит, что вероятность остаться в текущем настроении выше вероятности его изменить.

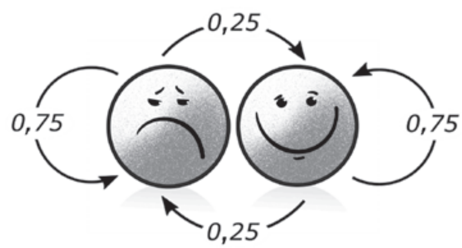

Рис. 6.11. Цепь Маркова с двумя состояниями («радостное» и «печальное»). Стрелки обозначают переходы и их вероятности. В нашем симметричном случае вероятность остаться в существующем настроении превышает вероятность его смены, но не зависит от самого настроения. Переходы случаются раз в день

Наша цепь способна генерировать последовательности состояний, и, конечно, в ней появятся полосы житейской зебры. Самое интересное — выяснить, какому распределению будут подчиняться длительности этих полос. Для нашей более чем простой модели можно получить точный ответ — это *геометрическое распределение*, описывающее вероятность наблюдать заданное количество испытаний до первого «успеха».

Геометрическое распределение — дискретный аналог экспоненциального в том смысле, что ему подчиняются округленные значения экспоненциально распределенной случайной величины. Существует связь между параметром геометрического распределения и интенсивностью соответствующего экспоненциального. Так мы опять получаем пуассоновский поток смен настроения, и для описанной нами марковской цепи его интенсивность равна $\lambda = -\ln(0{,}75) \approx 2/7$ (рис. 6.12).

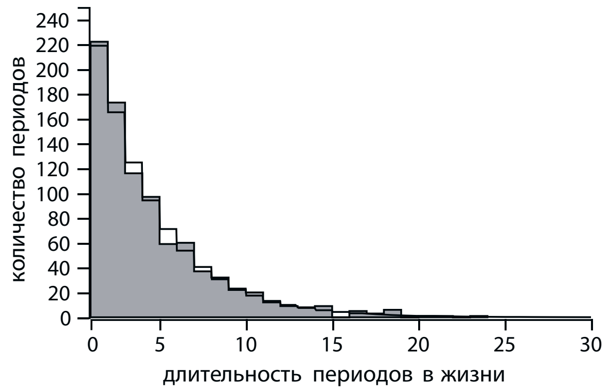

Рис. 6.12. Гистограмма для длительностей периодов одинакового настроения в последовательности ежедневных смен состояний, сгенерированной симметричной цепью Маркова, и функция вероятности геометрического распределения с параметром, равным вероятности перехода между состояниями. Последовательность имеет длительность в 10 лет

Если мы нарушим симметрию цепи, то сможем описать «оптимиста» либо «пессимиста», охотнее «залипающего» в том или ином настроении. Распределение длительностей полос отклонится от геометрического, но при этом бóльшая часть полос будет короткой и какой-либо выделенной периодичности мы не отметим (рис. 6.13).

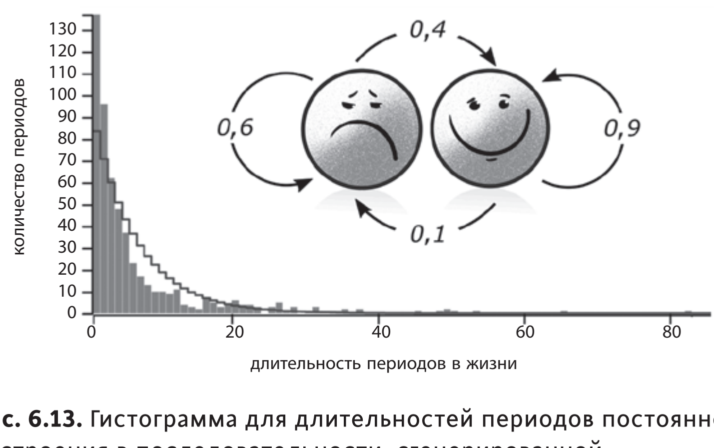

Рис. 6.13. Гистограмма для длительностей периодов постоянного настроения в последовательности, сгенерированной асимметричной цепью Маркова. Ступенчатая линия показывает геометрическое распределение из предыдущего примера

Цепи Маркова — мощный инструмент анализа случайных процессов, в которых кроется некий алгоритм или сценарий. Они дают нам своеобразный взгляд на процессы, привычно относимые к циклическим. Например, известная максима «история человечества ходит по кругу» часто трактуется так: в истории существуют некие циклы или даже периодичности. Доводится слышать, например, о том, что начало века сулит потрясения и войны. Рискуя уйти не в свою тему, возьму на себя смелость предположить, что на самом деле имеет смысл говорить не о буквальных циклах, а о более или менее устойчивых сценариях — закономерных цепочках, которые можно описать цепью Маркова. Среди таких цепей есть класс циклических, которые в самом деле способны создавать повторяющиеся последовательности. Однако настоящей детерминистической периодичности в их поведении нет. Случайно возникая в разные исторические периоды и в разных контекстах, такие циклы похожи друг на друга и могут создать ощущение исторического «дежавю». Изучать и описывать их полезно, но ожидать строгого календарного плана, пожалуй, не стоит.

«Лила» и игра с бесконечностью

Характерную цикличность в случайном на первый взгляд процессе я наблюдал, принимая участие в игре «Лила» (рис. 6.14). Это разновидность игры «Лестницы и змеи», у которой, как говорят, древние индийские корни. Участники перемещают свои фишки (амулеты) согласно выпадающим числам на кубике, следуя переходам — «лестницам» или «стрелам», ведущим вперед, и «змеям», возвращающим игрока назад. Основной смысл заключается в философских и эзотерических толкованиях траектории, которую проходит игрок. В нашей компании были опытные люди, они делились впечатлениями от прошлых игр и восхищались «явно неслучайными» совпадениями траекторий игры и реальной жизни, точному их повторению от партии к партии — как у одного и того же, так и у разных участников.

В игре 72 состояния, и правила бросания кубика нетривиальны: они делают более вероятными близкие переходы, но допускают и далекие скачки; кроме того, «лестницы» и «змеи» добавляют путаницы. Действительно, в игре много элементов случайности, но она все равно остается марковской, поскольку ближайшее будущее игрока определяется только текущим его состоянием. А значит, сам процесс можно анализировать на предмет наличия в нем повторяющихся последовательностей или наиболее вероятных состояний.

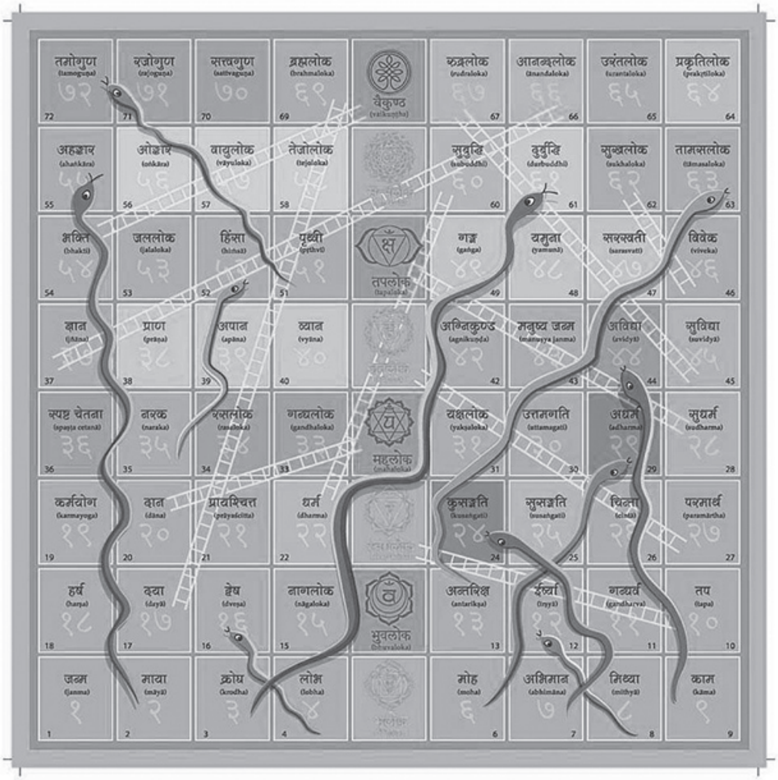

Рис. 6.14. Доска для игры «Лила»

Несложно написать программу, которая могла бы играть в «Лилу», не задумываясь о сокровенном смысле состояний и переходов, и которую можно было бы использовать в анализе методом Монте-Карло. Приведу для тех, кому, как и мне, любопытно поэкспериментировать, алгоритм для одного шага.

```
Переходы по лестницам и змеям могут быть описаны ассоциативным массивом
Jumps = { 10:23, 16:4, 61:3, 20:32, 22:60, 24:7,
          27:41, 28:50, 29:6, 37:66, 45:67, 46:62,
          52:35, 54:68, 55:2, 61:3, 63:13, 72:51, 68:1 }

Вход: текущее состояние (номер клетки) s
если (jumps содержит состояние s), вернуть jumps[s]
m := случайное целое число от 1 до 6
если (m = 6), m := m + случайное число от 1 до 6
если (s > 60), m := min(m,72-s)
вернуть s + m
```

Вот что можно сказать после сотни тысяч партий. Средняя продолжительность игры (то есть достижения 68-й клетки) составляет 41,5 шага, при этом в половине партий игра закончится после 31 шагов. Это довольно много: учитывая, что шаги совершаются по очереди четырьмя-пятью участниками, игра может длиться несколько дней. Клетки посещаются неравновероятно, и разброс вероятностей достаточно велик.

Но любому математику интереснее не получить ответ из эксперимента, а вывести из свойств исследуемой системы. Мы рассмотрим *матрицу переходов M* для игры, она показана на рис. 6.15.

Эта квадратная матрица имеет столько строк, сколько существует состояний (клеток) игры. Насыщенность цвета каждой клеточки показывает вероятность перехода с позиции, указанной по вертикали, на позицию по горизонтали. Стрелки приводят пример, соответствующий вероятности перехода с 40-й клетки на 50-ю. Широкая полоса вокруг диагонали соответствует переходам с помощью кубика, прочие отмеченные точки — прыжкам, диктуемым «стрелами» и «змеями». Игра имеет одно *поглощающее состояние*: достигнув ячейки 68, игрок заканчивает партию. Но пока мы это правило заменим другим: пусть игрок, попав в клетку 68, вновь начинает с первой позиции. Этот переход показан незакрашенным кружком на матрице. Позже я объясню, для чего нам потребовалось таким способом закольцевать игру.

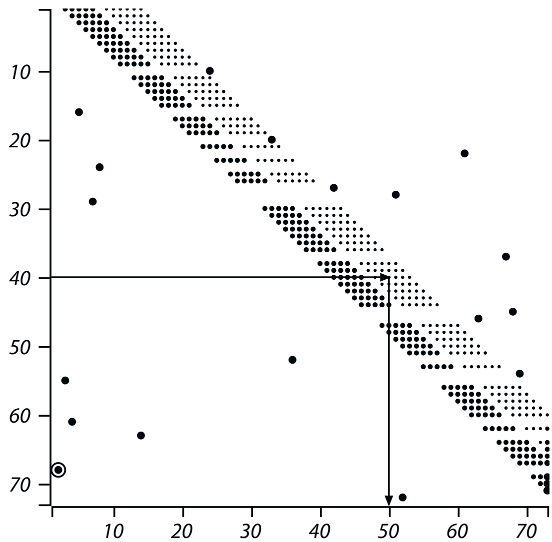

Рис. 6.15. Графическое представление матрицы переходов для «Лилы». Ненулевые элементы показаны кружками, размеры отражают их величину

Точные параметры можно получить не прибегая к методу Монте-Карло, а используя только матрицу переходов. Квадратные матрицы образуют *алгебру*: их можно по определенным правилам складывать и вычитать, умножать на число, перемножать и «делить» (умножать на обратную матрицу). Как и для чисел, многократное умножение матрицы на себя можно рассматривать как возведение в целочисленную степень. В случае с матрицей переходов для цепи Маркова возведение в степень *n* дает нам распределение вероятностей для всех переходов из клетки в клетку через *n* шагов. Так мы получаем своего рода «машину времени», способную мгновенно переместить нас в будущее. Вот как выглядят матрицы переходов игры «Лила» после 2, 3, 10 и, как это ни странно звучит, бесконечного числа умножений (рис. 6.16).

Необычно видеть что-то конечное и нетривиальное, возведенное в бесконечную степень. Привычные для нас вещественные числа (положительные) при возведении в большие степени либо увеличиваются до бесконечности, либо стремятся к нулю, и только числа 0 и 1 не изменяются.

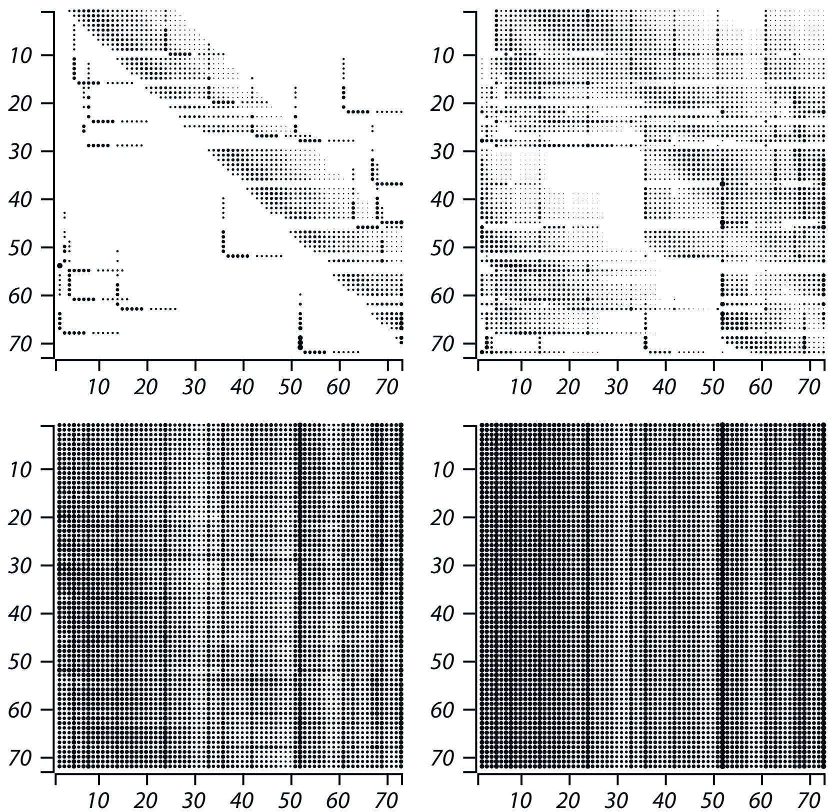

Рис. 6.16. Матрицы переходов, возведенные в степени 2, 4, 10 и ∞

Матрицы существенно раздвигают горизонты математического сознания, порождая необычные, порой причудливые, но полезные алгебраические системы*. Матрица переходов относится к классу *стохастических*, их характеризует то, что сумма элементов любой их строки равна единице. Это связано с тем, что каждая строка соответствует какому-то состоянию системы, а ее элементы — вероятностям перехода из этого состояния в другие. Рассматриваются все возможные варианты переходов, поэтому сумма всех вероятностей равна единице. Возведение стохастической матрицы в целочисленную степень оставляет ее стохастической. В пределе же

* С помощью матриц изящно описываются такие полезные понятия, как комплексные числа, вращения, кватернионы, конечные группы и т. д.

мы получили матрицу, которая не изменяется при умножении на саму себя:

$$M^{\infty} \cdot M^{\infty} = M^{\infty}.$$

Такие матрицы называют *идемпотентными*. Может показаться, что это какой-то экзотический случай, но идемпотентны все преобразования проекции, а значит, и представляющие их матрицы. Вообразите преобразование, для каждого трехмерного объекта возвращающее его тень на некой фиксированной стене. В процессе часть информации о форме объекта неизбежно теряется, а другая остается неизменной. На этом основаны занимательные задачи, в которых нужно определить, тело какой формы может отбросить указанные тени. А что случится с тенью, если мы еще раз спроецируем ее на эту же стену? Ровным счетом ничего, она не изменится. Можно точно показать, что любое преобразование проекции идемпотентно, но пример с тенью уже позволяет понять, что это означает и что это свойство не такая уж редкость. Многократное перемножение матрицы перехода для нашей марковской цепи привело нас к такому случаю. Эта предельная матрица отражает все мыслимые партии сразу. Впечатляет, но игра, определяемая такой матрицей, становится уже неинтересной.

Предельная матрица получилась «полосатой»: все ее столбцы одинаковы, и полоски говорят нам, что вероятность перехода определяется только конечной клеткой и не зависит от начала пути: прошлое в марковском процессе теряется безвозвратно (как форма тела в его тени). Любая строка этой предельной матрицы дает точное распределение «популярности» клеток. Полученный набор вероятностей для состояний игры образует особый вектор π, который называется *стационарным состоянием* цепи (рис. 6.17). Это и есть своеобразная «тень» игры, которая не меняется под действием матрицы перехода*: $M \cdot \pi = \pi$. Величины, обратные найденным нами вероятностям, характеризуют ожидаемое время достижения для

* Мы получили стационарное состояние в результате многократного умножения матрицы перехода. Это не универсальное свойство стохастических матриц. Если в игре есть безусловные циклы, то многократное перемножение может не дать какой-то одной предельной матрицы, хотя инвариант в этом случае отыскать возможно.

каждой клетки. Например, для клетки 68, конечной в игре, инвариантный вектор дает вероятность достижения 2,4%. Обратная величина равна 41,5, что совпадает со средней продолжительностью игры, полученной в эксперименте.

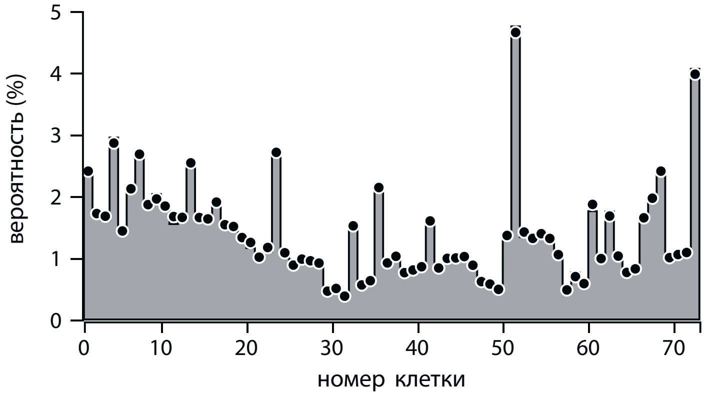

Рис. 6.17. Стационарное состояние игры отражает распределение вероятности посещения клеток. Точками показаны точные значения вероятностей, а столбиками — полученные после ста тысяч шагов игры

Если бы мы оставили состояние 68 поглощающим, как предписывают правила игры, в бесконечном будущем можно было бы ожидать, что все партии сойдутся к нему. Инвариантом в этом случае был бы вектор, в котором от нуля отлична лишь 68-я позиция. Но и такая матрица перехода может быть полезна. Она дает нам возможность проанализировать время окончания игры. Матрица M^n соответствует n шагам в игре, а значит, элемент $\left(M^n\right)_{ij}$ покажет вероятность достижения состояния j из состояния i за n шагов. Таким образом, мы можем построить точное распределение времени окончания игры, нарисовав график зависимости $p(n) = \left(M^n\right)_{1,68}$, как показано на рис. 6.18.

Так можно не играя вычислить, что изменится при каких-либо поправках к правилам: например, смене поглощающего состояния, добавлении или удалении переходов, усложнении выбрасывания кубика и т. п. Матричные вычисления, в том числе точные, можно выполнять очень быстро, почти мгновенно, в отличие от имитационного моделирования, так что допустимо поручить машине оптимизацию правил игры с целью сделать ее интереснее, создавать маловероятные «ценные клетки» и контролировать при этом длительность партии.

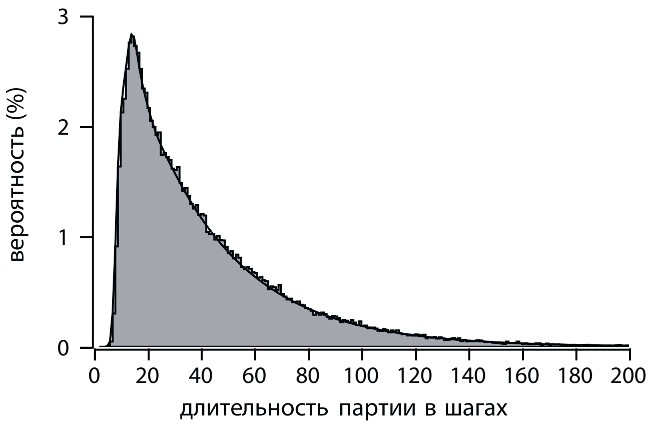

Рис. 6.18. Распределение длительности партии в игру «Лила», полученное в ходе ста тысяч экспериментов и теоретически

Кстати, в вычислениях для этой главы я использовал один красивый прием, имеющий отношение к нашей второй сквозной теме: алгебраическим структурам. С давних пор известен способ умножения целых чисел, который зовется то египетским, то способом русского крестьянина и представляет интерес не только своим практическим смыслом, но и глубокой математической основой и следующей из нее универсальностью. Вы без труда найдете его описание во многих книгах по популярной математике. Метод основан на двух очень простых равенствах, вполне очевидных даже для школьника:

$$(2n)a = 2(na) = na + na,$$
$$(n + 1)a = na + a.$$

Первое равенство позволяет уменьшить множитель n за счет удвоения произведения, а второе — перейти к первому, если уменьшаемый множитель нечетный. Сами по себе эти равенства обладают свойствами ассоциативности и дистрибутивности* умножения, то есть носят фундаментальный характер, но поскольку единица — нейтральный элемент для умножения, они образуют весьма эффективную рекурсивную схему вычисления произведения. Эффективность связана с тем, что умножение — или многократное сложение — заменяется операцией удвоения, которая увеличивает результат существенно быстрее. Например, при перемножении чисел в пределах миллиона потребуется не более 20 шагов этого алгоритма.

Но вот что делает этот метод по-настоящему замечательным: число *a* можно заменить любым другим объектом, для которого определена ассоциативная операция сложения с нейтральным элементом. Такие объекты образуют структуру, называемую *полугруппой с единицей,* или *моноидом*. Дело в том, что умножение элемента моноида на целое число эквивалентно многократному сложению этого объекта с самим собой. А это значит, что, имея любой моноид, мы можем применить к нему метод русского крестьянина! Числа образуют моноид не только с операцией сложения, но и с операцией умножения, и тогда метод можно использовать для быстрого возведения в степень. Моноид с операцией умножения формируют и матрицы, а также представляемые ими линейные преобразования. Это позволяет очень быстро вычислить результат возведения матрицы в очень большую степень без потери точности. Чем я и воспользовался.

В завершение разговора об игре «Лила» перейдем к часто повторяющимся мотивам. Их тоже можно изучать не играя, а анализируя матрицу переходов. Вероятности для любой цепочки вычисляются как произведения вероятностей переходов, умноженных на вероятность попадания в начальную позицию:

$$P(3\to5\to13\to15) = \pi_3 M_{3,5} M_{5,13} M_{13,15}.$$

Так можно перебрать все цепочки длины 3, 4, 5 и т. д. и найти наиболее вероятные. Но такой поиск занял бы слишком много времени. Возможно отыскивать такие цепочки более целенаправленно.

---

* Более того, таким образом определяется операция умножения чисел на самом базовом уровне, так что это аксиома умножения, а не следствие из определения.

Для любой начальной клетки можно, пользуясь матрицей переходов, создать дерево возможных шагов, оставляя по мере построения несколько наиболее вероятных ветвей. Такой процесс называется *поиском оптимального пути в ширину с отсечением*. Действуя таким способом, можно отыскать самые часто наблюдаемые цепочки и выяснить, как распределяются цепочки по вероятности их наблюдения (рис. 6.19).

Вероятность для цепочки	Число цепочек
> 25%	3
> 10%	10
> 5%	64

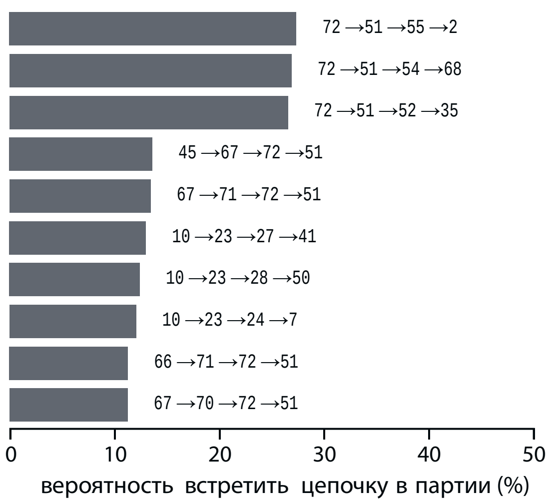

Рис. 6.19. Наиболее часто наблюдаемые цепочки в игре «Лила»

Пример с игрой «Лила» напрямую не касается вопроса о полосах в реальной жизни, но заставляет задуматься. Должно быть, для всемогущего божества, способного видеть сколь угодно далекое будущее, играющего во все игры сразу, мир предстает достаточно скучной вырожденной идемпотентной матрицей. Впрочем, оставим наше мифическое божество разбираться с этой проблемой самостоятельно. Я привел этот пример здесь потому, что мне хотелось показать, как математика позволяет проанализировать структуру довольно сложной и стохастической игры. Предпринимались попытки анализа известной игры «Монополия», но здесь становится существенной роль эксперимента, поскольку процесс накопления игроками денег добавляет в процесс память — и он перестает быть марковским.

Несмотря на простоту и некоторую ограниченность, трудно переоценить важность концепции цепей Маркова. Если взяться перечислять области, в которых они используются, получится внушительный перечень не на одну страницу. В нем окажутся и симуляции реальности более сложной, чем игры; генерация текстов, музыки, речи, тестовых заданий для систем автоматического управления; поиск страниц в сети интернет; физика, химия, биология, генетика, экономика, социология, безопасность дорожного движения… даже в спорте используются цепи Маркова!*

Почему автобуса все нет?!

Говоря о пуассоновском процессе, мы различали частоту и интенсивность потока событий. Это важно понимать, слушая новости или читая результаты научных исследований. Например, на сегодняшний день сейсмологи, увы, не могут предсказать конкретное землетрясение: его время, место и силу. Зато наработаны методики долгосрочного сейсмического прогноза для какого-то региона, но их результаты формулируются на языке теории вероятностей. Что с ними делать — не всегда очевидно.

Например, для Авачинского залива, на берегах которого расположен Петропавловск-Камчатский, в 2018 году был дан такой прогноз: «Суммарная вероятность землетрясений с магнитудой более 7,7, которые могут иметь силу 7–9 баллов в г. Петропавловске-Камчатском, может достигать на следующее пятилетие 52,3%». Что это значит? Завтра тряхнет? А когда? А где? Увы, на такие прямые вопросы мы ответить пока не в силах. Интерпретируя это сообщение, не стоит мыслить о вероятности как о мере частоты событий. Конечно, если повторить пятилетний период сто раз, то

* Сама идея цепи появилась при работе Андрея Андреевича Маркова над темой, как кажется, весьма далекой от математики: анализом сочетаний гласных и согласных звуков в тексте романа А. С. Пушкина «Евгений Онегин».

можно заключить, что в ближайшие 500 лет произойдет примерно 52 землетрясения. Но этот вывод будет верным только при условии неизменности потока, а уже через месяц прогноз изменится. Интенсивность похожа в этом смысле на мгновенную скорость движения: чтобы измерить, что вы двигаетесь со скоростью 60 км/ч, не обязательно ехать целый час именно с таким показателем на спидометре. И, главное, данный учеными прогноз не говорит о том, что между землетрясениями проходит десять лет, как можно предположить, разделив 500 лет на 52 события. Таким образом, если на протяжении десяти лет не было сильного землетрясения, это не значит, что оно произойдет не сегодня-завтра. Оно будет, конечно. Но сколько именно придется ждать — неизвестно.

Посмотрите, как меняется уровень сейсмической активности Камчатского региона для разных масштабов времени (рис. 6.20, изображение взято с сайта Монитора сейсмической активности Камчатского филиала Единой геофизической службы РАН).

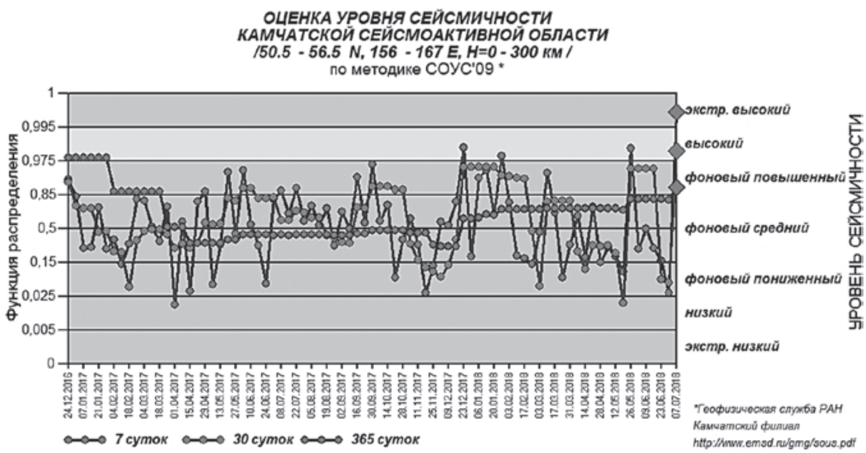

Рис. 6.20. На смену пониженному уровню активности приходит повышенный, активность «дышит», но не периодично, а подобно все тому же случайному блужданию с релаксацией

Но землетрясения — всё же неприятные явления, и пусть бы их не случалось подольше. Бывают события, которых ждешь с большим нетерпением, например прибытие автобуса. Приходя на остановку, мы, конечно, желаем мгновенно сесть на нужный маршрут, но чаще всего это не удается. Тогда, если в этом месте действует четкое расписание, мы смотрим на него, потом на часы, а затем погружаемся в книжку или телефон. Но где-нибудь в середине маршрута часто вместо расписания указывается интервал движения транспорта, например 15 минут. Это значит, что мы уже далеко от станции, с которой автобусы выходят точно по расписанию, и накапливается некоторая ошибка, делающая прибытие транспорта случайным. И вот тут надо иметь в виду, что в среднем придется ждать именно четверть часа, независимо от того, когда вы приходите на остановку. Вот если бы автобусы приходили с *периодичностью* 15 минут, среднее время ожидания составило бы половину периода — 7,5 минуты. Но с интенсивностью так не выйдет! При отсутствии дополнительных условий движение транспорта моделируют пуассоновским потоком, а это значит, что время ожидания автобуса будет подчиняться экспоненциальному закону с той же интенсивностью. Но математическое ожидание для экспоненциально распределенной величины с интенсивностью λ равно $1/\lambda$, откуда и следует наш вывод. И что совсем обидно — количество времени, уже проведенного вами на остановке, никак не влияет на вероятность того, что автобус вот-вот подойдет. Это свойство экспоненциального распределения — *отсутствие памяти*, связанное с независимостью пуассоновских событий.

Впрочем, если быть точным, то дела с ожиданием автобуса обстоят еще хуже. Измеряемый наблюдателем случайный отрезок времени между машинами статистически больше $1/\lambda$, и вероятность длительного интервала выше, чем среднего. Такой парадокс мы уже встречали — это *парадокс наблюдателя* или *инспектора*.

***

Подведем итог. Приходя на остановку, нужно четко принять решение: ждать или идти пешком. Размышлять на тему: подождать еще или уже пойти — только обрекать себя на встречу с законом подлости. Ведь если вы, прождав 17 минут, плюнете и пойдете пешком, вас, весьма вероятно, обгонит долгожданный автобус, а то и два.

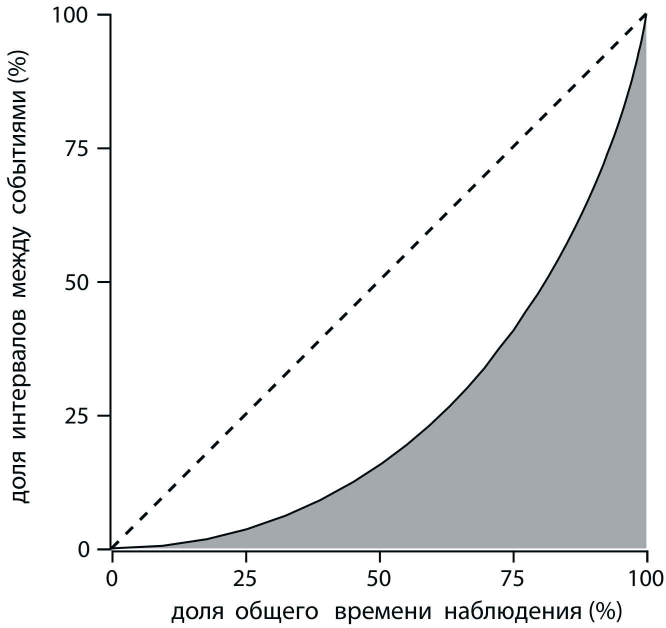

Рис. 6.21. Кривая Лоренца для экспоненциального распределения не зависит от его параметра (интенсивности)

Несправедливость, к которой приводит парадокс инспектора, демонстрирует кривая Лоренца (рис. 6.21). Интересно, что она в случае экспоненциального распределения одинакова для любых интенсивностей. Таким образом, для всех пуассоновских процессов верно утверждение: половина общего времени наблюдения приходится на 20% случаев, когда это очередное событие задерживается. К этому выводу можно прийти, увидев, что на кривой Лоренца 50% общего времени приходится на 80% интервалов, в оставшиеся 20% попали длинные интервалы, поглощающие половину времени ожидания. Коэффициент Джини для экспоненциального распределения равен в точности 1/2.