ПРЕДИСЛОВИЕ

В справочнике приведены все понятия, формулы, утверждения и законы, которые определены программами изучения математики и физики как на базовом, так и на повышенном уровне в средних школах, гимназиях, лицеях и колледжах. Материал систематизирован, теоретические утверждения сопровождаются иллюстрациями. Многие математические методы решения представлены алгоритмически, что рационально для использования на практике и способствует самостоятельной деятельности учащихся. При подготовке справочника авторы ориентировались на прогрессивные, современные подходы в обучении математике и физике.

Комплексное, полное и компактное представление справочной информации из курсов математики и физики является особенностью данного издания, что обеспечивает эффективность его использования.

Справочник будет полезен для систематического изучения математики и физики на занятиях в учреждениях общего среднего, профессионально-технического и среднего специального образования. Он может быть использован для подготовки к централизованному тестированию и для повторения математики и физики в процессе обучения в учреждениях высшего образования.

Авторы

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

N – множество натуральных чисел
Z – множество целых чисел
Q – множество рациональных чисел
I – множество иррациональных чисел
R – множество действительных чисел
$=$ – равно
$\neq$ – не равно
$\equiv$ – тождественно равно
$\approx$ – приближенно равно
$>$ – больше
$<$ – меньше
$\geq$ – больше или равно
$\leq$ – меньше или равно
$\gg$ – существенно больше
$\ll$ – существенно меньше
$\in$ – знак принадлежности множеству
$\subset$ – знак включения множества
$\subseteq$ – знак включения или равенства множеств
$\cup$ – знак объединения множеств
$\cap$ – знак пересечения множеств
∞ – бесконечность
$|a|$ – модуль (абсолютная величина) числа a
$[a]$ – единица физической величины a
const – постоянная величина

МАТЕМАТИКА

I. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ

1. Высказывания и типы теорем

Высказывания

Простое высказывание – повествовательное предложение, в отношении которого можно сказать, истинно оно или ложно. Высказывания обозначают A, B, C, … .

Высказывание «не A» обозначают $\overline{A}$, высказывание «если A, то B» обозначают $A \Rightarrow B$, а высказывание «A тогда и только тогда, когда B» обозначают $A \Leftrightarrow B$.

Типы теорем

Признак (или *достаточное условие*) для B – теорема типа $A \Rightarrow B$.

Обратная теорема к $A \Rightarrow B$ – теорема типа $B \Rightarrow A$.

Критерий (или *необходимое и достаточное условие*) для B – теорема типа $A \Leftrightarrow B$.

Противоположная к обратной теореме – теорема типа $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Высказывание $A \Rightarrow B$ истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. На этом утверждении базируется *метод доказательства от противного*.

2. Множества

Понятие множества

Множество – первичное неопределяемое понятие. Характеризуется как набор *элементов*, обладающих одинаковым свойством. Множества обозначают A, B, X,…, а элементы множества – a, b, x,… .

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут: $a \in A$; если не принадлежит, – то $a \notin A$.

Конечное множество – множество с конечным количеством элементов.

Пустое множество (обозначается $\varnothing$) – множество, в котором нет элементов.

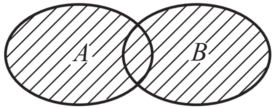
Бесконечное множество – множество, которое не является ни конечным, ни пустым.

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Пишут: $A = B$.

Множество A называется *подмножеством множества* B, если каждый элемент множества A есть элемент множества B; пишут: $A \subset B$ (или $B \supset A$). Если A не является подмножеством B, то пишут: $A \not\subset B$. Если $A \subset B$ или $A = B$, то пишут: $A \subseteq B$.

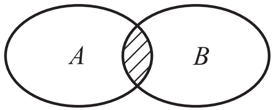
Действия над множествами

Объединение множеств A и B – множество $A \cup B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат или множеству A, или множеству B.



$A \cup B$

Пересечение множеств A и B – множество $A \cap B$, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B.



$A \cap B$

Если $m(A)$ – количество элементов конечного множества A, $m(B)$ – количество элементов конечного множества B, то:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

3. Совокупности и системы

Совокупность двух утверждений A, B – утверждение «A или B»; записывается с помощью квадратной скобки:

$$\left[\begin{array}{l} A, \\ B. \end{array}\right.$$

Система двух утверждений A, B – утверждение «A и B»; записывается с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} A, \\ B. \end{cases}$$

Рассматривают также совокупности и системы трех (и более) утверждений, а также совокупности систем или системы совокупностей утверждений. В качестве утверждений могут быть уравнения, неравенства и т.д.

4. Метод математической индукции

Для доказательства справедливости утверждения $A(n)$ при всех натуральных $n \geq n_0$ $(n_0 \in \mathbf{N})$ необходимо сделать следующие три шага:

1) непосредственной проверкой убедиться в истинности $A(n_0)$;

2) предположить, что $A(k)$ истинно для любого фиксированного натурального k $(k \geq n_0)$;

3) доказать, что $A(k+1)$ истинно для всех $k \in \mathbf{N}$ $(k \geq n_0)$.

II. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Числовые множества

Классификация числовых множеств

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – *множество натуральных чисел*;

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – *множество целых чисел*;

$\mathbf{Q}$ – *множество рациональных чисел*, определяемое двумя способами:

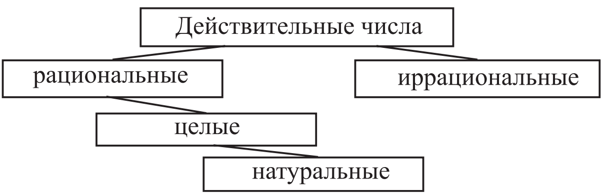
1) множество всех обыкновенных дробей $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$; $n \in \mathbf{N}$;

2) множество всех бесконечных периодических десятичных дробей;

$\mathbf{I}$ – *множество иррациональных чисел*, определяемое как множество всех бесконечных непериодических десятичных дробей;

$\mathbf{R}$ – *множество действительных чисел*:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}.$$



Четные и нечетные натуральные числа:
$2n$ – формула *четных чисел* ($n \in \mathbf{N}$);
$2n-1$ – формула *нечетных чисел* ($n \in \mathbf{N}$).

Некоторые иррациональные числа:

$$e = 2{,}718281828\ldots, \quad \pi = 3{,}141592653\ldots,$$

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots, \quad \sqrt{3} = 1{,}732050807\ldots,$$

$$\sqrt{5} = 2{,}236067977\ldots.$$

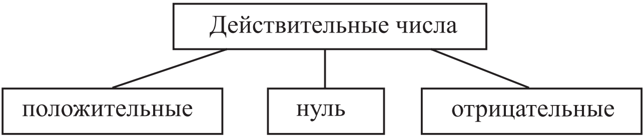
Геометрическое истолкование действительных чисел

Числовая ось (или *координатная прямая*) – прямая с заданными на ней началом отсчета, направлением и единичным отрезком.

Координата точки M на оси Ox – число, которое соответствует этой точке; пишут: $M(x)$.

Между множеством точек числовой оси и множеством действительных чисел установлено взаимно однозначное соответствие.

Число a называется *положительным* (пишут: $a > 0$), если соответствующая точка на числовой оси лежит справа от точки $O(0)$, и *отрицательным* (пишут: $a < 0$) – если она лежит слева.



a и $-a$ – *противоположные числа* ($a \in \mathbf{R}$);

a и $\dfrac{1}{a}$ – *обратные числа* ($a \in \mathbf{R},\ a \neq 0$).

2. Числовые промежутки

Отрезок:

$[a, b]$

$a \le x \le b$

Интервал:

(a, b)

$a < x < b$

Полуинтервалы:

$[a, b)$

$a \le x < b$

$(a, b]$

$a < x \le b$

Числовые лучи:

$(-\infty, b]$  $x \le b$

$(-\infty, b)$  $x < b$

$[a, +\infty)$  $x \ge a$

$(a, +\infty)$  $x > a$

Числовая прямая:

$(-\infty, +\infty)$  $x \in \mathbf{R}$

3. Десятичная система счисления

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – *цифры*.

Если $n \in \mathbf{N}$, то в десятичной системе счисления

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где a_0 – цифра единиц; a_1 – цифра десятков; a_2 – цифра сотен и т.д., причем $a_k \ne 0$; k – разряд цифры. Пишут также: $n = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}$.

В частности:

$\overline{a_1 a_0} = 10a_1 + a_0$ – позиционная запись двузначного натурального числа ($a_1 \ne 0$);

$\overline{a_2a_1a_0} = 100a_2 + 10a_1 + a_0$ – позиционная запись трехзначного числа ($a_2 \neq 0$).

4. Действия над действительными числами

Компоненты действий

Сложение: $a+b$ – *сумма*, a и b – *слагаемые*.

Вычитание: $a-b$ – *разность*, a – *уменьшаемое*, b – *вычитаемое*.

Умножение: ab (или $a \cdot b$, $a \times b$) – *произведение*, a – *множимое*, b – *множитель*, a и b – *сомножители*.

Деление: $\frac{a}{b}$ (или $a:b$) – *частное*, a – *делимое*, b – *делитель* ($b \neq 0$).

Действия над положительными и отрицательными числами

При сложении двух чисел с одинаковыми знаками складывают их модули и перед суммой ставят общий знак. При сложении двух чисел с разными знаками из большего модуля одного из них вычитают меньший модуль другого и ставят знак того числа, у которого модуль больше. Сумма двух противоположных чисел равняется нулю.

Вычитание одного числа из другого можно заменить сложением; при этом уменьшаемое берут со своим знаком, а вычитаемое – с противоположным.

При умножении двух чисел умножают их модули и перед произведением ставят плюс, если знаки сомножителей одинаковы, и минус, – если знаки разные.

При делении двух чисел модуль делимого делят на модуль делителя и перед частным ставят плюс, если знаки делимого и делителя одинаковые, и минус – если знаки разные.

Законы сложения и умножения чисел

$a+b=b+a$ – переместительный закон сложения;
$ab=ba$ – переместительный закон умножения;
$a+(b+c)=(a+b)+c$ – сочетательный закон сложения;
$a(bc)=(ab)c$ – сочетательный закон умножения;
$a(b+c)=ab+ac$ – распределительный закон.

Деление с остатком

Формула деления с остатком:

$$\frac{a}{b}=c+\frac{r}{b} \text{ или } a=bc+r,$$

где a – *делимое*; b – *делитель*; c – *частное*; r – *остаток*; $a, b, c, r \in \mathbf{Z};\ 0 \le r < |b|$.

Если $r \ne 0$, то число a делится на число b с остатком. В таком случае говорят, что c – *неполное частное*.

Если $r=0$, то число a делится на число b нацело (без остатка). В таком случае говорят, что c – *полное частное*. Число a называется *кратным* числу b.

5. Признаки делимости натуральных чисел

На **2** делится число, последняя цифра которого четная или нуль.

На **3** делится число, сумма цифр которого делится на 3.

На **4** делится число, две последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 4.

На **5** делится число, последняя цифра которого 5 или 0.

На **6** делится число, которое делится и на 2, и на 3.

На **7** делится число, у которого разность между числом, выраженным тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами, делится на 7.

На **8** делится число, три последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 8.

На **9** делится число, сумма цифр которого делится на 9.

На **10** делится число, последняя цифра которого нуль.

На **11** делится число, у которого разность суммы цифр, занимающих четные места, и суммы цифр, занимающих нечетные места, делится на 11.

На **13** делится число, у которого разность между числом, выраженным тремя последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами, делится на 13.

На **25** делится число, две последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 25.

На **100** делится число, две последние цифры которого нули.

На **125** делится число, три последние цифры которого нули или образуют число, делящееся на 125.

6. Простые и составные числа

Основные понятия

Натуральное число p, которое имеет только два делителя (1 и p), называется *простым*. Натуральное число p, имеющее другие делители кроме 1 и p, называется *составным*. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным.

Основная теорема арифметики. Всякое составное число единственным образом может быть представлено в виде произведения простых чисел (разложено на простые множители).

Таблица простых чисел, не превосходящих 1000:

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409

419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Наибольший общий делитель

Наибольший общий делитель натуральных чисел $a, b, ..., c$ (обозначается НОД$(a, b, ..., c)$) – наибольшее натуральное число, на которое делится без остатка каждое из данных чисел.

Числа a, b $(a, b \in \mathbf{N})$ называются *взаимно простыми*, если НОД$(a, b) = 1$.

П р а в и л о н а х о ж д е н и я НОД $(a, b, \ldots, c)$:

1) каждое из чисел $a, b, ..., c$ разложить на простые множители;

2) в качестве НОД записать произведение всех множителей, входящих в разложение каждого из чисел, причем с наименьшим из показателей, с которыми они встречаются в разложениях.

Наименьшее общее кратное

Наименьшее общее кратное натуральных чисел $a, b, ..., c$ (обозначается НОК$(a, b, ..., c)$) – наименьшее натуральное число, которое делится без остатка на каждое из данных чисел.

Правило нахождения НОК $(a, b, \ldots, c)$:

1) каждое из чисел $a, b, ..., c$ разложить на простые множители;

2) в качестве НОК записать произведение всех множителей, входящих в разложение хотя бы одного из чисел, причем с наибольшим из показателей, с которыми они встречаются в разложениях.

Если $a, b \in \mathbf{N}$, то

$$ab = \text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b).$$

7. Обыкновенные дроби

Основные понятия

Обыкновенная дробь – число вида $\frac{m}{n}$, где m – *числитель дроби*, $m \in \mathbf{Z}$; n – *знаменатель дроби*, $n \in \mathbf{N}$.

Несократимая дробь – дробь, числитель и знаменатель которой – взаимно простые числа.

Правильная дробь – дробь, модуль числителя которой меньше знаменателя.

Неправильная дробь – дробь, числитель которой больше знаменателя (по модулю) или равен ему.

Смешанное число – число, которое содержит отличные от нуля целую и дробную части.

Основное свойство дроби:

$$\frac{m}{n}=\frac{mp}{np} \quad (p \neq 0).$$

Если $a, b, c, d \in \mathbf{N}$, то:

$$\frac{a}{c}>\frac{b}{c} \text{ при } a>b,$$

$$\frac{a}{b}>\frac{a}{c} \text{ при } b<c.$$

Действия над обыкновенными дробями

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}, \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}.$$

Если b, d – взаимно простые числа, то:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

Если числа b, d не являются взаимно простыми, то для сложения и вычитания дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ необходимо сначала привести их к наименьшему общему знаменателю, который есть НОК (b, d).

$$\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

8. Пропорция

Отношение чисел a и b – дробь $\dfrac{a}{b}$; пишут также: $a:b$.

Пропорция – равенство двух отношений: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ (или $a:b=c:d$), где a, d – *крайние члены пропорции*; b, c – *средние члены пропорции*.

Основное свойство пропорции:

$$ad=bc.$$

Если $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, то:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},\quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c},\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a}.$$

$\dfrac{ma+nb}{pa+qb}=\dfrac{mc+nd}{pc+qd}$ – *производные пропорции*, где m, n, p, q – действительные числа; $m^2+n^2\neq 0$; $pa+qb\neq 0$; $pc+qd\neq 0$.

В частности:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},\quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c},\ \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c},\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Если $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$, то

$$\frac{a_1m_1+a_2m_2+...+a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+...+b_nm_n}=\frac{a_1}{b_1},$$

где $b_1m_1+b_2m_2+...+b_nm_n\neq 0;\ m_1\neq 0.$

Равенства отношений $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ понимают как систему равенств (пропорций):

$$\begin{cases}\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2},\\ \frac{a_1}{a_2}=\frac{c_1}{c_2},\\ \frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.\end{cases}$$

Чтобы разделить величину A на части *прямо пропорционально* числам $a, b, ..., c$ (т.е. в отношении $a : b : ... : c$), необходимо вычислить:

$$\frac{Aa}{a+b+...+c}, \quad \frac{Ab}{a+b+...+c}, \ldots, \quad \frac{Ac}{a+b+...+c}.$$

Чтобы разделить величину A на части *обратно пропорционально* числам $a, b, ..., c$ $\left(\text{т.е. в отношении } \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : ... : \frac{1}{c}\right)$, необходимо вычислить:

$$\frac{A \cdot \frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+...+\frac{1}{c}}, \quad \frac{A \cdot \frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+...+\frac{1}{c}}, \ldots, \quad \frac{A \cdot \frac{1}{c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+...+\frac{1}{c}}.$$

9. Десятичные дроби

Понятие десятичной дроби

Десятичная дробь – обыкновенная дробь вида $\frac{m}{10^k}$, где $m \in \mathbf{Z}$; $k \in \mathbf{N}$.

Для десятичной дроби используется специальная форма записи: сначала записывают целую часть числа и справа от нее ставят запятую; первая цифра после запятой означает число десятых, вторая – сотых, третья – тысячных и т.д.

Десятичные знаки – цифры, стоящие после запятой.

Виды десятичных дробей

Конечная десятичная дробь – дробь с конечным количеством десятичных знаков.

Бесконечная периодическая десятичная дробь – дробь, у которой начиная с некоторого разряда одна цифра или группа цифр повторяется. *Период* этой дроби – повторяющаяся группа цифр (записывается в скобках).

Чисто периодическая дробь – дробь, в которой повторение цифр начинается с первой цифры после запятой.

Смешанная периодическая дробь – дробь, в которой повторение цифр начинается не сразу после запятой.

Действия над десятичными дробями

Сложение и вычитание конечных десятичных дробей выполняют так же, как сложение и вычитание целых чисел; при этом запятые располагают одну под другой. В полученном результате (сумме или разности) запятая находится под запятыми исходных компонентов действий.

Умножение конечных десятичных дробей выполняют так же, как умножение целых чисел, не обращая внимания на запятые. В полученном результате (произведении) количество десятичных знаков равно количеству цифр десятичных знаков обоих сомножителей.

Деление конечных десятичных дробей выполняют так же, как деление целых чисел; при этом умножают обе дроби на такую степень числа 10, чтобы делитель стал целым числом. В полученном результате (частном) запятая ставится тогда, когда деление целой части делимого закончено.

При сложении, вычитании, умножении и делении периодических дробей их переводят в обыкновенные дроби, а затем выполняют действия.

Обращение дробей

Чтобы *обратить обыкновенную дробь в десятичную*, нужно числитель обыкновенной дроби разделить на ее знаменатель по правилу деления десятичных дробей. При этом если знаменатель несократимой дроби раскладывается только на простые множители 2 и 5, то в результате получается конечная десятичная дробь; если он содержит иные простые множители, то получается бесконечная периодическая десятичная дробь.

Чтобы *обратить конечную десятичную дробь в обыкновенную*, нужно:

1) сохранить целую часть числа;

2) преобразовать дробную часть:

а) число, стоящее после запятой, записать числителем обыкновенной дроби;

б) в знаменателе написать 10^k, где k – количество цифр справа от запятой;

в) сократить, если возможно.

Чтобы *обратить чисто периодическую дробь в обыкновенную*, нужно:

1) сохранить целую часть числа;

2) преобразовать дробную часть:

а) период чисто периодической дроби записать числителем обыкновенной дроби;

б) в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде;

в) сократить, если возможно.

Чтобы *обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную*, нужно:

1) сохранить целую часть числа;

2) преобразовать дробную часть:

а) из числа, стоящего после запятой до второго периода, вычесть число, стоящее после запятой до первого периода, и полученную разность записать числителем обыкновенной дроби;

б) в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр между запятой и периодом;

в) сократить, если возможно.

Округление десятичных дробей

При округлении десятичной дроби сохраняют одну или несколько ее цифр, считая слева направо, и отбрасывают все последующие или (если это необходимо для сохранения разрядов) отбрасываемые цифры заменяют нулями.

Существует три способа округления чисел.

1. *Округление по правилу дополнения* (или просто *округление*):

1) если первая слева из отбрасываемых цифр числа меньше 5, то последняя сохраняемая цифра остается без изменения;

2) если первая слева из отбрасываемых цифр числа больше или равна 5, то последняя сохраняемая цифра усиливается (увеличивается на единицу).

2. *Округление с недостатком*: последняя сохраняемая цифра числа остается без изменения.

3. *Округление с избытком*: последняя сохраняемая цифра числа усиливается.

Абсолютная погрешность приближенного значения a числа A – число Δ, удовлетворяющее условию

$$|A-a|\le\Delta.$$

Относительная погрешность приближенного значения a ($a\ne 0$) числа A – число δ, удовлетворяющее условию

$$\left|\frac{A-a}{a}\right| \le \delta.$$

В частности, $\delta = \dfrac{\Delta}{|a|}$.

Стандартный вид числа

Стандартный вид числа:

$$a \cdot 10^k,$$

где $1 \le a < 10$; $k \in \mathbf{Z}$; k – *порядок числа*.

10. Проценты

Процент – сотая доля числа: $1\% = 0{,}01$.

Процентное отношение p чисел a и b – величина

$$p = \frac{a}{b} \cdot 100\%.$$

Чтобы найти p%, которые составляет число a от числа b, используют формулу

$$p = \frac{a}{b} \cdot 100.$$

Чтобы найти число b по известному числу a, которое составляет p% от числа b, применяют формулу

$$b = \frac{a}{p} \cdot 100.$$

Чтобы найти число a, которое составляет $p\%$ от числа b, используют формулу

$$a = \frac{bp}{100}.$$

Промилле – тысячная доля числа: 1‰ = 0,001.

11. Неравенства

Понятие неравенства

Неравенство – два числа или два математических выражения, соединенных одним из следующих знаков: > (*больше*), < (*меньше*), ≥ (*больше или равно*), ≤ (*меньше или равно*).

$a > b$, $a < b$, $a \geq b$, $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a - b > 0$, $a - b < 0$, $a - b \geq 0$, $a - b \leq 0$ соответственно.

Неравенства, содержащие знак > или <, называются *строгими*, а неравенства, содержащие знак ≥ или ≤, – *нестрогими*.

Двойное неравенство $a < b < c$ записывается как система неравенств:

$$\begin{cases} b > a, \\ b < c. \end{cases}$$

Свойства числовых неравенств

Пусть $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, тогда:

- если $a < b$, то $a + c < b + c$;
- если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$;
- если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$;
- если $a < b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;
- если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$;
- если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $ac < bd$;
- если $0 < a < b$ и $0 < c < d$, то $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$;
- если $0 < a < b$, то $a^n < b^n$ $(n \in \mathbf{N})$.

Некоторые полезные неравенства:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2},\ \ a, b \ge 0 \text{ (равенство при } a = b\text{)};$$

$$a + \frac{1}{a} \ge 2,\ \ a > 0 \text{ (равенство при } a = 1\text{)};$$

$$a + \frac{1}{a} \le -2,\ \ a < 0 \text{ (равенство при } a = -1\text{)};$$

$$\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b},\ \ a, b \ge 0 \text{ (равенство при } ab = 0\text{)}.$$

12. Характерные величины для действительных чисел

Модуль числа

Модуль (или *абсолютная величина*) *числа x* (обозначается $|x|$), где $x \in \mathbf{R}$, определяется следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля: $|x|$ – расстояние от точки 0 до точки x на числовой оси.

С в о й с т в а   м о д у л я   ч и с л а. Если $x, y \in \mathbf{R}$, то:

$$|x| \geq 0,$$

$$|-x| = |x|,$$

$$|xy| = |x||y|,$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0),$$

$$\left|x^c\right| = |x|^c \quad (x \neq 0,\ c \in \mathbf{Z}),$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x + y| \geq |x| - |y|,$$

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

$|x| = a$ $(a > 0)$ тогда и только тогда, когда $x \in \{-a, a\}$;

$|x| < a$ $(a > 0)$ тогда и только тогда, когда $x \in (-a, a)$;

$|x| > a$ $(a > 0)$ тогда и только тогда, когда $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

Знак числа

Знак (или *сигнум*) *числа* x (обозначается $\operatorname{sgn} x$ или $\operatorname{sign} x$), где $x \in \mathbf{R}$, определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{ если } x < 0, \\ \ \ 0, \text{ если } x = 0, \\ \ \ 1, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Свойства знака числа:

$$x = |x| \operatorname{sgn} x, \qquad |x| = x \operatorname{sgn} x.$$

Целая часть числа

Целая часть числа x (обозначается $[x]$), где $x \in \mathbf{R}$, определяется как такое целое число, что

$$[x] \le x < [x] + 1.$$

Дробная часть числа

Дробная часть числа x (обозначается $\{x\}$), где $x \in \mathbf{R}$, определяется следующим образом:

$$\{x\} = x - [x].$$

13. Степени

Понятие степени

Степень – выражение вида a^k, определенное при некоторых значениях чисел a, k. Здесь a – *основание степени*, k – *показатель степени*.

Степень с целым показателем:

$$a^n = \underbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} \quad (n \in \mathbf{N});$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0);$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0,\ n \in \mathbf{N}).$$

Степень с рациональным показателем ($k, m, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$):

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} a \in \mathbf{R}, & \text{если} \quad n = 2k+1, \\ a \geq 0, & \text{если} \quad n = 2k; \end{cases}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} a \in \mathbf{R},\ a \neq 0, & \text{если} \ \ n = 2k+1, \\ a > 0, & \text{если} \ \ n = 2k. \end{cases}$$

Степень с иррациональным показателем a^p $(p \in \mathbf{I})$ определяется для любого $a > 0$ $(a \in \mathbf{R})$ с использованием понятия предела числовой последовательности.

Свойства степеней

Если $a, b, c \in \mathbf{R}$ и все степени определены, то:

$$a^b a^c = a^{b+c},$$

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} \quad (a \neq 0),$$

$$(a^b)^c = a^{bc},$$

$$a^c b^c = (ab)^c,$$

$$\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c \quad (b \neq 0).$$

Пусть $a, b, c \in \mathbf{R}$, тогда:

- если $a > 1$ и $b < c$, то $a^b < a^c$;
- если $0 < a < 1$ и $b < c$, то $a^b > a^c$;
- если $0 < a < b$ и $c > 0$, то $a^c < b^c$;
- если $0 < a < b$ и $c < 0$, то $a^c > b^c$.

14. Корни

Понятие корня

Корень n-й степени ($n \in \mathbf{N},\ n \geq 2$) из числа a (обозначается $\sqrt[n]{a}$) – такое действительное число, что $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Здесь a – *подкоренное выражение*, n – *показатель корня*.

$\sqrt[n]{a}$ – *арифметическое значение корня*, если $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a} \geq 0$:

$\sqrt[2k+1]{a}$ определен для всех $a \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$;

$\sqrt[2k]{a}$ определен для всех $a \geq 0$, $k \in \mathbf{N}$.

Свойства корней

Если $a, b \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}$, то:

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a};$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \text{ где } \begin{cases} a \in \mathbf{R}, & \text{если } n = 2k+1, \\ a \geq 0, & \text{если } n = 2k; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{если } n = 2k+1, \\ |a|, & \text{если } n = 2k; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \begin{cases} \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, & \text{если } n = 2k+1, \\ \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}, & \text{если } n = 2k,\ ab \geq 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, & \text{если } n = 2k+1,\ b \neq 0, \\ \dfrac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}, & \text{если } n = 2k,\ ab \geq 0,\ b \neq 0. \end{cases}$$

Если $a \geq 0,\ m, n, p \in \mathbf{N},\ m \geq 2,\ n \geq 2$, то:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}.$$

Если $b > 0,\ a \geq \sqrt{b}$, то

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Устранение иррациональности в знаменателе дроби

В знаменателе дроби имеется иррациональность, если он содержит корни.

Умножая числитель и знаменатель дроби на одно и то же числовое выражение, отличное от нуля, заданную дробь сводят к равной ей, не содержащей корней в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b},$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a+b-c+2\sqrt{a}\sqrt{b}}$$

(далее преобразования выполняют в зависимости от выражения в знаменателе),

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}\pm\sqrt[4]{b}}=\frac{\sqrt[4]{a}\mp\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt[4]{a}\mp\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a\pm b},$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{\sqrt[3]{a}\mp\sqrt[3]{b}}{a\mp b}.$$

15. Логарифмы

Понятие логарифма

Логарифм числа b $(b>0)$ *по основанию* a $(a>0,\ a\neq 1)$ – показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b (обозначается $\log_a b$).

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b}=b.$$

$\lg b$ – *десятичный логарифм* (логарифм по основанию 10);

$\ln b$ – *натуральный логарифм* (логарифм по основанию e, $e\approx 2{,}7$);

$\log_c \log_a b$ – повторный логарифм ($c>0$, $c\neq 1$, $\log_a b>0$).

Свойства логарифмов

Если $a, b, c>0$, $a\neq 1$, то:

$$\log_a 1=0,$$

$$\log_a a=1,$$

$$\log_a (bc)=\log_a b+\log_a c,$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c,$$

$$\log_a b^k = k\log_a b \quad (k \in \mathbf{R}),$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b \quad (m \in \mathbf{R},\ m \neq 0),$$

$$\log_a b = \log_{a^k} b^k \quad (k \in \mathbf{R},\ k \neq 0),$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c \neq 1),$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1),$$

$$c^{\log_a b} = b^{\log_a c}.$$

$\log_a b = \log_a c$ тогда и только тогда, когда $b = c$;

$\log_a b > \log_a c$, где $a > 1$, тогда и только тогда, когда $b > c$;

$\log_a b > \log_a c$, где $0 < a < 1$, тогда и только тогда, когда $b < c$.

Обобщенные свойства логарифмов

Если $a, b > 0$, $a \neq 1$ и $f(x)$, $g(x)$ – выражения с переменной, то:

$$\log_a(f(x)g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|,$$

где $f(x)g(x) > 0$;

$$\log_a\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|,$$

где $f(x)g(x) > 0$;

$$\log_a(f(x))^{2n} = 2n\log_a|f(x)|,$$

где $n \in \mathbf{N}$; $f(x) \neq 0$;

$$\log_{(f(x))^{2n}} b = \frac{1}{2n}\log_{|f(x)|} b,$$

где $n \in \mathbf{N}$; $\begin{cases} f(x) \neq 0, \\ f(x) \neq \pm 1. \end{cases}$

16. Средние величины

Если $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, то:

$A = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ – *среднее арифметическое*;

$$G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \text{ – } \textit{среднее геометрическое},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$;

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \text{ – } \textit{среднее гармоническое},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$;

$$K = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \text{ – } \textit{среднее квадратическое}.$$

Теорема Коши. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, то

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

17. Факториал

Факториал – произведение всех последовательных натуральных чисел до определенного значения n ($n \in \mathbf{N}$):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

По определению $0! = 1$.

Таблица факториалов ($n \le 10$):

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5 040
3	6	8	40 320
4	24	9	362 880
5	120	10	3 628 800

III. ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ

1. Понятие выражения с переменными

Выражение $F(x, y, ..., z)$ *от переменных* $x, y, ..., z$ образуют с использованием чисел и переменных $x, y, ..., z$ из некоторого числового множества, над которыми производятся арифметические и функциональные операции.

В частности, $F(x)$ – выражение от одной действительной переменной x, если $x \in D \subseteq \mathbf{R}$.

Область допустимых значений (ОДЗ) *выражения* – множество всех наборов числовых значений переменных $x, y, ..., z$, при которых выражение $F(x, y, ..., z)$ имеет смысл.

Классификация выражений:

• *элементарное выражение* – выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение, деление переменных, возведение их в целую степень, извлечение арифметического корня и только те функциональные операции, которые соответствуют элементарным функциям;

• *специальное выражение* – выражение, содержащее функциональные операции, которые соответствуют специальным функциям;

• *алгебраическое выражение* – элементарное выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение, деление переменных, возведение их в целую степень и извлечение арифметического корня;

• *трансцендентное выражение* – элементарное выражение, содержащее возведение переменной в иррациональную степень, операции показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций;

• *рациональное выражение* – алгебраическое выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение, деление переменных и возведение их в целую степень;

• *иррациональное выражение* – алгебраическое выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение, деление переменных, возведение их в целую степень и извлечение арифметического корня из переменной;

• *целое выражение* (или *многочлен*) – рациональное выражение, содержащее только сложение, вычитание, умножение переменных и возведение их в натуральную степень;

• *дробное выражение* (или *рациональная дробь*) – рациональное выражение, содержащее деление на переменную.

2. Формулы сокращенного умножения

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы;

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности;

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ – разность квадратов;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суммы;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб разности;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов;

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, где $n \in \mathbf{N}$;

$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$, где $n \in \mathbf{N}$.

Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots +$$
$$+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n,$$

где $n \in \mathbf{N}$.

Треугольник Паскаля:

						1								0
					1		1							1
				1		2		1						2
			1		3		3		1					3
		1		4		6		4		1				4
	1		5		10		10		5		1			5
1		6		15		20		15		6		1		6
....														n

Числа с определенным номером n $(n \in \mathbf{N})$ в строке треугольника Паскаля являются последовательными коэффициентами в формуле бинома Ньютона для степени n.

3. Многочлены

Понятие многочлена с одной переменной

Многочлен n-й степени $(n \in \mathbf{N})$ с одной переменной x (записанный в стандартном виде) – выражение

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – действительные *коэффициенты многочлена*, причем $a_n \neq 0$; $x \in \mathbf{R}$; a_n – *старший коэффициент*; a_0 – *свободный член*.

Многочлены обозначают $P(x)$, $Q(x)$, … .

$a_k x^k$ – *одночлен k-й степени* $(k = 0, 1, ..., n)$.

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ – *приведенный многочлен.*

a_0 – *многочлен нулевой степени* $(a_0 \in \mathbf{R})$.

ax^2+bx+c – *квадратный трехчлен* $(a, b, c \in \mathbf{R},\ a \neq 0)$.

Многочлены называются *равными*, если равны все их коэффициенты при соответствующих степенях x.

Если все коэффициенты многочлена $P(x)$ равны нулю, то говорят, что многочлен тождественно равен нулю: $P(x) \equiv 0\ \ (x \in \mathbf{R})$.

Действия над многочленами

Если $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + +b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$, $m \le n$, то:

$$cP(x) = ca_n x^n + ca_{n-1}x^{n-1} + ... + ca_1 x + ca_0 \quad (c \in \mathbf{R});$$

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + ... + \\ +(a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$

где $b_k = 0$ для $k = m+1, m+2, ..., n$ при $m < n$.

При умножении многочленов каждый одночлен одного многочлена умножают на каждый одночлен другого многочлена, полученные результаты складывают и приводят подобные члены.

Ф о р м у л а д е л е н и я м н о г о ч л е н о в:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad (Q(x) \neq 0)$$

или

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x),$$

где $S(x)$ – *частное*; $R(x)$ – *остаток*, причем степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$.

Если $R(x) \equiv 0$, то многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$ нацело, т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) \text{ или } P(x) = Q(x)S(x).$$

Частное и остаток определяют однозначно, например с помощью деления «углом».

С х е м а Г о р н е р а. Если $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = x - x_0$ $(x_0 \in \mathbf{R})$, то

$$P(x) = Q(x)S(x) + r,$$

где $r \in \mathbf{R}$.

Коэффициенты многочлена

$$S(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_1 x + c_0$$

и остаток r вычисляют по формулам

$$\begin{cases} c_{n-1} = a_n, \ c_{n-2} = a_{n-1} + x_0 c_{n-1}, \ \ldots, \ c_0 = a_1 + x_0 c_1, \\ r = a_0 + x_0 c_0 \end{cases}$$

с использованием таблицы

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
x_0	c_{n-1}	c_{n-2}	$\ldots$	c_0	r

Корни многочлена

Число x_0 ($x_0 \in \mathbf{R}$) называется *корнем многочлена* $P(x)$, если $P(x_0) = 0$.

Число x_0 называется *корнем кратности* k *многочлена* $P(x)$, если

$$P(x) = (x - x_0)^k S(x), \quad S(x_0) \neq 0.$$

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - x_0$ равен $P(x_0)$.

Следствие. Число x_0 является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится нацело на $x - x_0$.

Если приведенный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целые корни, то они содержатся среди делителей свободного члена.

Разложение многочлена на множители

Если $P(x)$ – многочлен степени n, то его разложение на множители имеет общий вид

$$P(x) = A(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_k)^{n_k} \cdot$$
$$\cdot (a_1x^2+b_1x+c_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (a_mx^2+b_mx+c_m)^{r_m},$$

где $A, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{R}; x_1, x_2, \ldots, x_k$ – действительные корни многочлена; $n_1, n_2, \ldots, n_k, r_1, \ldots, r_m \in \mathbf{N}$; $n_1+n_2+\ldots+n_k+2r_1+\ldots+2r_m = n$; квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

М е т о д ы р а з л о ж е н и я:

- *вынесение общего множителя за скобки*;
- *метод группировки*:

1) непосредственно – слагаемые заданного выражения объединяют в группы, имеющие общий множитель, вынесение которого приводит к одинаковым выражениям в скобках; затем снова используют метод вынесения общего множителя за скобки;

2) с предварительными преобразованиями слагаемых – вначале одно или несколько слагаемых заменяют тождественно равной суммой (разностью), а затем используют метод группировки;

- *использование формул разложения квадратного трехчлена на множители*:

$$ax^2 + bx + c =$$
$$= \begin{cases} a(x - x_1)(x - x_2), \text{ если } D > 0 \text{ и } x_1, x_2 - \text{корни}, \\ a(x - x_0)^2, \text{ если } D = 0 \text{ и } x_0 - \text{корень}; \end{cases}$$

- *использование формул сокращенного умножения*;
- *замена переменной*: делают замену переменной для понижения степени выражения, раскладывают на множители, возвращаются к старой переменной и продолжают раскладывать;
- *выделение полного квадрата суммы и сведение к разности квадратов*: считая, что выражение содержит сумму квадратов, дополняют его удвоенным произведением величин, выделяют полный квадрат суммы и сводят выражение к разности квадратов, а затем раскладывают;
- *поиск корней многочлена среди делителей свободного члена*: если приведенный многочлен имеет целые коэффициенты, то целые корни (если они существуют) ищут среди делителей свободного члена, а затем раскладывают многочлен на множители, используя следствие из теоремы Безу.

Понятие многочлена с несколькими переменными

Одночлен с n переменными $(n \in \mathbf{N})$ – произведение числа и n различных переменных в натуральных степенях.

Степень одночлена с n переменными – сумма показателей степени.

Многочлен с несколькими переменными – сумма одночленов, содержащих эти переменные, причем каждая переменная входит хотя бы в один одночлен.

Степень многочлена с несколькими переменными – наибольшая степень его одночленов.

4. Рациональные дроби

Понятие рациональной дроби

Рациональная дробь – выражение вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ – многочлены; $Q(x) \neq 0$.

Если n – степень многочлена $P(x)$, m – степень многочлена $Q(x)$, то *правильная рациональная дробь* та, для которой $n < m$, а *неправильная* – для которой $n \geq m$.

Разложение рациональной дроби

Если задана неправильная дробь, то сначала необходимо выделить целую часть, а затем полученную правильную дробь разложить на сумму простейших.

Правильная рациональная дробь

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-c)} \quad (a, b, \ldots, c \in \mathbf{R})$$

представима суммой дробей:

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-c)} = \\ = \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{C}{x-c},$$

где $A, B, \ldots, C$ – числовые коэффициенты, которые нужно найти.

Для нахождения $A, B, \ldots, C$ *методом неопределенных коэффициентов* необходимо:

1) в правой части равенства привести дроби к общему знаменателю и записать сумму в виде одной дроби;

2) приравнять числители заданной и полученной дробей;

3) многочлены в левой и правой частях равенства записать в стандартном виде;

4) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях многочленов и получить систему уравнений относительно $A, B, \ldots, C$;

5) решить полученную систему и найти числовые значения коэффициентов $A, B, \ldots, C$;

6) записать разложение исходной дроби на сумму простейших дробей с найденными числовыми значениями коэффициентов $A, B, \ldots, C$.

IV. УРАВНЕНИЯ

1. Понятие уравнения

Уравнение – это равенство, содержащее одно или несколько неизвестных, при условии, что ставится задача нахождения всех тех значений неизвестных, при которых оно истинно.

Число a называется *корнем* (или *решением*) *уравнения*, если оно обращает это уравнение в верное числовое равенство. *Решить уравнение* – значит найти множество всех его решений (корней) или доказать, что таких нет.

Область допустимых значений (ОДЗ) *уравнения* – множество всех тех значений переменной (переменных), при которых определены все выражения, входящие в это уравнение.

Равносильные (или *эквивалентные*) *уравнения* – те уравнения, множества решений которых совпадают.

2. Линейное уравнение

Стандартный вид:

$$ax + b = 0,$$

где $a, b \in \mathbf{R}$.

Линейное уравнение:

1) при $a \neq 0$ имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{a}$;

2) при $a = 0, b \neq 0$ решений не имеет;

3) при $a = 0$, $b = 0$ имеет бесконечное множество решений: $x \in \mathbf{R}$.

3. Квадратное уравнение

Стандартный вид:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a, b, c \in \mathbf{R}$; $a \neq 0$.

$D = b^2 - 4ac$ – *дискриминант уравнения*.

Квадратное уравнение:

1) при $D > 0$ имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

2) при $D = 0$ имеет единственный (двукратный) корень

$$x_0 = -\frac{b}{2a};$$

3) при $D < 0$ действительных корней не имеет.

Приведенное квадратное уравнение:

$$x^2 + px + q = 0,$$

где $p, q \in \mathbf{R}$.

Неполные квадратные уравнения:

- уравнение $ax^2+bx=0$ при $b\neq 0$ имеет корни

$$x_1=0,\quad x_2=-\frac{b}{a};$$

- уравнение $ax^2+c=0$ при $ac<0$ имеет корни

$$x_1=-\sqrt{-\frac{c}{a}},\quad x_2=\sqrt{-\frac{c}{a}};$$

- уравнение $ax^2=0$ имеет единственный корень

$$x_0=0.$$

Теорема Виета. Числа x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Числа x_1, x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q. \end{cases}$$

4. Уравнение *n*-й степени

Стандартный вид:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где $a_k \in \mathbf{R}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$; $a_n \neq 0$; $n \in \mathbf{N}$.

Частные случаи уравнения n-й степени:

$ax + b = 0$ – линейное;

$ax^2 + bx + c = 0$ – квадратное;

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ – *кубическое*;

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ – *биквадратное* (сводится к квадратному уравнению заменой $y = x^2$).

Основные методы решения уравнения n-й степени $(n \geq 3)$:

- метод разложения многочлена на множители;
- метод замены переменной;
- поиск корней среди делителей свободного члена.

5. Дробно-рациональное уравнение

Стандартный вид:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0,$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

На ОДЗ ($Q(x) \neq 0$) дробно-рациональное уравнение сводится к решению уравнения $P(x) = 0$. Проверяют, входят ли полученные корни в ОДЗ.

6. Иррациональные уравнения

Иррациональное уравнение – уравнение, в котором выражение с неизвестной содержится под знаком корня.

Методы решения:

- уравнение

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \quad (n \in \mathbf{N})$$

равносильно уравнению $f(x) = (g(x))^{2n+1}$;

- уравнение

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \quad (n \in \mathbf{N})$$

сводится к уравнению-следствию $f(x) = (g(x))^{2n}$, корни которого проверяют подстановкой в исходное уравнение;

- уравнение

$$\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)} \quad (n \in \mathbf{N})$$

сводится к уравнению-следствию $f(x) = g(x)$, корни которого проверяют подстановкой в исходное уравнение;

• уравнение

$$F\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)=0,$$

где F – некоторое выражение, заменой $y=\sqrt[n]{f(x)}$ сводится к уравнению $F(y)=0$. Решают последнее уравнение и возвращаются к переменной x.

7. Показательные уравнения

Показательное уравнение – уравнение, в котором выражение с неизвестной содержится в показателе степени при постоянном основании.

Методы решения:

• уравнение

$$a^{f(x)}=b \quad (a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$$

равносильно уравнению $f(x)=\log_a b$;

• уравнение

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \quad (a>0, a\neq 1)$$

равносильно уравнению $f(x)=g(x)$;

• уравнение

$$F\left(a^{f(x)}\right) = 0,$$

где F – некоторое выражение, заменой $y = a^{f(x)}$ сводится к уравнению $F(y) = 0$. Решают последнее уравнение и возвращаются к переменной x.

8. Логарифмические уравнения

Логарифмическое уравнение – уравнение, в котором выражение с неизвестной содержится под знаком логарифма или в его основании.

Методы решения:

• уравнение

$$\log_{f(x)} g(x) = c \quad (c \in \mathbf{R})$$

равносильно уравнению $g(x) = f(x)^c$ на ОДЗ $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1; \end{cases}$

• уравнение

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$$

равносильно уравнению $g(x)=h(x)$ на ОДЗ $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ g(x)>0, \\ h(x)>0; \end{cases}$

- уравнение

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{h(x)} g(x)$$

равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} g(x)=1, \\ f(x)=h(x) \end{array}\right.$ на ОДЗ $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ h(x)>0, \\ h(x)\neq 1, \\ g(x)>0; \end{cases}$

- уравнение

$$F\left(\log_{f(x)} g(x)\right)=0,$$

где F – некоторое выражение, заменой $y=\log_{f(x)} g(x)$ сводится к уравнению $F(y)=0$. Решают последнее уравнение и возвращаются к переменной x.

9. Уравнения с модулем

Уравнение с модулем – уравнение, в котором выражение с неизвестной содержится под знаком модуля.

Методы решения:

- уравнение

$$\left|f(x)\right| = a \quad (a \in \mathbf{R}):$$

1) при $a < 0$ решений не имеет;

2) при $a = 0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$;

3) при $a > 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a; \end{array}\right.$

- уравнение

$$a\left|f(x)\right| = b\left|g(x)\right| \quad (a, b > 0)$$

равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} af(x) = bg(x), \\ af(x) = -bg(x); \end{array}\right.$

- уравнение

$$\left|f(x)\right| = g(x)$$

решают методом промежутков.

Метод промежутков:

1) найти корни уравнения $f(x) = 0$;

2) нанести найденные корни на числовую ось;

3) определить знаки $f(x)$ для каждого из полученных промежутков;

4) нарисовать кривую знаков (как знаковую характеристику выражения $f(x)$);

5) решить уравнение на каждом промежутке в отдельности, проверяя, принадлежат ли найденные корни промежутку;

6) записать ответ, указав совокупность всех найденных корней.

Уравнение, содержащее несколько модулей, можно решать также методом промежутков.

10. Системы уравнений

Понятие системы уравнений

Система уравнений – множество уравнений, для которого требуется найти все значения неизвестных, удовлетворяющие каждому уравнению.

Решение системы – множество значений неизвестных, удовлетворяющих всем уравнениям системы.

Решить систему уравнений – значит найти множество всех ее решений или доказать, что система решений не имеет.

Совместная система – система, имеющая решение.

Несовместная система – система, которая не имеет решения.

Равносильные системы уравнений – те системы, множества решений которых совпадают.

Методы решения систем двух уравнений с двумя неизвестными

Метод подстановки: в каком-либо уравнении системы выражают одну неизвестную через другую и подставляют в другое уравнение с целью исключения одной неизвестной.

Метод сложения: уравнение системы умножают на число и прибавляют к другому уравнению, чтобы одна из неизвестных исчезла или было получено более простое уравнение.

Метод умножения (*деления*): если свободные члены системы уравнений не равны нулю, то одно из уравнений заменяют произведением (частным) исходных уравнений.

Метод замены переменной: одинаковые выражения в двух уравнениях системы заменяют двумя новыми переменными, решают полученную систему и возвращаются к первоначальным переменным или делают замену только в одном уравнении, которое решают отдельно, а затем возвращаются к решению системы.

Графический метод: строят графики функций или кривые, которые соответствуют уравнениям системы, и находят координаты их точек пересечения.

V. НЕРАВЕНСТВА

1. Неравенства с одной переменной

$$f(x) > 0, \quad f(x) \geq 0, \quad f(x) < 0, \quad f(x) \leq 0,$$

где $f(x)$ – выражение с переменной x при условии, что ставится задача нахождения всех тех значений x ($x \in \mathbf{R}$), при которых эти неравенства истинны.

Решение неравенства с одной переменной – такое значение переменной, при котором неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство с одной переменной – значит найти множество всех его решений или доказать, что неравенство решений не имеет.

Равносильные неравенства – те неравенства, множества решений которых совпадают.

Несколько неравенств с одной переменной образуют совокупность, если ставится задача найти объединение множества решений заданных неравенств, и образуют систему, если ставится задача найти пересечение множества решений заданных неравенств.

2. Линейные неравенства

$$ax+b>0, \quad ax+b\geq 0, \quad ax+b<0, \quad ax+b\leq 0,$$

где $a, b \in \mathbf{R}$.

Решение линейных неравенств:

1) $ax+b>0$:

a	b	Множество решений
$a>0$	$b\in\mathbf{R}$	$\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$
$a<0$	$b\in\mathbf{R}$	$\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$
$a=0$	$b>0$	$(-\infty, +\infty)$
	$b\leq 0$	Нет решений

2) $ax+b\geq 0$:

a	b	Множество решений
$a>0$	$b\in\mathbf{R}$	$\left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$
$a<0$	$b\in\mathbf{R}$	$\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$
$a=0$	$b\geq 0$	$(-\infty, +\infty)$
	$b<0$	Нет решений

Неравенства $ax+b<0$ и $ax+b\le 0$ сводятся к рассмотренным умножением на -1.

3. Квадратные неравенства

$$ax^2+bx+c>0, \quad ax^2+bx+c\ge 0,$$
$$ax^2+bx+c<0, \quad ax^2+bx+c\le 0,$$

где $a, b, c \in \mathbf{R}$; $a \ne 0$.

Решение квадратных неравенств. Пусть D – дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ – корни уравнения при $D>0$, x_0 – корень при $D=0$. Тогда:

1) $ax^2+bx+c>0$:

a	b	Множество решений
$a>0$	$D>0$	$(-\infty, x_1)\cup(x_2, +\infty)$
	$D=0$	$(-\infty, x_0)\cup(x_0, +\infty)$
	$D<0$	$(-\infty, +\infty)$
$a<0$	$D>0$	(x_1, x_2)
	$D\le 0$	Нет решений

2) $ax^2+bx+c\ge 0$:

a	b	Множество решений
$a>0$	$D>0$	$(-\infty, x_1]\cup[x_2, +\infty)$
	$D=0$	$(-\infty, +\infty)$
	$D<0$	$(-\infty, +\infty)$
$a<0$	$D>0$	$[x_1, x_2]$
	$D=0$	$\{x_0\}$
	$D<0$	Нет решений

Неравенства $ax^2+bx+c<0$ и $ax^2+bx+c\le 0$ сводятся к рассмотренным умножением на -1.

4. Неравенства *n*-й степени

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 > 0$$

$$(\text{или} \ge 0,\ < 0,\ \le 0),$$

где $a_k \in \mathbf{R}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$; $a_n \ne 0$; $n\in\mathbf{N}$.

Частные случаи неравенств *n*-й степени:

$ax + b > 0$ – линейное;

$ax^2 + bx + c > 0$ – квадратное.

Основной метод решения неравенств n-й степени при $n \geq 3$ – метод промежутков.

Метод промежутков:

1) разложить многочлен левой части неравенства на множители. Допустим, получено

$$(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{n_k} > 0,$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$; $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$; $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$;

2) нанести корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ многочлена на числовую ось;

3) поставить справа от большего корня x_k знак «+», далее (аналогично при «переходе» через остальные корни):

а) если n_k – нечетное число, то при «переходе» через корень x_k знак изменится на противоположный;

б) если n_k – четное число, то при «переходе» через корень x_k знак не изменится;

4) нарисовать кривую знаков (как знаковую характеристику выражения $f(x)$);

5) отметить те промежутки, которые соответствуют знаку неравенства;

6) записать ответ.

5. Дробно-рациональные неравенства

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0,$$

где $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ равносильно неравенству $P(x)Q(x) > 0$; неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ равносильно системе $\begin{cases} P(x)Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$ Далее возможно использование метода промежутков.

Применяют также метод замены переменной: решают неравенство с новой переменной, а затем возвращаются к переменной x.

6. Показательные неравенства

Показательное неравенство – неравенство, в котором выражение с переменной содержится в показателе степени при постоянном основании.

Методы решения:

- неравенство

$$a^{f(x)} > b \quad (a > 0, \ a \neq 1, b \in \mathbf{R}):$$

1) при $b \le 0$ имеет решение – множество всех x из ОДЗ выражения $f(x)$;

2) при $b > 0$ равносильно неравенству:

а) $f(x) < \log_a b$, если $0 < a < 1$;

б) $f(x) > \log_a b$, если $a > 1$;

- неравенство

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad (a > 0,\ a \ne 1)$$

равносильно неравенству:

1) $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$;

2) $f(x) > g(x)$, если $a > 1$;

- неравенство

$$F\left(a^{f(x)}\right) > 0,$$

где F – некоторое выражение, заменой $y = a^{f(x)}$ сводится к неравенству $F(y) > 0$. Решают последнее неравенство и возвращаются к переменной x.

Аналогичный подход используют в решении показательных неравенств со знаками $\ge$, $<$, $\le$.

7. Логарифмические неравенства

Логарифмическое неравенство – неравенство, в котором выражение с переменной содержится под знаком логарифма или в его основании.

Методы решения:

- неравенство

$$\log_a f(x) > b \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b \in \mathbf{R}):$$

1) при $0 < a < 1$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < a^b; \end{cases}$

2) при $a > 1$ равносильно неравенству $f(x) > a^b$;

- неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) > b \quad (b \in \mathbf{R})$$

равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < (h(x))^b, \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > (h(x))^b; \end{cases} \end{array}\right.$

- неравенство

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

равносильно одной из систем:

1) $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases}$ если $0 < a < 1$;

2) $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$ если $a > 1$;

• неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$$

равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > 1, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \end{array}\right.$

• неравенство

$$F\left(\log_a f(x)\right) > 0,$$

где F – некоторое выражение, заменой $y = \log_a f(x)$ сводится к неравенству $F(y) > 0$. Решают последнее неравенство и возвращаются к переменной x.

Аналогичный подход используют в решении логарифмических неравенств со знаками $\geq$, $<$, $\leq$.

8. Неравенства с модулем

Неравенство с модулем – неравенство, в котором выражение с переменной содержится под знаком модуля.

Методы решения:

- неравенство

$$|f(x)| < a \quad (a \in \mathbf{R}):$$

1) при $a \le 0$ решений не имеет;

2) при $a > 0$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a; \end{cases}$

- неравенство

$$|f(x)| \le a \quad (a \in \mathbf{R}):$$

1) при $a < 0$ решений не имеет;

2) при $a = 0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$;

3) при $a > 0$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) \ge -a, \\ f(x) \le a; \end{cases}$

- неравенство

$$|f(x)| > a \quad (a \in \mathbf{R}):$$

1) при $a < 0$ имеет решение – множество всех x из ОДЗ выражения $f(x)$;

2) при $a = 0$ имеет решение – множество всех x из ОДЗ выражения $f(x)$ таких, что $f(x) \ne 0$;

3) при $a > 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) < -a, \\ f(x) > a; \end{array}\right.$

- неравенство

$$\left|f(x)\right| \geq a \quad (a \in \mathbf{R}):$$

1) при $a \leq 0$ имеет решение – множество всех x из ОДЗ выражения $f(x)$;

2) при $a > 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) \leq -a, \\ f(x) \ \geq a; \end{array}\right.$

- неравенства

$$\left|f(x)\right| > g(x), \quad \left|f(x)\right| < g(x)$$

решают методом промежутков.

Неравенства, содержащие несколько модулей, также можно решать методом промежутков;

- неравенство

$$a\left|f(x)\right| > b\left|g(x)\right| \quad (a, b > 0)$$

равносильно неравенству $a^2(f(x))^2 > b^2(g(x))^2$. Далее вычисляют квадраты выражений и решают полученное неравенство (если это рационально) или сводят его к неравенству

$$(af(x) - bg(x))(af(x) + bg(x)) > 0.$$

9. Неравенства с двумя переменными

$$F(x, y) > 0, \quad F(x, y) \geq 0, \quad F(x, y) < 0, \quad F(x, y) \leq 0,$$

где $F(x, y)$ – выражение с переменными x, y.

Решение неравенства с двумя переменными – пара чисел (x, y), при которых неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство с двумя переменными – значит найти множество всех его решений или доказать, что оно не имеет решений.

Основным методом решения неравенств с двумя переменными является *графический метод*: на координатной плоскости строят соответствующую кривую $F(x, y) = 0$ и находят множество точек плоскости, соответствующих смыслу неравенства.

VI. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. Градусное и радианное измерение углов

$$1° \text{ (градус)} = \frac{\pi}{180} \text{ рад (радиан)} \approx 0{,}017453 \text{ рад;}$$

$$1' \text{ (минута)} = \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} \approx 0{,}000291 \text{ рад;}$$

$$1'' \text{ (секунда)} = \left(\frac{1}{60}\right)' \approx 0{,}000005 \text{ рад;}$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'';$$

$$\alpha \text{ рад} = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ}, \quad n^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}.$$

2. Тригонометрические функции

Определение тригонометрических функций

Для единичной окружности и угла α:

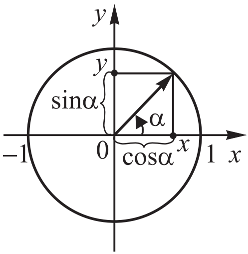
$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x,$$

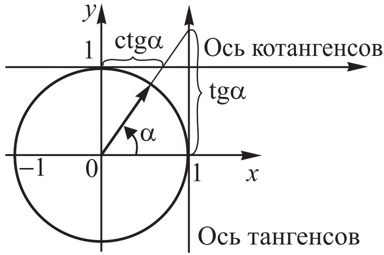
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}),$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

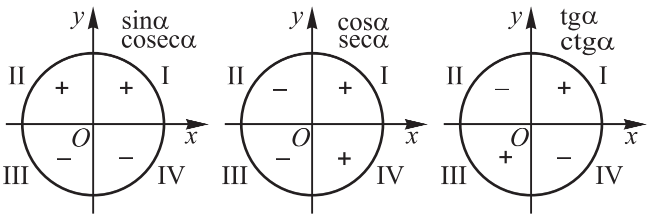
$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}).$$





Свойства тригонометрических функций

Знаковая характеристика:



$$|\sin\alpha| \le 1,\quad |\cos\alpha| \le 1,\quad |\sin\alpha \pm \cos\alpha| \le \sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \in \mathbf{R},\quad \operatorname{ctg}\alpha \in \mathbf{R},\quad |\sec\alpha| \ge 1,\quad |\operatorname{cosec}\alpha| \ge 1.$$

Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ имеют период 2π:

$$\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha,\quad \cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha,$$
$$\sec(\alpha+2\pi n)=\sec\alpha,\quad \operatorname{cosec}(\alpha+2\pi n)=\operatorname{cosec}\alpha,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ имеют период π:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{ctg}\alpha,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Функции $\cos\alpha$ и $\sec\alpha$ – четные:

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\quad \sec(-\alpha)=\sec\alpha.$$

Функции $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ – нечетные:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{cosec}(-\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha.$$

Значения тригонометрических функций приведены в таблице:

Угол α		Функция			
градус	радиан	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0	0	0	1	0	–
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

Продолжение табл.

Угол α		Функция			
градус	радиан	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
180	π	0	-1	0	–
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Окончание табл.

Угол α		Функция			
градус	радиан	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	–	0
300	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
330	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
360	2π	0	1	0	–

3. Приведение тригонометрических функций

Функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, $\sec\alpha$ и $\mathrm{cosec}\,\alpha$ называют *сходными* друг для друга.

Углы α и β называются *дополнительными*, если

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}.$$

Тригонометрическая функция одного из дополнительных углов равна сходной функции второго дополнительного угла.

Правило приведения:

1) если:

а) аргумент тригонометрической функции имеет вид $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ или $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то функцию заменить на сходную аргумента α;

б) аргумент имеет вид $\pi \pm \alpha$ или $2\pi \pm \alpha$, то сохранить ту же функцию, но с аргументом α;

2) перед полученной функцией аргумента α поставить тот знак («+» или «–»), который имела заданная функция; при этом угол α считать острым.

Таблица приведения:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$2\pi + \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

4. Тригонометрические формулы

Основные тригонометрические тождества:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}).$$

Формулы суммы и разности аргументов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \quad \left(\alpha, \beta, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \quad \left(\alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}\quad(\alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}),$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}\quad(\alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}).$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\quad\left(\alpha,2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\quad(\alpha,2\alpha\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}).$$

Формулы половинного аргумента:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\qquad\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\quad(\alpha\neq\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}),$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\quad(\alpha\neq2\pi n,\ n\in\mathbf{Z})$$

(знак «+» или «–» перед корнем выбирается в зависимости от того, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$),

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad(\alpha\neq\pi+2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}),$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\quad(\alpha\neq 2\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}).$$

Формулы тройного аргумента:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}\quad\left(\alpha,3\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}\quad(\alpha,3\alpha\neq\pi n,\ \ n\in\mathbf{Z}).$$

Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} \quad (\alpha \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}).$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \left(\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \left(\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} \quad (\alpha, \beta \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} \quad (\alpha, \beta \neq \pi n,\ n \in \mathbf{Z}),$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \beta \neq \pi n,\ k, n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \beta \neq \pi n,\ k, n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{cosec}2\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -2\operatorname{ctg}2\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}\right).$$

Формулы произведения тригонометрических функций:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$