



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое издание является продолжением учебного пособия «Теплофизика. Термодинамика и статистическая физика» [1], в котором изложены основы термодинамики, статистической физики и физической кинетики, раскрывающие физическую сущность тепловых процессов. Настоящее учебное пособие содержит описание конкретных проблем тепло- и массопереноса и состоит из следующих глав:

1. Термодинамика необратимых процессов;
2. Основы теории конвективного теплообмена;
3. Основы теории переноса энергии теплового излучения;
4. Процессы переноса в кристаллах;
5. Фазовые превращения в конденсированных средах.

Приложения содержат элементы тензорного исчисления, уравнения тепло- и массопереноса в гетерогенных средах и основные элементы теории теплопроводности.

В конце книги приведены задачи (с решениями) по тепло- и массообмену.

В книге из-за ограниченности объема не нашел отражения такой раздел теплообмена, как теплоотдача при кипении жидкости. Вопросы по этому разделу основательно изложены в монографии С.С. Кутателадзе «Основы теории теплообмена» (М.: Атомиздат, 1979).

Целью данного учебного пособия является подготовка студентов по теплофизике, энергетике и энергосбережению для специальностей «Физика (по направлениям)», «Ядерная физика и технологии», «Физика наноматериалов и нанотехнологий». Знание процессов тепло- и массопереноса необходимо при проектировании и организации эффективной эксплуатации энергетических систем и устройств. Учебное пособие рекомендуется также для аспирантов по специальности 01.04.14 — «Теплофизика и теоретическая теплотехника».

Авторы выражают искреннюю благодарность директору Института тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова НАН Беларуси академику О.Г. Пенязькову, инициировавшему написание данного учебного пособия.

Особую признательность авторы выражают рецензентам: доктору технических наук, профессору В.И. Володину и доктору физико-математических наук В.П. Колосу за полезные замечания, которые способствовали улучшению содержания учебного пособия.

---

---

# Глава 1

## ТЕРМОДИНАМИКА НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ

Неравновесная термодинамика (часто ее называют термодинамикой необратимых процессов) представляет собой сравнительно молодой и интенсивно развивающийся раздел теоретической физики. Основоположником термодинамической теории неравновесных процессов является Л. Онсагер, установивший в 1931 г. свою знаменитую теорему. В настоящее время эта теория получила статистическое обоснование и широко используется при изучении различных физических явлений.

Классическая термодинамика (более подходящее название – «термостатика») является равновесной, или обратимой, теорией, поскольку ее уравнения не содержат времени.

В термодинамических равновесных системах, как известно, температура и химический потенциал постоянны. Если эти условия не выполняются и в системе есть макроскопическое движение ее частей, то возникают необратимые процессы переноса массы, импульса, энергии, электрического заряда и т.д.

Рассмотрим теорию неравновесных процессов с феноменологической точки зрения.

### 1.1. Уравнения баланса и законы сохранения

Явления, изучаемые в неравновесной термодинамике, имеют макроскопический характер, поэтому при построении теории процессов в неравновесных системах они рассматриваются как сплошная (непрерывная) среда. Это значит, что всякий малый элемент объема среды считается настолько большим, что содержит еще значительное число молекул. Когда речь идет о бесконечно малых элементах объема, всегда подразумевается «физически» бесконечно малый объем (иначе говоря, объем достаточно малый по сравнению с объемом тела, но большой по сравнению с межмолекулярными расстояниями). Поэтому если говорят о смещении некоторой части-

цы среды, то имеют в виду смещение не отдельной молекулы, а целого элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого как точка.

Поскольку неравновесная система рассматривается как сплошная, т.е. непрерывная, среда, физические величины в ней являются непрерывными функциями пространственных координат  $x, y, z$  и времени  $t$ . При этом есть два способа описания.

Согласно Эйлеру, движение среды определяется относительно системы координат, фиксированной в пространстве, т.е. относится к некоторым точкам пространства, а не к «частицам» среды, передвигающимся со временем в пространстве. Данное описание называют пространственным, потому что задаются поля скоростей и ускорений движущейся среды.

В описании Лагранжа для динамической характеристики движения отдельных «частиц» среды, передвигающихся в пространстве, используется уравнение движения из динамики материальных точек. Это материальное, или субстанциональное, описание, поскольку система отсчета движется вместе со средой. Найдем общие уравнения баланса различных величин (массы, импульса, энергии, энтропии и т.д.).

Пусть  $A(x, y, z, t)$  — некоторая аддитивная субстанция (масса, энергия, энтропия), распределенная в материале сплошной среды, имеющей объем  $V$  и массу  $M$  плотностью  $\rho(x, y, z, t) = dM/dV$ . Тогда для единицы объема сплошной среды

$$\frac{dA}{dV} = \frac{dA}{dM} \frac{dM}{dV} = \rho a,$$

где  $dA/dM = a(x, y, z, t)$  — удельная величина субстанции  $A$ , находящаяся в единице массы сплошной среды. Для объема  $V$  среды получим

$$A = \int_V \rho a dV,$$

а изменение субстанции  $A$  в зависимости от времени равно

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \frac{d}{dt} \int_V \rho a dV \quad (*)$$

и может быть вызвано в общем случае двумя причинами:

1) потоком субстанции  $A(x, y, z, t)$  внутрь объема  $V$  или из него через поверхность  $\Sigma$ , ограничивающую этот объем;

2) уменьшением или увеличением  $A$  внутри объема  $V$ , которое связано с существованием во внутренних точках сплошной среды источников или стоков для субстанции  $A$ .

На основе этих положений определяются общие уравнения баланса. В зависимости от того, какое описание нами выбирается — пространственное или материальное, получается локальная или субстанциональная форма уравнений баланса.

**Локальные уравнения баланса.** Чтобы получить общую форму локальных уравнений баланса, основанных на пространственном описании, будем исходить из положения, что объем  $V^0$ , для которого необходимо выразить изменение субстанции, находится в покое относительно внешней (эйлеровой) системы координат (рис. 1.1). В этом случае вместо (\*) можем записать

$$\frac{d}{dt} \int_{V^0} \rho a dV^0 = \int_{V^0} \frac{\partial \rho a}{\partial t} dV^0, \quad (1.1.1)$$

где интегрирование ведется по объему  $dV^0 = dx dy dz$ , не меняющему положения в системе координат  $x, y, z$ .

Если в некоторой сплошной среде с плотностью массы  $\rho$  происходит перенос субстанции  $A$ , то интенсивность такого переноса можно описать вектором

$$\vec{J}_a^0 = \rho a \vec{v}_a, \quad (1.1.2)$$

называемым локальной плотностью потока субстанции. Здесь  $\vec{v}_a$  — скорость переноса субстанции  $A$ . Направления плотности

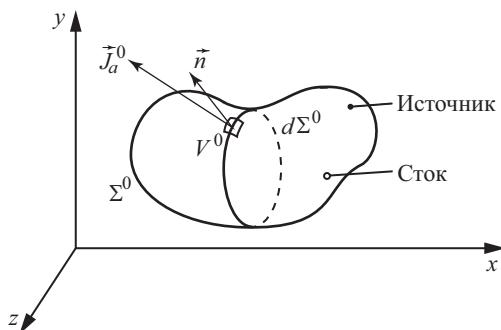


Рис. 1.1. К выводу локальных уравнений баланса

потока  $\vec{J}_a^0$  и скорости переноса  $\vec{v}_a$  совпадают, а абсолютная величина определяет количество субстанции, проходящее в единицу времени через единицу площади, расположенную перпендикулярно к скорости переноса  $\vec{v}_a$ .

Через элемент поверхности  $d\Sigma^0$  (рис. 1.1), ограничивающий рассматриваемый объем  $V^0$ , в единицу времени происходит перенос субстанции, равный  $dJ_a^0 = \rho a \vec{v}_a d\vec{\Sigma}^0$ . Вектор  $d\vec{\Sigma}^0$  по абсолютной величине равен площади элемента поверхности  $d\Sigma^0$  объема  $V^0$  и направлен по нормали к ней. Условимся направлять  $d\Sigma^0$  по внешней нормали  $\vec{n}$ , т.е.  $d\vec{\Sigma}^0 = d\Sigma^0 \vec{n}$ . Тогда величина  $dJ_a^0$  положительна, если субстанция вытекает из объема, и отрицательна, если втекает в него. Полное количество субстанции, вытекающей (втекающей) в единицу времени из объема  $V^0$ , равно  $\oint_{\Sigma^0} \rho a \vec{v}_a \cdot d\vec{\Sigma}^0$ , где интегрирование проводится по всей замкнутой поверхности  $\Sigma^0$ , охватывающей объем  $V^0$ . Обозначим плотность внутреннего источника субстанции  $A$  через  $\sigma_a$ , тогда на основании положений 1) и 2) получим интегральную форму уравнения баланса локального типа

$$\int_{V^0} \frac{\partial \rho a}{\partial t} dV^0 = - \oint_{\Sigma^0} \vec{J}_a^0 \cdot d\vec{\Sigma}^0 + \int_{V^0} \sigma_a dV^0. \quad (1.1.3)$$

Найдем уравнение баланса (1.1.3) в дифференциальной форме, которая справедлива для любой внутренней точки сплошной среды. Для этого преобразуем интеграл по поверхности в интеграл по объему с помощью теоремы Гаусса – Остроградского:

$$\oint_{\Sigma^0} \vec{J}_a^0 \cdot d\vec{\Sigma}^0 = \int_{V^0} \text{div} \vec{J}_a^0 dV^0 \equiv \int_{V^0} \nabla \cdot \vec{J}_a^0 dV^0.$$

Тогда уравнение (1.1.3) примет вид

$$\int_{V^0} \left( \frac{\partial \rho a}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_a^0 - \sigma_a \right) dV^0 = 0.$$

Поскольку это равенство должно иметь место для любого объема  $V^0$ , покоящегося относительно системы координат  $x, y, z$ , подынтегральное выражение должно быть равным нулю:

$$\frac{\partial \rho a}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_a^0 = \sigma_a. \quad (1.1.4)$$

Это дифференциальное уравнение называется локальной формой уравнения баланса для аддитивной субстанции  $A$ .

Таким образом, интегральная форма уравнения баланса (1.1.3) является определяющей для дифференциального уравнения (1.1.4). Когда в (1.1.4) плотность источника  $\sigma_a$  субстанции  $A$  равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial \rho a}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{J}_a^0 = 0, \quad (1.1.5)$$

уравнение (1.1.5) выражает закон сохранения субстанции в любой точке сплошной среды. Если в уравнении (1.1.4)  $\sigma_a > 0$ , то речь идет о локальном возникновении субстанции, если  $\sigma_a < 0$ , речь идет о локальном поглощении субстанции.

Применим соотношение (1.1.5) для получения уравнения сохранения массы сплошной среды. Если  $A \equiv M$ , где  $M$  – полная масса объема  $V^0$ , то удельная масса  $dA/dM = a \equiv 1$ . Тогда из уравнения (1.1.2) получим локальную плотность потока массы  $\bar{J}^0 = \rho \bar{v}$ , где  $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z, t)$  – скорость движения сплошной среды в каждой данной точке  $x, y, z$  пространства в любой момент времени  $t$ . Кроме того, для этого случая из уравнения (1.1.5) находим уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{J}^0 = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_\mu}{\partial x_\mu} = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \bar{v} = 0, \quad (1.1.6)$$

которое выражает закон сохранения массы в произвольной точке сплошной среды.

Уравнение (1.1.6) чаще называют законом непрерывности (неразрывности). Смысл его состоит в том, что возрастание (уменьшение) массы в единице объема сплошной среды равно количеству массы, втекающей (вытекающей) с потоком плотностью  $\bar{J}^0$ .

**Субстанциональные уравнения баланса.** Частная производная  $\partial \rho a / \partial t$  в уравнении (1.1.4) определяет изменение субстанции в данной неподвижной точке пространства  $x, y, z$ . Эту производную можно выразить через полную (субстанциональную) производную, относящуюся к передвигающейся в простран-

стве частице вещества сплошной среды. При таком материальном, или лагранжевом, описании сплошной среды выбранный элемент объема сплошной среды движется вместе с ней относительно системы координат  $x, y, z$ , фиксированной в пространстве. Совместное движение элемента массы  $dM = \rho dV$  и элемента объема  $dV$  со скоростью  $\vec{v}(x, y, z, t)$  означает, что во время движения в элементе объема  $dV$  все время содержится постоянная масса  $dM$ . Эту физическую картину можно математически представить в виде условия

$$\vec{J} = \vec{J}^0 - \rho \vec{v} \equiv 0, \quad (1.1.7)$$

которое означает, что при переходе от локального потока массы  $\vec{J}^0$  к субстанциональному потоку массы  $\vec{J}$  последний должен быть равен нулю.

Исходя из соотношений (1.1.2), (1.1.7), субстанциональную плотность потока  $\vec{J}_a$  произвольной субстанции  $A$  можно определить из уравнения

$$\vec{J}_a = \vec{J}_a^0 - \rho a \vec{v} = \rho a (\vec{v}_a - \vec{v}). \quad (1.1.8)$$

Корректность такого определения подтверждается тем, что при  $a \equiv 1$ , когда величина  $\vec{J}_a$  равна плотности потока массы  $\vec{J}$ , соотношение (1.1.8) в соответствии с уравнением (1.1.7) обращается в нуль.

При материальном описании элемент объема  $dV$  сплошной среды все время заполнен одним и тем же количеством массы ( $dM = \rho dV$ ). Поэтому при движении элемента объема  $dV$  величина  $dM$  остается неизменной во времени. Следовательно, вместо формулы (1.1.1) можно записать

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho a dV = \int_V \rho \frac{da}{dt} dV, \quad (1.1.9)$$

где субстанциональное дифференцирование по времени действует только на величину  $a$ . Подчеркнем, что здесь интегрирование производится по объему  $V$ , движущемуся вместе со сплошной средой.

Примем во внимание положения 1) и 2). Тогда с учетом соотношений (1.1.8) и (1.1.9) находим интегральную форму субстанционального уравнения баланса



$$\int_V \rho \frac{da}{dt} dV = -\oint_{\Sigma} \bar{J}_a \cdot d\bar{\Sigma} + \int_V \sigma_a dV.$$

Отсюда, преобразовывая интеграл по поверхности в интеграл по объему с помощью теоремы Гаусса – Остроградского, получим

$$\int_V \left( \rho \frac{da}{dt} + \nabla \cdot \bar{J}_a - \sigma_a \right) dV = 0.$$

Поскольку объем  $V$  может быть любым, имеем дифференциальную форму субстанционального уравнения баланса

$$\rho \frac{da}{dt} + \nabla \cdot \bar{J}_a = \sigma_a. \quad (1.1.10)$$

Найдем соотношение, связывающее субстанциональное (1.1.10) и локальное (1.1.4) уравнения баланса. Стоящая в уравнении (1.1.10) производная  $da/dt$  определяет изменение субстанции не в данной неподвижной точке пространства, а в определенной передвигающейся в пространстве частице сплошной среды. Выразим эту производную через величины, относящиеся к неподвижным в пространстве точкам. Для этого заметим, что изменение  $da$  субстанции данной частицы сплошной среды складывается из двух частей: изменения субстанции в данной точке пространства в течение времени  $dt$  и разности субстанций (в один и тот же момент времени) в двух точках, разделенных расстоянием  $d\vec{r}$ , пройденным рассматриваемой частицей сплошной среды в течение времени  $dt$ .

Первая из этих частей равна  $\frac{\partial a}{\partial t} dt$ , где производная  $\frac{\partial a}{\partial t}$  берется при фиксированных координатах  $x, y, z$ , т.е. в заданной точке пространства. Вторая часть изменения субстанции равна

$$dx \frac{\partial a}{\partial x} + dy \frac{\partial a}{\partial y} + dz \frac{\partial a}{\partial z} = d\vec{r} \cdot \nabla a.$$

Тогда

$$da = \frac{\partial a}{\partial t} dt + d\vec{r} \cdot \nabla a.$$

Разделим обе стороны этого равенства на  $dt$ :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla a.$$

Поскольку под  $a$  понимается любая субстанция (масса, импульс, энергия, энтропия и т.д.), в общем случае полное изменение во времени любой величины можно вычислить с помощью операторного уравнения

$$\frac{d\dots}{dt} = \frac{\partial\dots}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\dots \quad (1.1.11)$$

Применим операторное уравнение (1.1.11) к плотности  $\rho$ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\rho.$$

Тогда уравнение неразрывности (1.1.6), которое перепишем как

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla\rho = 0,$$

примет субстанциональный вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.1.12)$$

Применение операторного уравнения (1.1.11) к величине  $\rho a$  дает

$$\frac{d\rho a}{dt} = a \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{da}{dt} = \frac{\partial\rho a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\rho a.$$

Исключим производную  $d\rho/dt$ , используя уравнение (1.1.12):

$$\rho \frac{da}{dt} = -a \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial\rho a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\rho a = \frac{\partial\rho a}{\partial t} + \rho a \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla\rho a.$$

Преобразуем правую часть на основании тождества

$$\nabla \cdot \rho a \vec{v} = \rho a \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla\rho a.$$

В итоге находим

$$\rho \frac{da}{dt} = \frac{\partial \rho a}{\partial t} + \nabla \cdot \rho a \vec{v}. \quad (1.1.13)$$

Уравнение (1.1.13) будет часто использоваться в дальнейшем, поэтому необходимо доказать эквивалентность локального (1.1.4) и субстанционального (1.1.10) уравнений баланса, поскольку при выводе (1.1.10) предполагалось, что плотность источника (стока)  $\sigma_a$  равна плотности, входящей в уравнение (1.1.4). Запишем уравнение (1.1.4), добавив и отняв  $\nabla \cdot \rho a \vec{v}$ :

$$\left( \frac{\partial \rho a}{\partial t} + \nabla \cdot \rho a \vec{v} \right) + \nabla \cdot \vec{J}^0 - \nabla \cdot \rho a \vec{v} = \sigma_a.$$

Сравнивая его с уравнением (1.1.10) с учетом соотношений (1.1.13) и (1.1.8), убеждаемся в эквивалентности уравнений баланса (1.1.10) и (1.1.4).

Подчеркнем, что в формуле (1.1.13) величина  $a$  может быть любым скаляром, т.е. под  $a$  следует понимать скаляр, компоненту вектора или тензора второго ранга. Если в частном случае удельная масса  $a \equiv 1$ , то уравнение (1.1.13) сводится к локальному уравнению баланса массы (1.1.6).

## 1.2. Уравнения баланса массы многокомпонентной смеси

Рассмотрим систему, представляющую собой смесь  $n$  компонентов, которые пронумеруем индексами  $k = 1, 2, \dots, n$ . Если между компонентами системы происходят химические реакции, то для них используем индексы  $b, c$ .

В дальнейшем будем применять только декартову правостороннюю систему координат и для тензорных величин использовать индексы  $\mu, \nu$  (см. приложение 1). Кроме того, применим правило, согласно которому по индексу, встречающемуся в выражении дважды (или много раз), автоматически производится суммирование. Например, имеем

$$v_\mu = T_{\mu\nu} w_\nu, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3,$$

вместо

$$v_\mu = \sum_{\nu=1}^3 T_{\mu\nu} w_\nu, \quad \mu = 1, 2, 3.$$

Кроме того, не будем записывать текущие индексы ( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ), так как они всегда принимают значения 1, 2, 3 и обозначают декартовы координаты тензорных величин.

Описание методами механики сплошной среды различного рода смесей связано с введением понятия многоскоростного континуума и определением взаимопроникающего движения континуумов.

*Многоскоростной континуум* представляет собой совокупность  $n$  континуумов, каждый из которых относится к своей составляющей смеси и заполняет один и тот же объем, занятый смесью. Для каждого из этих составляющих континуумов во всех точках обычным образом определяются плотность  $\rho_k$  (масса  $k$ -составляющей в единице объема всей среды), скорость  $\vec{v}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), а затем и другие параметры, относящиеся к своему континууму и своей составляющей смеси. Таким образом, в любой точке объема, занятого смесью, будет определено  $n$  плотностей  $\rho_k$ ,  $n$  скоростей  $\vec{v}_k$  и т.д. Кроме того, исходя из этих величин можно определить параметры, характеризующие смесь в целом, а именно плотность смеси

$$\rho = \sum_{k=1}^n \rho_k$$

и среднemasсовую (барицентрическую) скорость смеси

$$\rho \vec{v} = \sum_{k=1}^n \rho_k \vec{v}_k \quad \text{или} \quad \vec{v} = \frac{\sum_{k=1}^n \rho_k \vec{v}_k}{\rho} = \sum_{k=1}^n C_k \vec{v}_k,$$

где  $C_k = \frac{\rho_k}{\rho}$ , причем  $\sum_{k=1}^n C_k = 1$ .

Введем локальные плотности потока массы. Для компонентов смеси имеем

$$\vec{J}_k^0 = \rho_k \vec{v}_k. \quad (1.2.1)$$

Для смеси в целом имеем

$$\vec{J}^0 = \rho \vec{v}.$$

Часто удобно пользоваться скоростями  $\vec{w}_k$ , которые называют диффузионными. Они являются скоростями движе-

ния составляющих смеси относительно центра инерции смеси в целом:

$$\bar{w}_k \equiv \bar{v}_k - \bar{v}. \quad (1.2.2)$$

Для плотности диффузионного потока получим

$$\bar{J}_k \equiv \rho_k \bar{w}_k = \rho_k (\bar{v}_k - \bar{v}) = \bar{J}_k^0 - \rho_k \bar{v}. \quad (1.2.3)$$

Суммируя это соотношение

$$\sum_{k=1}^n \bar{J}_k \equiv \sum_{k=1}^n \rho_k \bar{w}_k = \sum_{k=1}^n \rho_k (\bar{v}_k - \bar{v}) = 0, \quad (1.2.4)$$

видим, что число независимых плотностей диффузионных потоков равно  $n - 1$ .

В многоскоростном континууме для величины  $A$  целесообразно ввести субстанциональные производные  $dA^{(k)}/dt$  и  $dA/dt$ , связанные соответственно с индивидуальным движением  $k$ -й составляющей континуума и движением смеси в целом. По аналогии с операторным уравнением (1.1.11) введем

$$\begin{aligned} \frac{d^{(k)}A}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \bar{v}_k \cdot \nabla A \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + v_{k\mu} \frac{\partial A}{\partial x_\mu}, \\ \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla A \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + v_\mu \frac{\partial A}{\partial x_\mu}. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Отсюда вычитанием найдем

$$\frac{d^{(k)}A}{dt} - \frac{dA}{dt} = (\bar{v}_k - \bar{v}) \cdot \nabla A = \bar{w}_k \cdot \nabla A = w_{k\mu} \frac{\partial A}{\partial x_\mu}.$$

Как указывалось, суммирование производится по тензорным индексам  $\mu$ . Подчеркнем, что в уравнениях (1.2.5) используется предположение о том, что величина  $A$  — скаляр.

Получим уравнения баланса масс, когда в многокомпонентной смеси происходят химические реакции. Будем исходить из общего уравнения баланса (1.1.4). Положим

$$a \equiv \frac{\rho_k}{\rho} = C_k, \quad \bar{J}_a^0 \equiv \bar{J}_k^0, \quad \sigma_a \equiv m_k$$

и учтем формулу (1.2.1). Тогда получим локальное уравнение баланса массы для каждого компонента:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{J}_k^0 = m_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2.6)$$

Члены  $m_k$  определяют изменение массы при химическом превращении  $k$ -го компонента в единице объема в единицу времени. Если между компонентами не происходит никаких химических реакций, то  $m_k = 0$ . С учетом выражения (1.2.3) уравнение баланса (1.2.6) можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \bar{v} + \bar{J}_k) = m_k.$$

Если просуммировать по всем компонентам  $k$ , то в результате с учетом соотношения (1.2.4) получим уравнение сохранения массы (неразрывности) смеси в целом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \bar{v} = 0, \quad (1.2.7)$$

которое имеет обычный вид, как и в односкоростном континууме.

Вычислим члены  $m_k$ . Рассмотрим случай, когда в каждой точке смеси происходят  $r$  химических реакций ( $b = 1, 2, \dots, r$ ) согласно стехиометрическим уравнениям

$$\sum_{k=1}^r \nu_{kb}^c M_k = \sum_{k=r+1}^n \nu_{kb}^c M_k, \quad b = 1, 2, \dots, r.$$

Здесь  $M_k$  — молекулярная масса  $k$ -го компонента;  $\nu_{kb}^c$  — стехиометрический коэффициент  $k$ -го компонента в  $b$ -й реакции.

По определению стехиометрические коэффициенты считаются отрицательными, если компонент стоит в левой части уравнения реакции ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) (является реагентом в реакции  $b$ ), и положительными, если компонент стоит в правой части ( $k = r + 1, r + 2, \dots, n$ ) (представляет собой продукт реакции). Следовательно, законы сохранения массы при химических превращениях имеют вид

$$\sum_{k=1}^n \nu_{kb}^c M_k = 0, \quad b = 1, 2, \dots, r.$$

Введем вместо стехиометрических коэффициентов  $v_{kb}^c$  новые коэффициенты:

$$v_{kb} = \frac{v_{kb}^c M_k}{\sum_{k=r+1}^n v_{kb}^c M_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad b = 1, 2, \dots, r.$$

Тогда можно записать

$$\sum_{k=1}^n v_{kb} = 0, \quad b = 1, 2, \dots, r.$$

Коэффициенты  $v_{kb}$  всегда можно определить, если известны обычные химические стехиометрические коэффициенты  $v_{kb}^c$ .

Пусть в момент времени  $t$  плотность в некоторой точке пространства равна  $\rho_k(t)$ . За время  $\partial t$  в результате химических реакций произойдет изменение плотности на  $\partial \rho_k$ . Плотности  $\rho_k$  при реакции связаны уравнением реакции. Ясно, что если  $\rho_1$  в реакции  $b$  изменится на  $v_{1b}$ , то каждая из остальных плотностей  $\rho_k$  изменится в реакции  $b$  на  $v_{kb}$ . Другими словами,

$$\frac{\partial_b \rho_k}{v_{kb}} = \frac{\partial_b \rho_1}{v_{1b}} = \partial \xi_b.$$

Здесь дифференциал  $\partial \xi_b$  определяет «степень развития реакции  $b$ » и имеет одно и то же значение и один и тот же знак для всех веществ, участвующих в реакции. Например, в реакции  $2A + 3B = 4C$  стехиометрические коэффициенты  $v_A = -2$ ,  $v_B = -3$ ,  $v_C = 4$ . Следовательно,

$$\partial \xi = \frac{\partial \rho_k}{v_k} = -\frac{\partial \rho_A}{2} = -\frac{\partial \rho_B}{3} = \frac{\partial \rho_C}{4}.$$

Выражение  $\partial \xi_b = \frac{\partial_b \rho_k}{v_{kb}}$ , отнесенное к единице времени

$$J_b = \frac{\partial \xi_b}{\partial t} = \frac{1}{v_{kb}} \frac{\partial_b \rho_k}{\partial t},$$

представляет собой скорость  $b$ -й реакции. Отсюда  $v_{kb} J_b = \frac{\partial_b \rho_k}{\partial t}$  — количество  $k$ -го вещества, которое образуется в еди-

нице объема в единицу времени в  $b$ -й реакции ( $b = 1, 2, \dots, r$ ). Для локального изменения плотности  $\rho_k$   $k$ -го компонента во всех реакциях имеем

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} = \sum_{b=1}^r \frac{\partial_b \rho_k}{\partial t} = \sum_{b=1}^r \nu_{kb} J_b, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

если изменение плотности компонентов в некоторой произвольной точке пространства обусловлено лишь химическими превращениями. Однако плотности источников в единице объема в единицу времени в уравнениях баланса массы (1.2.6) всегда определяются следующим образом:

$$m_k = \sum_{b=1}^r \nu_{kb} J_b.$$

В итоге уравнения баланса массы, когда кроме диффузии компонентов ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) происходят химические реакции ( $b = 1, 2, \dots, r$ ) в виде локальных внутренних превращений, примут вид

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_k^0 = \sum_{b=1}^r \nu_{kb} J_b, \quad \vec{J}_k^0 = \rho_k \vec{v}_k. \quad (1.2.8)$$

Найдем субстанциональную форму уравнения баланса (1.2.8). Учтем соотношение (1.2.3). Тогда

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_k + \nabla \cdot \rho_k \vec{v} = \sum_{b=1}^r \nu_{kb} J_b.$$

Поскольку  $\nabla \cdot \rho_k \vec{v} = \rho_k \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho_k$ , из операторного уравнения (1.2.5) найдем субстанциональное уравнение баланса массы для компонентов

$$\frac{d\rho_k}{dt} + \rho_k \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \vec{J}_k = \sum_{b=1}^r \nu_{kb} J_b. \quad (1.2.9)$$

Если ввести концентрацию  $C_k$ , то из (1.2.9) получим

$$\rho \frac{dC_k}{dt} + C_k \frac{d\rho}{dt} + \rho_k \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \vec{J}_k = \sum_{b=1}^r \nu_{kb} J_b.$$



Воспользуемся уравнением неразрывности в субстанциональном виде (1.1.12). В итоге получим

$$\rho \frac{dC_k}{dt} + \nabla \cdot \vec{J}_k = \sum_{b=1}^r \nu_{kb} J_b. \quad (1.2.10)$$

В уравнениях баланса (1.2.8), (1.2.10) химические превращения учитываются точно, если известна стехиометрия и скорости химических реакций. Отсюда следует, что уравнения баланса (1.2.8) и (1.2.10) имеют фундаментальное значение в теории многокомпонентной и реагирующей сплошной среды.

**Уравнения баланса заряда.** Часто некоторые компоненты многокомпонентной сплошной среды обладают электрическим зарядом (ионы, электроны и т.д.). С точки зрения теории поля дискретность микрочарядов не представляет интереса, так как достаточно указать величину заряда компонентов на единицу массы. Поскольку электрический заряд всегда связан с частицей, имеющей массу, для  $k$ -го компонента можно определить удельный заряд  $e_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), относящийся к единице массы. Это же справедливо и для многокомпонентного континуума

$$e = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^n \rho_k e_k = \sum_{k=1}^n C_k e_k. \quad (1.2.11)$$

Очевидно, что для всех незаряженных компонентов удельный заряд  $e_k = 0$ .

Определим уравнения баланса заряда, когда химические реакции и обмен зарядами между компонентами отсутствуют. Если химических реакций нет, то из уравнения (1.2.10) следует

$$\rho \frac{dC_k}{dt} + \nabla \cdot \vec{J}_k = 0. \quad (1.2.12)$$

Введем полную плотность электрического тока  $\vec{I}$ , которая определяется количеством заряда, переносимого всеми компонентами (с учетом выражения (1.2.11)):

$$\vec{I} = \sum_{k=1}^n \rho_k e_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^n (\rho_k e_k \vec{v} + e_k \vec{J}_k) = \rho e \vec{v} + \sum_{k=1}^n e_k \vec{J}_k.$$

Здесь  $\rho e \vec{v}$  – плотность конвективного электрического тока, обусловленного конвекцией центра инерции со скоростью  $\vec{v}$ .

Величина

$$\vec{i} = \sum_{k=1}^n e_k \vec{J}_k \quad (1.2.13)$$

называется плотностью тока проводимости и обусловлена движением заряженных компонентов относительно центра инерции.

Умножим уравнение баланса (1.2.12) на заряд  $e_k$   $k$ -го компонента и просуммируем по всем компонентам  $k = 1, 2, \dots, n$ :

$$\rho \frac{d \sum_{k=1}^n C_k e_k}{dt} + \nabla \cdot \left( \sum_{k=1}^n \vec{J}_k e_k \right) = 0.$$

Учтем формулы (1.2.11) и (1.2.13), тогда получим уравнение баланса

$$\rho \frac{de}{dt} + \nabla \cdot \vec{i} = 0, \quad (1.2.14)$$

которое представляет собой закон сохранения заряда в субстанциональной форме.

Аналогично находим локальную форму закона сохранения заряда. Будем исходить из уравнений локального баланса компонентов (1.2.8), в которых левая часть равна нулю:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_k^0 = 0, \quad \vec{J}_k = \vec{J}_k^0 - \rho_k \vec{v}.$$

Умножим на заряд  $e_k$   $k$ -го компонента и просуммируем по всем компонентам, в итоге получим

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{I} = 0. \quad (1.2.15)$$

Из субстанционального (1.2.14) и локального (1.2.15) уравнений закона сохранения заряда видно, что плотность тока проводимости  $\vec{i}$  представляет собой субстанциональный поток, а полная плотность электрического тока  $\vec{I}$  – локальный поток.

### 1.3. Уравнения баланса импульса

Получим уравнение движения сплошной среды. Выделим некоторый малый объем  $\delta V$  с массой  $\delta M = \rho \delta V$ . На массу  $\delta M$

в общем случае действуют объемные и поверхностные силы. Если объемную силу, действующую на единицу массы, обозначить через  $\vec{F}$ , то сила, действующая на массу  $\delta M$ , равна  $\vec{F}\delta M = \rho\vec{F}\delta V$ .

Поверхностные силы задаются плотностью их распределения по поверхности  $\delta\Sigma$  объема  $\delta V$  или напряжением. Различают нормальные напряжения, действующие по нормали к поверхности, и касательные напряжения. В целом они составляют тензор второго ранга, который обозначим  $\tilde{\mathbf{P}} \leftrightarrow P_{\mu\nu}$  и назовем тензором напряжений. Силы, действующие на поверхность  $\delta\Sigma$  объема  $\delta V$ , равны

$$\oint_{\delta\Sigma} \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\vec{\Sigma} \leftrightarrow \oint P_{\mu\nu} n_\nu d\Sigma; \quad d\vec{\Sigma} = \vec{n} d\Sigma,$$

где  $\vec{n}$  – единичная нормаль к поверхности;  $P_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{vmatrix}$ .

Пользуясь приведенными соотношениями, результирующую элементарных объемных и поверхностных сил можно представить как  $\rho\vec{F}dV + \oint_{\delta\Sigma} \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\vec{\Sigma}$ . Следовательно, если  $d\vec{v}/dt$  – ускорение элемента массы  $\delta M$ , которое можно приписать действию результирующей силы, то уравнение движения Ньютона для элемента массы  $\delta M$  сплошной среды примет вид

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} \delta V = \rho\vec{F}dV + \oint_{\delta\Sigma} \tilde{\mathbf{P}} \cdot \vec{n} d\Sigma.$$

Интегральная форма уравнения движения континуума получается интегрированием этого выражения по всему объему  $V$  и поверхности  $\Sigma$  сплошной среды. Следовательно,

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V \rho\vec{F}dV + \oint_{\Sigma} \tilde{\mathbf{P}} \cdot \vec{n} d\Sigma.$$

Применив теорему Гаусса – Остроградского

$$\oint_{\Sigma} \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_V \nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}} dV \equiv \int_V \text{Div } \tilde{\mathbf{P}} dV = \int_V \frac{\partial P_{\nu\mu}}{\partial x_\nu} dV,$$

получим

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V (\rho \vec{F} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}}) dV. \quad (1.3.1)$$

С учетом произвольного объема  $V$  найдем соотношение

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}}, \quad (1.3.2)$$

которое называется *уравнением движения Коши*. Для координат оно имеет вид

$$\rho \frac{dv_\mu}{dt} = \rho F_\mu + \frac{\partial P_{\nu\mu}}{\partial x_\nu}.$$

Уравнение движения Коши (1.3.2) справедливо для любой сплошной среды, однако выражения для тензора напряжений  $\tilde{\mathbf{P}}$  в различных моделях сплошной среды будут неодинаковыми. Если известен вид тензора напряжений  $\tilde{\mathbf{P}}$ , то уравнение движения (1.3.2) можно использовать для описания различных моделей деформируемых тел (упругих, пластичных и т.д.), гидродинамических моделей (идеальных и вязких жидкостей и газов) и, кроме того, различных моделей электромагнитных полей.

Подчеркнем принципиальное отличие уравнения движения (1.3.2) сплошных сред от соответствующих уравнений для систем материальных точек. Векторы, стоящие слева и справа в уравнении (1.3.2), представляют собой соответственно не произведения масс на ускорения и силы, как это следует из второго закона Ньютона, а лишь плотности распределения всех этих величин, т.е. величины, отнесенные к единице объема. Умножая обе части этого уравнения на  $dV$ , получим уравнение движения центра инерции, заключенного в элементарный объем, а интегрируя по конечному объему  $V$ , составим уравнение движения центра инерции в объеме  $V$ . Особо следует оговорить смысл произведенного перехода от поверхностного интеграла к объемному

$$\oint_\Sigma \tilde{\mathbf{P}} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_V \nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}} dV.$$

Здесь вектор  $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}} \equiv \text{Div } \tilde{\mathbf{P}}$  — плотность распределения обьемого действия поверхностных сил.

Уравнение (1.3.1) выражает закон сохранения импульса в интегральной форме: изменение импульса материального объема во времени равно результирующей сил, действующих на вещество, находящееся в объеме. Поэтому физический смысл дифференциального уравнения (1.3.2) также совпадает с законом сохранения импульса.

В этом легко убедиться, если записать уравнение (1.3.2) в виде

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}} = \rho \vec{F} \quad (1.3.3)$$

и учесть, что  $\vec{v}$  – импульс единицы массы сплошной среды, а затем сравнить уравнение (1.3.3) с общим уравнением баланса для аддитивной субстанции  $a$  (1.1.10). Тогда можно утверждать, что уравнение (1.3.3) действительно является уравнением баланса импульса, причем субстанциональная плотность потока импульса, который сам есть вектор, идентична тензору напряжений второго ранга, взятому со знаком «минус»:  $\tilde{\mathbf{J}} = -\tilde{\mathbf{P}}$ , а плотность источника  $\tilde{\sigma}_{\text{имп}}^e = \rho \vec{F}$  определяется плотностью внешних сил. Плотность силы  $\rho \vec{F}$  можно интерпретировать только как член, соответствующий внешнему источнику, поскольку существование этого источника обусловлено внешними полями, действующими на сплошную среду. Таким образом, уравнение движения (1.3.3) является уравнением баланса, содержащим член, характеризующий источник, но, тем не менее, выражает закон сохранения импульса в дифференциальной форме. Это связано с тем, что члены, соответствующие источникам, возникающим вследствие неоднородностей внутри системы, не входят в уравнение баланса (1.3.3), т.е.  $\tilde{\sigma}_{\text{имп}}^i = 0$ .

Преобразуем субстанциональное уравнение баланса в локальное. Воспользуемся соотношением (1.1.13). Под величиной  $a$  будем понимать компоненты скорости центра инерции  $\vec{v} \leftrightarrow v_\mu$ , т.е.  $a \equiv v_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ). Тогда получим локальную форму уравнения баланса импульса

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v} \vec{v} - \tilde{\mathbf{P}}) = \rho \vec{F}. \quad (1.3.4)$$

Здесь  $\rho \vec{v}$  – импульс единицы объема сплошной среды;  $\vec{v} \vec{v}$  – диадное произведение, т.е. тензор

$$\tilde{\mathbf{D}} = \vec{v} \vec{v} \leftrightarrow D_{\mu\nu} = v_\mu v_\nu,$$

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	3
<b>Глава 1. Термодинамика необратимых процессов</b> .....	4
1.1. Уравнения баланса и законы сохранения .....	4
1.2. Уравнения баланса массы многокомпонентной смеси .....	12
1.3. Уравнения баланса импульса .....	19
1.4. Уравнения баланса кинетической энергии .....	34
1.5. Уравнения баланса потенциальной энергии .....	37
1.6. Уравнение баланса механической энергии .....	40
1.7. Локальные формы первого и второго начал термодинамики	43
1.8. Локальное равновесие .....	46
1.9. Сохранение энергии и уравнения баланса внутренней энергии .....	49
1.10. Уравнения баланса энтропии. Производство энтропии ...	53
1.11. Линейные конститутивные законы. Соотношения взаимности Онсагера. Принцип Кюри .....	56
1.12. Изотропный ньютоновский континуум .....	59
1.13. Об уравнении теплопроводности в средах с памятью .....	61
<b>Глава 2. Основы теории конвективного теплообмена</b> .....	66
2.1. Общие положения теории переноса .....	67
2.1.1. Тензор напряжений и вектор теплового потока .....	67
2.1.2. Уравнения баланса .....	69
2.1.3. Конститутивные уравнения .....	69
2.1.4. Система дифференциальных уравнений переноса ...	72
2.1.5. Краевые условия .....	75
2.1.6. Уравнения переноса в координатной форме .....	77
2.1.7. Уравнения переноса в безразмерной форме. Критерии подобия .....	79
2.2. Базовые поля течений вязкой жидкости .....	84
2.2.1. Слоистые течения .....	85
2.2.2. Течения Пуазейля и Куэтта .....	86
2.2.3. Течение Хагена — Пуазейля в трубе .....	89
2.2.4. Установившееся течение между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами .....	90
2.2.5. Плоская стенка в жидкости, внезапно приведенная в движение .....	95

2.2.6. Неслоистые течения. Плоское течение вблизи критической точки .....	97
2.3. Задача теплопроводности в твердом теле при граничном условии 3-го рода. Регулярный режим .....	104
2.4. Элементы теории пограничного слоя .....	108
2.4.1. Понятие о пограничном слое. Уравнения пограничного слоя .....	108
2.4.2. Пограничный слой на плоской пластине .....	112
2.4.3. Сопротивление трения .....	117
2.4.4. Толщина пограничного слоя .....	118
2.5. Системы уравнений ламинарного конвективного теплопереноса .....	120
2.5.1. Уравнения теплового пограничного слоя .....	121
2.5.2. Аналогия Рейнольдса .....	123
2.5.3. Свободная конвекция. Уравнения Буссинеска для свободно-конвективного теплообмена. Критерии подобия для свободной конвекции .....	126
2.5.4. Уравнения конвективного теплопереноса в каналах .....	131
2.6. Конвективный теплообмен при обтекании плоской пластины .....	134
2.7. Свободно-конвективный теплообмен около вертикальной пластины .....	137
2.8. Конвективный теплообмен при течении жидкости в круглой трубе при постоянном тепловом потоке на стенке .....	142
2.9. Теплообмен в круглой трубе при постоянной температуре стенки (задача Гретца – Нуссельта) .....	145
2.10. О сопряженных задачах конвективного теплообмена .....	155
2.11. Элементы теории турбулентного переноса .....	160
2.11.1. Ламинарные и турбулентные течения. Переход к турбулентности .....	160
2.11.2. Уравнения Рейнольдса осредненного турбулентного течения .....	164
2.11.3. Замыкание уравнений Рейнольдса. Модели турбулентности .....	169
2.11.4. $k$ – $\epsilon$ -Модель турбулентности .....	176
2.12. Элементы газовой динамики .....	181
2.12.1. Уравнения газовой динамики .....	181
2.12.2. Адиабатический процесс .....	183
2.12.3. Скорость звука .....	184
2.12.4. Теорема Бернулли .....	187
2.12.5. Одномерный стационарный поток идеального газа .....	190
2.12.6. Истечение газа из резервуара. Сопло Лавалю .....	196
2.12.7. Плоская ударная волна и скачок уплотнения .....	200

<i>Глава 3. Основы теории переноса энергии теплового излучения . . .</i>	208
3.1. Характеристики поля излучения. Закон Стефана–Больцмана	208
3.2. Уравнение переноса энергии излучения в поглощающих и рассеивающих средах . . . . .	212
3.3. Радиационные свойства реальных тел. Закон Кирхгофа . . .	217
3.4. О теплообмене излучением между поверхностями. Угловые коэффициенты . . . . .	220
 <i>Глава 4. Процессы переноса в кристаллах . . . . .</i>	 228
4.1. Атомное строение кристаллов . . . . .	228
4.2. Зонная модель кристаллов . . . . .	249
4.2.1. Классическая модель свободных электронов (модель Друде–Лоренца). Теплопроводность электронного газа. Закон Видемана – Франца . . . . .	250
4.2.2. Квантовая теория свободных электронов (модель Зоммерфельда) . . . . .	258
4.2.3. Зонная модель электронов в кристаллах . . . . .	262
4.2.4. Зонная структура полупроводников . . . . .	272
4.3. Теплоемкость и перенос тепла в кристаллах . . . . .	278
4.3.1. Зависимость удельной теплоемкости от температуры	279
4.3.2. Тепловое расширение кристаллов . . . . .	285
4.3.3. Теплопроводность кристаллической решетки . . . . .	292
4.3.4. Тепловые свойства электронного газа . . . . .	296
4.4. Диффузия (массоперенос) в кристаллах . . . . .	300
4.4.1. Общие сведения о диффузии . . . . .	301
4.4.2. Кинетика процессов самодиффузии и диффузии примесей в кристаллах . . . . .	310
4.4.3. Частные решения уравнения диффузии . . . . .	317
4.4.4. Структурные дефекты и диффузия атомов . . . . .	323
4.4.5. Механизмы диффузии в кристаллических твердых телах	323
 <i>Глава 5. Фазовые превращения в конденсированных средах . . . . .</i>	 327
5.1. Термодинамика фазовых превращений в материалах . . . . .	327
5.2. Плавление однокомпонентных кристаллических твердых тел	332
5.3. Кристаллизация однокомпонентных твердых тел . . . . .	337
5.4. Закалка однокомпонентных кристаллических материалов	359
5.5. Изменение структуры однокомпонентных кристаллов при термических воздействиях . . . . .	364
5.6. Фазовые равновесия и превращения в многокомпонентных кристаллических материалах при термических воздействиях . . .	369
5.6.1. Виды кристаллических сплавов . . . . .	370



5.6.2. Диаграммы состояния сплавов и их построение . . . . .	375
5.6.3. Диаграммы состояния двухкомпонентных сплавов . . .	381
5.7. Задачи теплопроводности при фазовых превращениях . . . .	392
5.8. Основы теплообмена при конденсации пара на твердых поверхностях . . . . .	400
<b>Приложения</b> . . . . .	<b>407</b>
<b>Задачи</b> . . . . .	<b>446</b>
<b>Литература</b> . . . . .	<b>470</b>