

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
О пользовании книгой	11
Введение	13

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава I. Действительные и комплексные числа	18
§ 1. Действительные числа. Координаты	18
1. Натуральные числа (18). 2. Простые и составные числа. Признаки делимости (20). 3. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное (22). 4. Целые числа. Рациональные числа (24). 5. Десятичные дроби. Представление рациональных чисел десятичными дробями (28). 6. Иррациональные числа. Действительные числа (31). 7. Действия с приближенными числами (35). 8. Числовая ось. Координаты точки на плоскости (40). Упражнения	45
§ 2. Степени и корни	46
9. Степени с натуральными показателями (46). 10. Степени с целыми показателями (47). 11. Корни (48). 12. Степени с рациональными показателями. Степени с действительными показателями (51). 13. Алгоритм извлечения квадратного корня (52). Упражнения	56
§ 3. Комплексные числа	57
14. Основные понятия и определения (57). 15. Рациональные действия с комплексными числами (59). 16. Геометрическое изображение комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа (62). 17. Действия с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме. Формула Муавра (65). 18. Извлечение корня из комплексного числа (66). Упражнения	69
Глава II. Тождественные преобразования	70
§ 1. Рациональные алгебраические выражения	70
19. Алгебраические выражения. Одночлены и многочлены (70). 20. Формулы сокращенного умножения (74). 21. Бином Ньютона (75). 22. Разложение многочлена на множители (78). 23. Дробные алгебраические выражения (79). Упражнения	80
§ 2. Иррациональные алгебраические выражения	80
24. Радикалы из алгебраических выражений (80). 25. Освобождение от иррациональности в знаменателе дроби (84). Упражнения	85
Глава III. Логарифмы	87
§ 1. Логарифмы по произвольному основанию	87
26. Определение и свойства логарифмов (87). 27. Логарифмы по различным основаниям. Модуль перехода (92). Упражнения	94

§ 2.	Десятичные логарифмы	94
	28. Характеристика и мантисса десятичного логарифма (94). 29. Применение десятичных логарифмов к вычислениям (98). Упражнения	100
Глава IV. Функции и графики		101
§ 1.	Общие сведения о функциях	101
	30. Величина. Числовые множества (101). 31. Определение функции (102). 32. График функции. Способы задания функций (104). 33. Элементарное исследование поведения функции (106). 34. Сложная функция (109). 35. Обратная функция (109). 36. Функции нескольких переменных (112). Упражнения	113
§ 2.	Элементарные функции	113
	37. Обзор элементарных функций (113). 38. Линейная функция (115). 39. Квадратичная функция $y=ax^2$ (118). 40. Степенная функция $y=x^n$ (120). 41. Обратная пропорциональная зависимость. Степенная функция с рациональным показателем степени (121). 42. Показательная функция (125). 43. Логарифмическая функция (127). Упражнения	127
§ 3.	Преобразование графиков	128
	44. Параллельный сдвиг графика (128). 45. График квадратного трехчлена (130). 46. График дробно-линейной функции (133). 47. Преобразование симметрии. Сжатие и растяжение графика (134). 48. Построение графиков функций $y= f(x) $, $y=f(x)$, $y= f(x) $ (136). 49. Сложение графиков (140). Упражнения	142
§ 4.	Некоторые сведения о рациональных функциях	142
	50. Целые и дробные рациональные функции. Деление многочленов (142). 51. Схема Горнера. Теорема Безу (145). 52. Нули многочлена. Разложение многочлена на множители (147). Упражнения	150
Глава V. Уравнения		151
§ 1.	Общие сведения об уравнениях	151
	53. Уравнение. Корни уравнения (151). 54. Равносильные уравнения (152). 55. Системы уравнений (155). 56. Графическое решение уравнений (157). Упражнения	158
§ 2.	Алгебраические уравнения с одной неизвестной	158
	57. Число и кратность корней (158). 58. Уравнения первой степени (линейные уравнения) (159). 59. Уравнения второй степени (квадратные уравнения (160). 60. Формулы Виета. Разложение квадратного трехчлена на множители (164). 61. Исследование квадратного уравнения (165). 62. Уравнения высших степеней. Целые корни (167). 63. Двучленные уравнения (169). 64. Уравнения, сводящиеся к квадратным (170). 65. Возвратные уравнения (172). Упражнения	172
§ 3.	Системы алгебраических уравнений	173
	66. Линейные системы (173). 67. Определители второго порядка. Исследование линейных систем двух уравнений с двумя неизвестными (176). 68. Системы, состоящие из уравнения второй степени и линейного уравнения (183). 69. Примеры систем двух уравнений второй степени. Системы уравнений высших степеней (186). Упражнения	190
§ 4.	Иррациональные, показательные и логарифмические уравнения	191
	70. Иррациональные уравнения (191). 71. Показательные уравнения (195). 72. Логарифмические уравнения (197). 73. Разные уравнения. Системы уравнений (199). Упражнения	201
Глава VI. Неравенства		203
§ 1.	Числовые и алгебраические неравенства	203
	74. Свойства неравенств. Действия над неравенствами (203). 75. Алгебраические неравенства (208). Упражнения	210
§ 2.	Решение неравенств	211
	76. Множество решений неравенства. Равносильные неравенства (211). 77. Графическое решение неравенств (212). 78. Линейные неравенства. Системы линейных неравенств (213). 79. Квадратные неравенства (217). 80. Неравенства высших степеней. Неравенства, содержащие дробные рациональные выражения (217). Упражнения	217

нальные функции от x (219). 81. Иррациональные, показательные и логарифмические неравенства (222). 82. Неравенства с двумя неизвестными (225). Упражнения	227
Глава VII. Последовательности	228
§ 1. Предел последовательности	228
83. Числовая последовательность (228). 84. Предел числовой последовательности (230). 85. Бесконечно малые. Правила предельного перехода (235).	
§ 2. Арифметическая прогрессия	238
86. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена (238). 87. Свойства арифметической прогрессии (239). 88. Формула для суммы n членов арифметической прогрессии (240). Упражнения	241
§ 3. Геометрическая прогрессия	242
89. Геометрическая прогрессия. Формула общего члена (242). 90. Свойства геометрической прогрессии (244). 91. Формулы для суммы n членов геометрической прогрессии (245). 92. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия (246). Упражнения	248
Глава VIII. Тригонометрические функции угла (дуги)	249
§ 1. Векторы. Обобщение понятий угла и дуги	249
93. Вектор, проекция вектора (249). 94. Положительные углы и дуги, меньшие 360° (251). 95. Углы и дуги, большие 360° (251). 96. Отрицательные углы. Сложение и вычитание углов (252). Упражнения	254
§ 2. Тригонометрические функции произвольного угла	254
97. Определение основных тригонометрических функций (254). 98. Изменение основных тригонометрических функций при изменении угла от 0 до 2π (259). Упражнения	264
§ 3. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла	264
99. Основные тригонометрические тождества (264). 100. Вычисление значений тригонометрических функций по значению одной из них (266). 101. Значения тригонометрических функций некоторых углов (267). Упражнения	269
§ 4. Четность, нечетность и периодичность тригонометрических функций	270
102. Четность и нечетность (270). 103. Понятие периодической функции (271). 104. Периодичность тригонометрических функций (273). Упражнения	276
§ 5. Формулы приведения	276
105. Зависимость между тригонометрическими функциями дополнительных углов (276). 106. Формулы приведения (278). Упражнения	283
Глава IX. Тригонометрические функции числового аргумента и их графики	284
§ 1. Тригонометрические функции числового аргумента	284
107. Определение (284). 108. Области определения и области изменения значений тригонометрических функций (285). 109. Некоторые неравенства и их следствия (285). Упражнения	287
§ 2. Графики тригонометрических функций	287
110. Первоначальные сведения о таблицах тригонометрических функций (287). 111. Основные графики (288). 112. Примеры построения графиков некоторых других тригонометрических функций (293). 113. Дальнейшие примеры построения графиков функций (295). Упражнения	298
Глава X. Преобразование тригонометрических выражений	299
§ 1. Формулы сложения и вычитания	299
114. Расстояние между двумя точками на плоскости (299). 115. Косинус суммы и разности двух аргументов (300). 116. Синус суммы и разности двух аргументов (301). 117. Тангенс суммы и разности двух аргументов (302). 118. О формулах сложения для нескольких аргументов (303). Упражнения	303

§ 2. Формулы для двойного и половинного аргумента. Выражение $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ через степени $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$	303
119. Тригонометрические функции двойного аргумента (303). 120. Выражение $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ через степени $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ при натуральном числе n (305). 121. Тригонометрические функции половинного аргумента (306). 122. Выражение основных тригонометрических функций аргумента α через $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ (308). Упражнения	309
§ 3. Преобразование в сумму выражений вида $\sin \alpha \cos \beta$, $\cos \alpha \cos \beta$ и $\sin \alpha \sin \beta$	310
123. Основные формулы (310). 124. Примеры (310). Упражнения	311
§ 4. Преобразование в произведение сумм вида $\sin \alpha \pm \sin \beta$, $\cos \alpha \pm \pm \cos \beta$ и $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta$	312
125. Основные формулы (312). 126. Примеры (313). Упражнения	315
§ 5. Преобразование некоторых выражений в произведения с помощью введения вспомогательного аргумента	316
127. Преобразование в произведение выражения $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ (316). 128. Преобразование в произведение выражений $a \sin \alpha + b$ и $a \cos \alpha + b$ при $0 < b < a $ (317). 129. Преобразование в произведение выражения $a \operatorname{tg} \alpha + b$ (318). Упражнения	318
Глава XI. Обратные тригонометрические функции и их графики	319
§ 1. Функции $\operatorname{arcsin} x$, $\operatorname{arccos} x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arccotg} x$	319
130. Функция $y = \operatorname{arcsin} x$ (арксинус) (319). 131. Функция $y = \operatorname{arccos} x$ (арккосинус) (321). 132. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ (арктангенс) (322). 133. Функция $y = \operatorname{arccotg} x$ (арккотангенс) (324). 134. Пример (325). Упражнения	326
§ 2. Операции над обратными тригонометрическими функциями	327
135. Тригонометрические операции (327). 136. Операции сложения (вычитания) (332). Упражнения	335
§ 3. Обратные тригонометрические операции над тригонометрическими функциями	336
137. Функция $y = \operatorname{arcsin}(\sin x)$ (336). 138. Функция $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ (337). Упражнения	338
Глава XII. Тригонометрические уравнения и неравенства	339
§ 1. Уравнения, разрешенные относительно одной из тригонометрических функций	339
139. Уравнение $\sin x = a$ (340). 140. Уравнение $\cos x = a$ (341). 141. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ (343). 142. Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ (343). 143. Некоторые дополнения (344). Упражнения	345
§ 2. Способ приведения к одной функции одного и того же аргумента	345
144. Сущность способа (345). 145. Некоторые типы уравнений, приводящихся к уравнениям относительно функции одного аргумента (346). 146. Способ разложения на множители (350). 147. Решение рациональных тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}(\alpha/2) = t$ (353). Упражнения	356
§ 3. Некоторые частные приемы решения тригонометрических уравнений и систем	356
148. Введение вспомогательного аргумента (356). 149. Преобразование произведения в сумму или разность (358). 150. Переход к функциям удвоенного аргумента (359). 151. Решение уравнения типа $\operatorname{tg} \alpha x + \operatorname{tg} \beta x = \operatorname{tg} \gamma x + \operatorname{tg} \delta x$ (362). 152. Применение подстановки $\sin x \pm \cos x = y$ (364). 153. Системы тригонометрических уравнений (365). Упражнения	373
§ 4. Решение тригонометрических неравенств	374
154. Простейшие тригонометрические неравенства (374). 155. Примеры тригонометрических неравенств, сводящихся к простейшим (377). Упражнения	378

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЕОМЕТРИЯ

Глава XIII. Основные понятия	379
§ 1. Точка, прямая, плоскость. Фигуры и тела	379
156. Точка. Прямая. Луч. Отрезок (379). 157. Плоскость. Фигуры и тела (380). 158. Угол (381). 159. Ломаная линия. Многоугольник (382). 160. Равенство фигур. Движение (384). 161. Равенство тел (386).	
§ 2. Измерение геометрических величин	386
162. Сложение отрезков. Длина отрезка (386). 163. Общая мера двух отрезков (389). 164. Сравнительная длина отрезков и ломаных (390). 165. Измерение углов (391). 166. Радианная мера угла (393). 167. Измерение площадей (395). 168. Площадь прямоугольника. Объем прямоугольного параллелепипеда (397).	
Упражнения	399
Глава XIV. Перпендикулярные и параллельные прямые. Задачи на построение	400
§ 1. Перпендикулярные и параллельные прямые	400
169. Перпендикуляр и наклонные (400). 170. Свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку в его середине (402). 171. Параллельные прямые (402). 172. Углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей (404). 173. Углы с параллельными или перпендикулярными сторонами (405).	
§ 2. Геометрические места точек. Окружность	407
174. Геометрическое место точек (407). 175. Свойство биссектрисы угла (407). 176. Окружность (408). 177. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная и секущая (409). 178. Хорда и диаметр. Сектор и сегмент (411). 179. Взаимное расположение двух окружностей (412).	
§ 3. Основные задачи на построение	414
180. Линейка и циркуль (414). 181. Деление отрезка пополам. Построение перпендикуляров (415). 182. Построение углов (416). 183. Другие задачи на построение (418).	
Упражнения	419
Глава XV. Треугольники, четырехугольники	420
§ 1. Треугольники	420
184. Стороны и углы треугольника (421). 185. Биссектрисы треугольника. Вписанная окружность (422). 186. Оси симметрии сторон треугольника. Описанная окружность (423). 187. Медианы и высоты треугольника (425). 188. Равенство треугольников (425). 189. Построение треугольников (427). 190. Равнобедренные треугольники (430). 191. Прямоугольные треугольники (430).	
Упражнения	432
§ 2. Параллелограммы	432
192. Четырехугольники (432). 193. Параллелограмм и его свойства (433). 194. Прямоугольник (434). 195. Ромб. Квадрат (435).	
Упражнения	436
§ 3. Трапеция	436
196. Трапеция (436). 197. Средняя линия треугольника (439). 198. Средняя линия трапеции (440). 199. Деление отрезка на равные части (441).	
Упражнения	442
§ 4. Площади треугольников и четырехугольников	442
200. Площадь параллелограмма (442). 201. Площадь треугольника (443). 202. Площадь трапеции (445).	
Глава XVI. Подобие геометрических фигур	446
§ 1. Пропорциональные отрезки	446
203. Пропорциональные отрезки (446). 204. Свойства биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника (449).	
Упражнения	451
§ 2. Подобное преобразование фигур (гомотетия)	451
205. Определение гомотетических фигур (451). 206. Свойства преобразования подобия (453).	
§ 3. Общее подобное соответствие фигур	456
207. Подобные фигуры (456). 208. Периметры и площади подобных треугольников (459). 209. Применение подобия к решению задач на построение (460).	
Упражнения	461

Глава XVII. Метрические соотношения в треугольнике и круге	462
§ 1. Углы и пропорциональные отрезки в круге	462
210. Углы с вершиной на окружности (462). 211. Углы с вершиной внутри и вне круга (463). 212. Угол, под которым виден данный отрезок (464). 213. Четырехугольники, вписанные в окружность (466). 214. Пропорциональные отрезки в круге (467). 215. Задачи на построение (468).	
Упражнения	470
§ 2. Метрические соотношения в треугольнике	470
216. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора (470). 217. Квадрат стороны, лежащей против острого или тупого угла в треугольнике. Теорема косинусов (473). 218. Теорема синусов. Формула Герона (476). 219. Радиусы вписанной и описанной окружностей (478).	
Упражнения	480
§ 3. Решение треугольников	481
220. Таблицы функций (481). 221. Решение треугольников. Сводка основных формул (487). 222. Решение прямоугольных треугольников (489). 223. Решение косугольных треугольников (490).	
Упражнения	498
Глава XVIII. Правильные многоугольники. Длина окружности и площадь круга	499
§ 1. Правильные многоугольники	499
224. Выпуклые многоугольники (499). 225. Правильные многоугольники (501). 226. Соотношения между стороной, радиусом и апофемой (502). 227. Периметр и площадь правильного n -угольника (503). 228. Удвоение числа сторон правильного многоугольника (504).	
Упражнения	507
§ 2. Длина окружности. Площадь круга и его частей	507
229. Длина окружности (507). 230. Площадь круга и его частей (510)	
Упражнения	513
Глава XIX. Прямые и плоскости в пространстве	514
§ 1. Взаимное расположение прямых и плоскостей	514
231. Взаимное расположение двух прямых в пространстве (514). 232. Взаимное расположение прямой линии и плоскости (515). 233. Взаимное расположение двух плоскостей (518). 234. Свойства параллельных прямых и плоскостей (518). 235. Построения в стереометрии (520).	
§ 2. Перпендикулярность прямых и плоскостей	521
236. Перпендикуляр к плоскости (521). 237. Перпендикуляр и наклонные (523). 238. Угол между прямой и плоскостью (524). 239. Связь между перпендикулярностью и параллельностью прямых и плоскостей (525). 240. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (526).	
Упражнения	528
§ 3. Двугранные и многогранные углы	528
241. Двугранный угол (528). 242. Взаимно перпендикулярные плоскости (529). 243. Трехгранные углы (530). 244. Многогранные углы (534).	
§ 4. Многогранники	535
245. Многогранники (535). 246. Правильные многогранники (536).	
Упражнения	538
Глава XX. Многогранники и круглые тела	539
§ 1. Призма. Параллелепипед. Цилиндр	539
247. Цилиндры и призмы (539). 248. Параллелепипеды (542). 249. Объемы призм и цилиндров (543). 250. Площадь боковой поверхности призмы (544). 251. Площадь поверхности цилиндра (545).	
Упражнения	547
§ 2. Пирамида. Конус	547
252. Свойства пирамиды и конуса (547). 253. Объем пирамиды и конуса (551). 254. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды и конуса (554). 255. Усеченный конус и усеченная пирамида (556).	
Упражнения	559
§ 3. Шаровая поверхность. Шар	559
256. Шар и шаровая поверхность (559). 257. Объем шара и его частей (562). 258. Площадь поверхности шара и ее частей (566). 259. Понятие телесного угла (568).	
Упражнения	569
Ответы к упражнениям	570
Приложения	581
Предметный указатель	583

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Большой справочник по математике» содержит базовый теоретический материал для подготовки к поступлению в вуз по широко известному классическому «Сборнику задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави.

Эта книга написана для учащихся старших классов средней школы и абитуриентов, желающих повторить курс математики, например, с целью подготовиться к вступительным экзаменам в высшую школу. Она может быть использована и как пособие на подготовительных курсах вузов, и для самостоятельных занятий.

«Справочник» состоит из двух частей: «Арифметика, алгебра и элементарные функции» (часть первая) и «Геометрия» (часть вторая). Авторы стремились изложить весь теоретический материал в рамках программы вступительных экзаменов и проиллюстрировать его на примерах и задачах. Также в каждом параграфе даются упражнения для самостоятельной работы. В конце книги приводятся ответы ко всем упражнениям и подробный предметный указатель.

Цель, которую поставили перед собой авторы, определяет построение книги и ее язык. В ней устраняются элементы концентризма, допускаемые в школьных программах, когда при первичном изучении математики приходится учитывать возрастные возможности учащихся и другие обстоятельства. При повторном изучении курса математики естественно построить его так, чтобы логически законченные темы излагались по возможности в одном месте. На-

пример, развитие понятия числа от натурального до комплексного прослеживается в одной главе.

Кроме того, авторы стремились приблизить изложение многих вопросов (функции, графики, вычисление площадей и объемов и др.) к методам, принятым в курсе математики вуза. Необходимость такого изложения, перебрасывающего мостик от школьной математики к вузовской, видна из тех трудностей, которые часто испытывают на первом курсе вуза даже хорошо подготовленные учащиеся.

При подготовке настоящего издания большую работу по проверке ответов к упражнениям проделал Сергей Беркесов. Авторы выражают ему за это сердечную благодарность.

Используя материалы «Большого справочника» в комплекте со «Сборником задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканава, учащиеся старших классов смогут успешно подготовиться к выпускным экзаменам в школе — сдаче ОГЭ и ЕГЭ, а также к поступлению даже в самый сложный технический вуз.

О ПОЛЬЗОВАНИИ КНИГОЙ

Книга представляет собой повторительный курс элементарной математики в том смысле, что она рассчитана на читателя, уже изучавшего предмет, но желающего пополнить, укрепить и систематизировать свои знания (например, с целью подготовки в вуз). Поэтому предполагается, что, излагая тот или иной вопрос, можно ссылаться для пояснения или достижения полноты освещения вопроса и на последующий материал, предусматривая, что читатель имеет о нем хотя бы общее представление. Таких ссылок в тексте довольно много; для удобства пункты, на которые разбит материал, снабжены сплошной нумерацией. Ссылки даются в виде (см. п. 184) или просто (п. 55). Рисунки также имеют сплошную нумерацию; формулы имеют двойной номер (например, (4.5) или (217.3), т. е. пятая формула пункта 4 или третья формула пункта 217).

Читатель, не слишком позабывший материал школьной программы, может изучать книгу подряд; однако отнесение всей геометрии на конец нецелесообразно (геометрия обычно изучается параллельно с другим материалом). В качестве одного из вариантов можно предложить такую последовательность в изучении материала:

1) главы I—VII; 2) главы VIII, XVI и гл. XVII до п. 216 включительно; 3) остальные главы первой части; 4) остальной материал второй части.

При использовании книги учащимися подготовительных отделений вузов последовательность, естественно, определяется порядком прохождения материала на занятиях.

Мелкий шрифт употреблен для выделения материала, не входящего в минимальную обязательную программу.

Для читателя, желающего далее расширить свои математические познания (это важно для поступающих на специальности с повышенными требованиями к математической подготовке), можно рекомендовать следующую литературу:

1) Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов, *Пособие по математике для поступающих в вузы*, изд-во «Наука».

2) В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин, *Лекции и задачи по элементарной математике*, изд-во «Наука».

Небольшое количество упражнений в книге никоим образом не заменяет задачника. Для приобретения необходимых навыков в решении задач и примеров можно использовать следующие задачники:

1) В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский, Т. Н. Маслова, И. Г. Орловская, Р. И. Позойский, Г. С. Ряховская, М. И. Сканава, Н. М. Федорова, *Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы*, изд-во «Высшая школа».

2) В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин, *Задачи по элементарной математике*, изд-во «Наука».

3) Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин, *Задачи по элементарной математике (повышенной трудности)*, изд-во «Наука».

ВВЕДЕНИЕ

А. Определения. Аксиомы. Теоремы. Строгое изложение любой части математики основывается на введении некоторых простейших неопределяемых понятий (например, для геометрии: «точка», «прямая», «лежать на», «между» и т. д.). Обычно этим понятиям отвечает некоторый очевидный, интуитивно ясный смысл. Далее формулируются некоторые первичные, недоказуемые (в принципе или при данной форме изложения) утверждения; они называются *аксиомами* или *постулатами*. Например: если две плоскости имеют общую точку, то они имеют и общую прямую. Это аксиоматически принимаемое положение использует неопределяемые понятия: «плоскость», «прямая», «точка», «лежать на» (чтобы фактически не употреблять других понятий, пришлось бы сформулировать аксиому несколько длиннее: если существует точка, лежащая на двух плоскостях, то существует и прямая, лежащая на этих плоскостях). Кроме специфических понятий каждой математической теории (арифметики, геометрии и т. п.), во всей математике используются также понятия *множества* (как определенного собрания любых элементов), *соответствия* (в выражениях типа «пусть каждому x соответствует определенное y » и т. п.) и общие правила логического ведения рассуждений¹⁾.

Дальнейшим используемым понятиям даются определения в терминах первоначальных или уже введенных понятий. Пример: *отрезком AB* прямой называется множество точек, включающее точки A , B и все точки, лежащие между ними. В этом определении, например, употреблены понятия «множество», «между» и т. д.

Относительно первоначальных и введенных с их помощью дальнейших понятий доказываются (на основе аксиом и ранее доказанных утверждений, с помощью обычных правил логики) новые утверждения, называемые *теоремами*, иногда *леммами* (обычно леммой называют утверждение, не имеющее важного самостоятельного значения, но используемое при доказательстве других теорем).

¹⁾ Исключение составляют книги по основаниям математики, где критически исследуют и сами правила логического вывода и обоснованность использования понятий, относящихся к множествам.

Полностью выдержанное по указанной схеме изложение математических дисциплин называется *аксиоматическим* (точнее, полуформальным). Фактически осуществить его в полной мере в рамках учебника не удастся, так как объем его получился бы слишком большим, а изложение очень утомительным. Поэтому и в школьных учебниках и в данной книге аксиомы приводятся лишь частично, часть теорем сообщается без доказательства, а доказательства некоторых других построены с большим или меньшим привлечением интуитивно ясных соображений (которые в принципе могли бы быть доказаны исходя из полной системы аксиом).

Б. Логическое следование. Необходимые и достаточные условия. Утверждения (теоремы) в математике, явно или неявно, имеют следующую форму: «если..., то...». Например: «если одна из медиан треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный». Утверждение: «медианы треугольника делят друг друга в отношении 2:1» — можно сформулировать в сходной форме: «если отрезки AM и BN являются медианами треугольника ABC , то они делят друг друга в отношении 2:1».

Таким образом, для доказательства теоремы необходимо бывает установить, что из некоторых предположений (посылка) с логической необходимостью вытекает некоторый результат (вывод).

В логике тот факт, что из посылки A вытекает вывод B , обозначают так: $A \Rightarrow B$ (или каким-либо сходным образом).

В этом случае говорят, что A является *достаточным* условием для B ; в свою очередь B является *необходимым* условием для A . Это означает, что для справедливости B достаточно (но, вообще говоря, не необходимо) выполнения A ; для справедливости A необходимо (но, вообще говоря, недостаточно) выполнение B . Например, в утверждении: «если фигуры равны, то они равновелики» (т. е. имеют равные площади) — равенства фигур достаточно для равенства их площадей. В то же время равенство площадей — необходимое условие равенства фигур. Если оказывается, что не только $A \Rightarrow B$, но и $B \Rightarrow A$, то оба утверждения A и B называют *эквивалентными*. В математических текстах при этом употребляют выражения типа: « A тогда и только тогда, когда B », « A , если и только если B ». Тот же смысл имеют и выражения: « A необходимо и достаточно для B ». Пример: для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали делили друг друга пополам. Говорят, что свойство диагоналей делить друг друга пополам является необходимым и достаточным условием того, чтобы четырехугольник был параллелограммом.

В. Прямая, обратная, противоположная теоремы. Доказательства от противного. Наряду с каким-либо утверждением A (при этом вообще, под утверждением понимается любое пове-

ствительное предложение, о котором всякий раз можно сказать, что оно истинно либо ложно) можно рассматривать его отрицание, утверждение «не A », обозначаемое короче \bar{A} и состоящее в том, что A ложно. A и \bar{A} всегда образуют такую пару утверждений, что из них одно истинно, а другое ложно.

Приведем примеры.

A	\bar{A}
1) Данные три точки лежат на одной прямой.	Данные три точки не лежат на одной прямой.
2) Квадрат любого действительного числа положителен.	Существует хотя бы одно действительное число, квадрат которого отрицателен или равен нулю.
3) Число a меньше числа b .	Число a больше или равно числу b .
4) При любом натуральном $n \geq 3$ существует правильный n -угольник	Существует хотя бы одно натуральное $n \geq 3$ такое, что не существует правильного n -угольника.

Ясно, что в примерах 1) и 3) утверждение A или \bar{A} окажется истинным (ложным) в зависимости от заданных точек или чисел a, b . В примере 2) A ложно, \bar{A} истинно, так как $0^2 = 0$; в примере 4) A истинно, а \bar{A} ложно.

Представим себе теперь некоторое математическое утверждение (теорему) вида $A \Rightarrow B$; наряду с ним можно рассматривать следующие три другие утверждения (теоремы):

$$B \Rightarrow A \quad (\text{обратное утверждение}), \quad (1)$$

$$\bar{A} \Rightarrow \bar{B} \quad (\text{противоположное утверждение}), \quad (2)$$

$$\bar{B} \Rightarrow \bar{A} \quad (\text{утверждение, обратное противоположному или, что то же — противоположное обратному}). \quad (3)$$

Их называют соответственно *обратной теоремой*, *противоположной теоремой*, *теоремой*, *обратной противоположной*; следует иметь при этом в виду, что *теоремой* мы обычно называем истинное утверждение, вообще же для любого утверждения это заранее не предполагается.

Утверждения $A \Rightarrow B$ и (3) эквивалентны: именно, если верно утверждение $A \Rightarrow B$, то верно и обратное противоположному $B \Rightarrow \bar{A}$ (и обратно). Аналогично, эквивалентны обратное и противоположное утверждения (1), (2).

Доказательство этого правила вытекает из условия считать, что из двух высказываний A и \bar{A} всегда одно истинно, а другое ложно (в логике это называют *принципом исключенного третьего*).