ВВЕДЕНИЕ

Эта книга адресована *учащимся 10—11 классов* для подготовки к единому государственному экзамену. Материал данного пособия представлен в виде разделов, соответствующих основным темам школьного курса математики, присутствующим в ЕГЭ. Для каждой темы предложены задания части 1 и части 2 профильного уровня, а также обобщающие контрольные работы. Ко всем заданиям приведены ответы.

Тренировочные задания позволят учащимся систематически, при прохождении каждой темы, готовиться к этому экзамену. Достаточно будет в 10—11-х классах решать задания из этого пособия параллельно с темой по математике, изучаемой на школьных уроках, а в конце 11-го класса, в качестве повторения, — варианты ЕГЭ по математике.

Данное пособие может использоваться совместно с любым учебником алгебры и начал анализа и геометрии для 10—11-х классов.

Книга также будет полезна *учителям математики*, так как дает возможность эффективно организовать подготовку учащихся к единому государственному экзамену непосредственно на уроках, в процессе изучения всех тем. Можно предложить несколько вариантов работы:

— включение заданий тестового характера в систему заданий для 10—11-х классов вместе со стандартными упражнениями учебника;

— использование заданий и контрольных работ на этапе обобщающего повторения по каждой теме или на этапе итогового повторения и подготовки к ЕГЭ в конце 11-го класса;

— контроль и коррекция знаний учащихся.

В структуре экзаменационной работы выделены две части, которые различаются по содержанию, форме записи ответа, степени сложности и числу заданий.

В данном учебном пособии также представлены две группы заданий. Формы записи ответов для разных заданий соответствуют формулировкам заданий в ЕГЭ.

Для каждого из заданий **части 1** ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Единицы измерений не пишут. В этом разделе содержатся задания базового уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа», а также задания из различных разделов математики с 5-го по 11-й класс.

Задания **части 2** требуют развернутого ответа. При оформлении решений обращают внимание на правильную запись хода решения, наличие обоснований и верный ответ. В эту группу включаются самые сложные задания по геометрии и алгебре 7—11-х классов повышенного и высокого уровней сложности.

Надеемся, что данное пособие поможет учителям математики эффективно организовать подготовку к ЕГЭ на своих уроках, а старшеклассникам — систематизировать знания по математике, самостоятельно подготовиться к экзамену и успешно его сдать.

I. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ МАТЕМАТИКИ (10—11 классы)

1. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1.1. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Теоретические сведения

Формулы одного аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2}n, n \in \boldsymbol{Z} \qquad (4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad (5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (6)$$

Формулы сложения

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (7)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (8)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad (9)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (10)$$

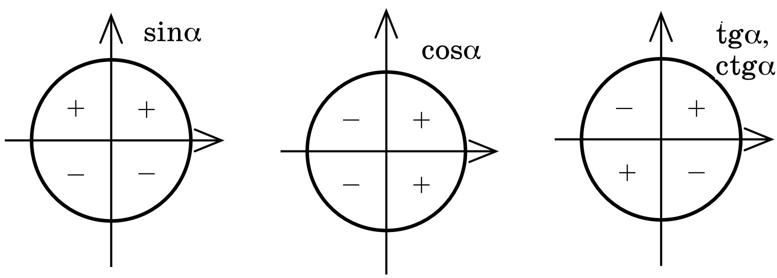
Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad (11)$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (12)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad (13)$$

Знаки тригонометрических функций



Решение типовых заданий

Каждый год в ЕГЭ встречаются задания на применение формул приведения. Их применяют для преобразования выражений вида

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right);\ \sin(\pi + \alpha);\ \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha);\ \operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) \text{ и т.д.}$$

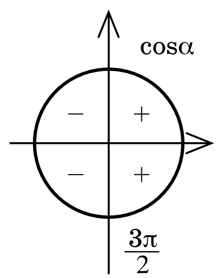
Преобразовывать подобные выражения помогает следующее правило: 1) находим четверть, в которой расположен угол, и определяем знак функции в этой четверти (угол α считаем углом I четверти); 2) меняем функцию на кофункцию, если аргументом служат углы $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$..., или не изменяем функцию, если

аргументом служат углы $(\pi \pm \alpha)$, $(2\pi \pm \alpha)$...

Задание 1. Упростите выражение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

Решение.

1) Угол $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ лежит в III четверти, где $\cos \alpha$ отрицателен.



2) Угол $\frac{3\pi}{2}$ находится на вертикальной оси, поэтому «киваем головой сверху вниз», отвечая на вопрос: «Меняется название функции?» — «Да». Поэтому получаем $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$.

Ответ: $-\sin \alpha$.

Задание 2. Упростите выражение $\sin(\pi - \alpha)$.

Решение.

1) Угол $\pi - \alpha$ лежит во II четверти, где $\sin \alpha$ положителен.

2) Угол π находится на горизонтальной оси $\pi = 180^\circ$, поэтому «киваем головой справа налево», отвечая на вопрос: «Меняется название функции?» — «Нет». Поэтому получаем $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

Задание 3. Упростите выражение $\mathrm{tg}(90°+\alpha)$.

Ответ: $-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Задание 4. Упростите выражение $\mathrm{ctg}(360°-\alpha)$.

Ответ: $-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Рассмотрим более сложные случаи, когда сначала используется свойство четности тригонометрических функций ($\cos\alpha$ — четная функция, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ — нечетные функции), а затем формулы приведения.

Задание 5. Упростите выражение $\sin(\alpha-\pi)$.

Решение. Сравним выражения из заданий 2 и 5. Чтобы применить формулы приведения, используем нечетность $\sin t$.

$$\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\pi-\alpha)=-\sin\alpha.$$

Ответ: $-\sin\alpha$.

Задание 6. Упростите выражение $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

Ответ: $-\sin\alpha$.

Задание 7. Упростите выражение $\mathrm{tg}(\alpha-270°)$.

Решение.

$$\mathrm{tg}(\alpha-270°)=-\mathrm{tg}(270°-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Ответ: $-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Задание 8. Упростите выражение $\operatorname{ctg}(\alpha - 360°)$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}(\alpha - 360°) = -\operatorname{ctg}(360° - \alpha) = \operatorname{ctg}\ \alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha$.

Рассмотрим следующую ситуацию, когда, прежде чем применить формулы приведения, необходимо уменьшить аргумент, используя свойство периодичнсти тригонометрических функций (наименьший положительный период $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ равен 2π, поэтому уменьшать аргумент можно, вычитая из него числа, кратные 2π; наименьший положительный период $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ равен π, поэтому уменьшать аргумент можно, вычитая из него числа, кратные π).

Задание 9. Упростите выражение

$$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) - 1}.$$

Решение.

Когда надо преобразовывать выражения в числителе и знаменателе, удобно преобразовывать отдельно числитель, отдельно знаменатель.

В числителе:

$$\sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}(5\pi + \alpha) = \sin\left(4\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) - \operatorname{ctg}\alpha =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}\alpha = \cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha.$$

В знаменателе: $\sin(\pi - \alpha) - 1 = \sin\alpha - 1$.

Разделим числитель на знаменатель, получим: $\frac{\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha - 1}$. Выражения в числителе и знаменателе содержат один и тот же аргумент α, поэтому используем формулы одного аргумента (а именно: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$).

$$\frac{\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha - 1} = \frac{\cos\alpha - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sin\alpha - 1} = \frac{\cos\alpha(\sin\alpha - 1)}{\sin\alpha(\sin\alpha - 1)} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\alpha$.

Если сумма (разность) аргументов тригонометрических функций равна $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3}{2}\pi$ и т.д., то помогают формулы приведения.

Задание 10. Вычислите: $\cos^2 15° + \cos^2 75°$.

Решение.

Так как $15° + 75° = 90°$, то

$$\cos^2 15° + \cos^2 75° = \cos^2(90° - 75°) + \cos^2 75° =$$
$$= \sin^2 75° + \cos^2 75° = 1.$$

Ответ: 1.

Разобраться в обилии формул тригонометрии часто помогает сравнение аргументов тригонометрических функций, входящих в выражение.

Задание 11. Упростите выражение $\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta}$.

Решение.

Аргументы числителя и знаменателя отличаются в 2 раза, значит, применим формулы двойного угла в числителе.

$$\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta} = \frac{2\sin 2\beta \cos 2\beta}{\cos 2\beta} = 2\sin 2\beta.$$

Ответ: $2\sin 2\beta$.

В заданиях на преобразования выражений, содержащих степени с натуральными показателями, сначала применяют формулы сокращенного умножения.

Задание 12. Упростите выражение

$$\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - \mathrm{tg}^2\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\,\alpha.$$

Решение.

$$\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - \mathrm{tg}^2\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\,\alpha =$$

$$= \frac{\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - \left(\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha\right)^2 = -1 - 1 = -2.$$

Ответ: -2.

Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Найдите значение выражения
$3\sin^2\beta + 10 + 3\cos^2\beta$.

2. Найдите значение выражения
$16 - 6\sin^2\beta - 6\cos^2\beta$.

3. Вычислите: $\cos^2 15° + \cos^2 75°$.

4. Вычислите: $\cos^2 15° - \sin^2 75°$.

5. Упростите выражение $\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta} - 2\sin 2\beta + 0{,}29$.

6. Вычислите:
$\left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \sqrt{3}$ при $x = \frac{5\pi}{6}$.

7. Дано: $\cos\beta = 0{,}8$ и $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Найдите: $\sin\beta$.

8. Дано: $\operatorname{tg}\beta = \frac{7}{24}$ и $180° < \beta < 270°$. Найдите: $\cos\beta$.

9. Дано: $\operatorname{ctg}\beta = -1\frac{1}{3}$. Найдите: $\cos 2\beta$.

10. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\sin\beta = -0{,}6$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Найдите: $\sin(\alpha - \beta)$.

11. Дано: $\cos\alpha = -0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\sin\beta = -0{,}6$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Найдите: $\cos(\alpha + \beta)$.

12. Найдите значение выражения $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)$, если $\sin\beta = 0{,}11$.

13. Найдите значение выражения $\sin(180° - \beta)$, если $\sin\beta = -0{,}24$.

14. Найдите значение выражения $\sin(270^\circ - \beta)$, если $\cos\beta = -0{,}41$.

15. Найдите значение выражения $\cos(\beta - 270^\circ)$, если $\sin\beta = 0{,}59$.

16. Найдите значение выражения $\mathrm{tg}^2(\alpha - \pi)$, если $\mathrm{ctg}\,\alpha = 2{,}5$.

17. Найдите значение выражения $\cos^2\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}2$.

18. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\left(\frac{13}{2}\pi - \alpha\right) - \mathrm{ctg}(6\pi + \alpha)}{1 + \sin(2\pi - \alpha)},$$

если $\mathrm{ctg}\,\alpha = 8$.

19. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) - \mathrm{ctg}(5\pi + \alpha)}{\sin(\pi - \alpha) - 1},$$

если $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}25$.

1.2. Тригонометрические уравнения

Перед изучением данной темы полезно повторить теоретические сведения, изложенные в теме «Тождественные преобразования тригонометрических выражений».

Теоретические сведения

Общие формулы

$$\sin x = a,\ -1 \le a \le 1 \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \quad (1)$$

$$\cos x = a,\ -1 \le a \le 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \quad (4)$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a \quad (5)$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a \quad (6)$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a \quad (7)$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a \quad (8)$$

Особые случаи

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z} \quad (9)$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z} \quad (10)$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z} \quad (11)$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in \boldsymbol{Z} \quad (12)$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z} \quad (13)$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z} \quad (14)$$

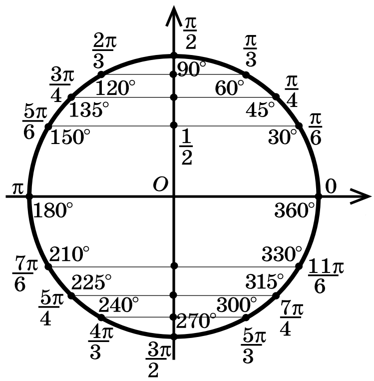
Находить значения арксинусов (арккосинусов, арктангенсов, арккотангенсов) некоторых углов помогает следующая таблица.

Угол / Значения	0	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
arcsin ↑	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arccos ↑	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
arctg ↑	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
arcctg ↑	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Например: $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$.

				$\frac{\pi}{3}=60^\circ$	
$\grave{a}$rcsin ↑				$\frac{\sqrt{3}}{2}$	

Тригонометрический круг



Решение типовых заданий

Рассмотрим простейшие уравнения и на примере их решения покажем, как отвечать на дополнительные вопросы. Такие вопросы — еще одна особенность ЕГЭ по математике: обычно требуется не только решить тригонометрическое уравнение, но из полученного семейства решений выбрать те, которые удовлетворяют некоторым условиям.

Простейшие уравнения (дополнительные вопросы)

Задание 1. Решите уравнение $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. По формуле (1) имеем:

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k,\ \ k\in \boldsymbol{Z};\ x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k.$$

Ответ: $(-1)^k\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ \ k\in \boldsymbol{Z}$.

При ответах на дополнительные вопросы удобнее представить решения в виде объединения двух семейств решений:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\ (1), \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\ (2). \end{array}\right. \qquad \text{(I)}$$

Дополнительные вопросы к заданию 1.

А. *Найдите наименьший положительный корень.*

Выбираем наименьшее положительное решение из каждого семейства. Из (1) имеем $x = \dfrac{\pi}{3}$, из (2) $x = \dfrac{2\pi}{3}$. Наименьшим из них будет $\dfrac{\pi}{3}$.

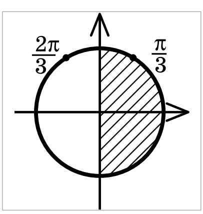
Ответ: $\dfrac{\pi}{3}$ или $60°$.

Б. *Найдите наибольший отрицательный корень.*

При $k = -1$ из (1) имеем $x = \dfrac{\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{3}$. При $n = -1$ из (2) имеем $x = \dfrac{2\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{4\pi}{3}$. Наибольшим из них будет $-\dfrac{4\pi}{3}$.

Ответ: $-\dfrac{4\pi}{3}$ или $-240°$.

В. *Укажите те корни уравнения, для которых* $\cos x > 0$.



Отметим все решения уравнения (I) на тригонометрическом круге. Из этих решений надо выбрать те, для которых $\cos x > 0$. Известно, что $\cos x > 0$, если x лежит в I четверти или в IV четверти.

Получаем, что $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Г. *Укажите те корни, которые лежат в промежутке* $[-3\pi; -\pi]$.

Решим системы: $\begin{cases} -3\pi \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k \le -\pi, \\ k \in \boldsymbol{Z} \end{cases}$ (1*)

и $\begin{cases} -3\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le -\pi, \\ n \in \boldsymbol{Z} \end{cases}$ (2*).

Имеем (1*): $\begin{cases} -\frac{5}{3} \le k \le -\frac{2}{3}, \\ k \in \boldsymbol{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k = -1$ и $x = -\frac{5\pi}{3}$.

(2*): $\begin{cases} -\frac{11}{6} \le n \le -\frac{5}{6}, \\ n \in \boldsymbol{Z} \end{cases} \Leftrightarrow n = -1$ и $x = -\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$.

Д. *Сколько корней имеет уравнение на промежутке* $\left[-3\pi; \frac{\pi}{2}\right]$?

Решим системы: $\begin{cases} -3\pi \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k \le \frac{\pi}{2}, \\ k \in \boldsymbol{Z} \end{cases}$ (1**)

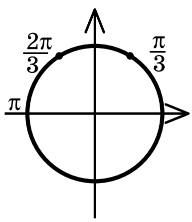
и

$\begin{cases} -3\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le \frac{\pi}{2}, \\ n \in \boldsymbol{Z} \end{cases}$ (2**).

Решением (1**) являются $k = -1$ и $k = 0$. Решением (2**) является $n = -1$. Таким образом, получаем $2 + 1 = 3$ корня.

Ответ: 3 корня.

Е. *Найти ближайший к* π *корень уравнения.*



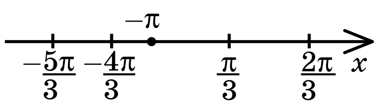
Отметим все корни уравнения (I) на тригонометрическом круге.

Искомым корнем является $\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}$.

Ж. *Между какими корнями заключено число* $-\pi$?

Отметим корни уравнения (I) на координатной прямой.



Ответ: $-\frac{4\pi}{3} < -\pi < \frac{\pi}{3}$.

Задание 2. Решите уравнение $\sin(\pi - x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -1$.

Решение. При решении тригонометрических уравнений полезно упростить аргумент. В данном случае применить формулы приведения (см. «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в разделе 1.1). Имеем:

$$\sin x + \sin x = -1, \ \sin x = -\frac{1}{2}.$$

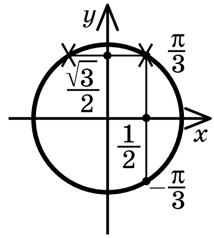
По формуле (1) для решения простейших уравнений

$$x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}$.

Задание 3. Решите уравнение $\dfrac{\cos x - \dfrac{1}{2}}{\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 0.$

Решение. $\dfrac{\cos x - \dfrac{1}{2}}{\sin x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2}, \\ \sin x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$



Отмечаем решения системы на тригонометрическом круге.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$

Задание 4. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0.$

Решение. $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ \pi^2 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} n \quad (1), \\ x^2 < \pi^2 \quad (2). \end{cases}$

Решением неравенства (2) является промежуток $(-\pi; \pi)$. Отберем решения уравнения (1), принадлежащие промежутку $(-\pi; \pi)$. Это 0 и $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: 0; $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

При решении тригонометрических уравнений необходимо помнить, что функции tg t или ctg t существуют не при всех действительных значениях t.

Задание 5. Решите уравнение

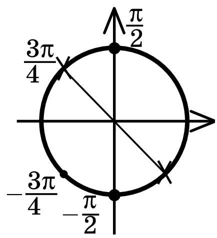
$$\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) = 0.$$

Решение. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом существует.

$$\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1=0, \end{array}\right. \\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}, \\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}, \end{array}\right. \\ x\neq \dfrac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

При решении системы используем тригонометрический круг.



Решение системы:

$x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\ \dfrac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}.$

Обратимся к более сложным уравнениям. Сначала рассмотрим общие методы решения уравнений, присущие как тригонометрическим, так и показательным и логарифмическим уравнениям, а затем обратимся к специальным методам, характерным только для тригонометрических уравнений.

Метод введения новой переменной

Задание 6. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos^2(\pi-x)-2\sin x+2=0$. Ответ запишите в градусах.

Решение. Упростим аргумент, применив формулы приведения: $\cos^2 x-2\sin x+2=0$. В левой части уравнения присутствуют две тригонометрические функции. Уменьшим количество функций.

Используем основное тригонометрическое тождество: $1-\sin^2 x-2\sin x+2=0$. Получим квадратное уравнение относительно $\sin x$.

Введем новую переменную. Пусть $a=\sin x$, $-1\le a\le 1$ (*), тогда уравнение примет вид $a^2+2a-3=0$.

Решая квадратное уравнение, получим $a=-3$ или $a=1$. $a=-3$ не удовлетворяет условию (*).

Если $a=1$, то $\sin x=1$ и $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$. Вспомните, что необходимо указать в ответе.

Наибольший отрицательный корень получим при $k=1$. Он равен $\frac{\pi}{2}-2\pi=-\frac{3}{2}\pi$. Переведем в градусную меру, получим $-270°$.

Ответ: $-270°$.

Задание 7. Сколько корней имеет уравнение

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-3\cos 2x=2 \text{ на отрезке } \left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]?$$

Решение. Сначала упростим аргумент, т.е. применим формулы приведения:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-3\cos 2x=2,\ \sin x-3\cos 2x=2.$$

Далее сравним аргументы, так как аргументы $\sin x$ и $\cos 2x$ отличаются в два раза, применим формулы двойного угла (см. «Тождественные преобразования тригонометрических выражений» в разделе 1.1).

$$\sin x-3\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=2.$$

Теперь в уравнении две функции. Уменьшим число функций.

$$\sin x-3\left(1-\sin^2 x-\sin^2 x\right)=2.$$

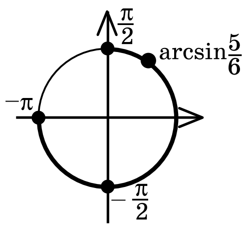
Пусть $a=\sin x$, $-1\le a\le 1$. Решим уравнение

$$6a^2+a-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1, \\ a=\frac{5}{6}. \end{array}\right.$$

Получим: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = (-1)^m \arcsin\dfrac{5}{6} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Так как длина отрезка $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$ меньше 2π, то можно использовать не координатную прямую, а тригонометрический круг.

Этому отрезку принадлежат два корня: $-\dfrac{\pi}{2}$, $\arcsin\dfrac{5}{6}$.



Ответ: 2 корня.

Метод разложения на множители

Задание 8. Между какими корнями уравнения $\sin 2x + \sin(-x) = 2\cos(-x) - 1$ заключено число $\dfrac{5\pi}{12}$?

Решение. Сначала упростим аргумент, используя свойство четности (нечетности) функций ($\cos x$ — четная функция, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — нечетные функции).
$\sin 2x + \sin(-x) = 2\cos(-x) - 1$,
$\sin 2x - \sin x - (2\cos x - 1) = 0$.

Сравним аргументы тригонометрических функций. Применим формулы двойного угла.

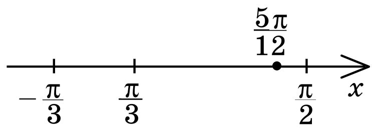
$$2\sin x\cos x - \sin x - (2\cos x - 1) = 0,$$

$$\sin x(2\cos x - 1) - (2\cos x - 1) = 0,$$

$$(2\cos x - 1)(\sin x - 1) = 0.$$

Уравнение имеет следующие корни: $\left[\begin{aligned} & x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ & x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}, \\ & x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{aligned}\right.$

Отметим корни на координатной прямой.



Получим, что $\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$.

Метод решения однородных уравнений

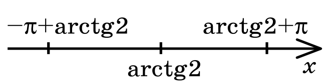
Задание 9. Найдите наименьшую длину отрезка, на котором есть два корня уравнения $\sin x - 2\cos x = 0$ (*).

Решение. Исходное уравнение является однородным уравнением 1-й степени, решается делением на $\cos x$ или на $\sin x$ ($\cos x \neq 0$, иначе $\cos x = 0$, и при подстановке в уравнение (*) получим, что и $\sin x = 0$, а это противоречит основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

Разделим обе части уравнения на $\cos x$ ($\cos x \neq 0$).

Получим: $\operatorname{tg} x - 2 = 0$, $\operatorname{tg} x = 2$, $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Отметим корни уравнения на координатной прямой.



Наименьшая длина $\pi + \operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}2 = \pi$.
Ответ: π.

Задание 10. Решите уравнение

$$1-\sin(-x)\cdot\cos x-3\cos^2(-x)=0.$$

Р е ш е н и е. Упростим аргумент, используя свойства четности $\cos x$ и нечетности $\sin x$. Получим:

$$1+\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x=0.$$
$$\sin^2 x+\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x-3\cos^2 x=0.$$
$$\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x-2\cos^2 x=0.$$

Получим однородное уравнение 2-й степени, которое решается делением, например на $\cos^2 x$.

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2=0.$$

Введем новую переменную $a=\operatorname{tg} x$. Получим, что

$$\operatorname{tg} x=1,\ \operatorname{tg} x=-2.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi m, m\in \boldsymbol{Z}; -\operatorname{arctg} 2+\pi n, n\in \boldsymbol{Z}.$

Замечание. Уравнения $\cos x=-2$, $\sin x=-2$ не имеют решений, а уравнения $\operatorname{tg} x=-2$, $\operatorname{ctg} x=-2$ имеют бесконечное число решений.

Уравнения

$$\sin^2 x+\sin x\cos x-2\cos^2 x=0 \qquad (1)$$

и

$$\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x=0 \qquad (2)$$

являются однородными, но если уравнение (1) решается с помощью деления (на $\cos^2 x\neq 0$), то уравнение (2) решается с помощью разложения на множители (иначе можно потерять корни πm, $m\in \boldsymbol{Z}$), а только затем делением (например, на $\sin x\neq 0$).

Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $2\sin x + 1 = 0$. Ответ запишите в градусах.
2. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x + 3 = 0$. Ответ запишите в градусах.
3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x - 6 = 0$. Ответ запишите в градусах.
4. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos(2x) = 0{,}5$. Ответ запишите в градусах.
5. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ запишите в градусах.
6. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = 1$. Ответ запишите в градусах.
7. Укажите число корней уравнения $\sin 200x \cos 199x - \cos 200x \sin 199x = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 4\pi]$.
8. Укажите число корней уравнения $\mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{ctg}\,x + \cos x = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$.
9. Укажите ближайший к 0 корень уравнения $2\sin x + 1 = 0$. Ответ запишите в градусах.
10. Укажите ближайший к $\frac{\pi}{2}$ корень уравнения $2\cos x + \sqrt{3} = 0$. Ответ запишите в градусах.
11. Укажите ближайший к π корень уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ запишите в градусах.
12. Укажите ближайший к π корень уравнения $\sin x = \frac{-3}{2\sqrt{3}}$. Ответ запишите в градусах.

13. Укажите число корней уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, которые лежат в промежутке $[0;\ 3\pi]$.

14. Укажите количество корней уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, которые лежат в промежутке $[-\pi;\ 2\pi]$.

15. Укажите число корней уравнения $\sin x = \frac{1}{3}$ на промежутке $[0;\ \pi]$.

16. Укажите число корней уравнения $\sin x = \frac{1}{3}$ на промежутке $[\pi;\ 2\pi]$.

17. Укажите число корней уравнения $\operatorname{tg} x = 2$ на промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

18. Укажите ближайший к $\frac{\pi}{6}$ корень уравнения $\cos(4x) = 1$. Ответ запишите в градусах.

19. Найдите сумму корней уравнения $\cos(x + 2000\pi) = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$. Ответ запишите в градусах.

20. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg}(2x - 10^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ответ запишите в градусах.

21. Решите уравнение $\cos(\pi x) = 1$. В ответе укажите произведение корней уравнения, принадлежащих промежутку $(1;\ 6)$.

22. Решите уравнение $\sin(\pi x) = 1$. В ответе укажите сумму корней уравнения, принадлежащих промежутку $(1;\ 6)$.

23. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -1$. Ответ запишите в градусах.

24. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0$. Ответ запишите в градусах.

25. Определите число корней уравнения $\dfrac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$ из промежутка $[0;\ 2\pi]$.

26. Определите число корней уравнения $\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 0$ из промежутка $[0;\ 2\pi]$.

27. Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 2} + 2$ на промежутке $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$?

28. Сколько корней имеет уравнение

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 3\cos 2x = 2$ на отрезке $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$?

29. Укажите наименьший положительный корень уравнения $(\cos x - 2)\sin \pi x = 0$.

30. Укажите корень уравнения $(\sin 2x + \sqrt{2})\cos \pi x = 0$, принадлежащий промежутку $[2;\ 3]$.

31. Укажите корень уравнения $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащий промежутку $(0;\ \pi)$. Ответ запишите в градусах.

32. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos x + \cos(2x) = 2$. Ответ запишите в градусах.

33. Укажите наименьший положительный корень уравнения $2\cos^2(\pi - x) + 5\sin x - 4 = 0$. Ответ запишите в градусах.

34. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos(2x) + 5\cos(-x) + 3 = 0$. Ответ запишите в градусах.

35. Найдите сумму корней уравнения

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0,$$

принадлежащих промежутку $[-\pi;\ \pi]$. Ответ запишите в градусах.

36. Укажите число корней уравнения

$$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3},$$

принадлежащих промежутку $[-\pi;\ 2\pi]$.

37. Укажите наименьший положительный корень уравнения $3\cos x + \sin(-2x) = 0$. Ответ запишите в градусах.

38. С помощью графиков укажите число корней уравнения $\sin(2x) = x$.

39. С помощью графиков укажите число корней уравнения $\cos x = 10x$.

40. Укажите число корней уравнения $\dfrac{\sin x - \frac{1}{2}}{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0,$

принадлежащих промежутку $[-2\pi;\ 0]$.

41. Укажите число корней уравнения $6\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 2$, принадлежащих промежутку $[-\pi;\ 0]$.

42. Укажите число корней уравнения $\operatorname{tg}(3x) = \operatorname{tg} x$ из промежутка $\left[0;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

43. Решите уравнение $4\cos x = x^2 + 4$.

44. Решите уравнение $\sin\left(\frac{37\pi}{2}+x\right)=3x^2+1$.

45. Найти наибольший отрицательный корень уравнения: $(2\cos x-1)\cdot\sqrt{\sin x}=0$. Ответ запишите в градусах.

46. Найдите сумму различных корней уравнения $\cos x \cos(5x) = \cos(6x)$, принадлежащих промежутку $[0;\ \pi]$. Ответ запишите в градусах.

47. Укажите число корней уравнения

$$\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=0,$$

принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$.

48. Найдите сумму корней уравнения $\sin(2x)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi]$. Ответ запишите в градусах.

49. Найдите сумму корней уравнения $\sin(2\pi x) + 6\cos(\pi x) = 3 + \sin(\pi x)$, принадлежащих промежутку $[-20;\ 20]$.

50. Найдите сумму корней уравнения $\cos(2\pi x) - 3\sin(\pi x) + 1 = 0$, принадлежащих промежутку $[0;\ 20]$.

51. Решите уравнение $x^2 + y^2 + \cos^2 x = 2xy$.

52. Решите уравнение $\dfrac{42x^2+\pi x-\pi^2}{\sqrt{\sin x}+1}=0$.

53. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{\sin x}-1}{2\pi x-\pi^2}=0$.

54. Решите уравнение $\dfrac{\cos x-\sin x}{4x-\pi}=0$.

55. Решите уравнение $\dfrac{3\cos x+\cos 2x-1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}=0$.

56. Решите уравнение $\dfrac{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}{3\cos x+\cos 2x-1}=0$.

57. Решите уравнение $\dfrac{12\operatorname{ctg} x-5}{13\sin x-12}=0$.

58. Решите уравнение $\dfrac{13\sin x-12}{12\operatorname{ctg} x-5}=0$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 1

Ответом в заданиях этой группы может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Дано: $\cos\alpha = -0{,}8$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\sin\alpha$.

2. Какое число из промежутка $(0;\ 1{,}4)$ не входит в область определения функции $y = \operatorname{tg}(\pi x)$?

3. Найдите наименьшее значение функции $y = \sin x$ на промежутке $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

4. Укажите наибольшее целое число, не превосходящее $\cos 61°$.

5. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $2\cos(\pi - x) - \sqrt{3} = 0$. Ответ запишите в градусах.

6. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$, если $\operatorname{ctg} x = 15$, $\operatorname{ctg} y = -13$.

7. Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{15}{\sin x - 4}$.

8. Укажите число корней уравнения $\dfrac{\sin x}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = 0$.

9. Укажите наибольшее целое значение a, при котором уравнение $(a - 2)\sin x = a^2 - 4$ имеет хотя бы одно решение.

Запишите решение с полным его обоснованием.

10. Укажите корни уравнения $0{,}5\sin 2x \operatorname{ctg} x - \cos x = \sin^2 x$, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$.

Вариант 2

Ответом в заданиях этой группы может быть целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Дано: $\sin\beta = 0{,}8$ и $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Найдите $\cos\beta$.

2. Какое число из промежутка (0,4; 1,8) не входит в область определения функции $y = \mathrm{ctg}(\pi x)$?

3. Найдите наименьшее значение функции $y = \cos x$ на промежутке $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

4. Укажите наибольшее целое число, не превосходящее $\sin(-4°)$.

5. Укажите наименьший положительный корень уравнения $2\sin(\pi + x) - 1 = 0$. Ответ запишите в градусах.

6. Найдите значение выражения $\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$, если $\mathrm{tg}\, x = 19$, $\mathrm{tg}\, y = -17$.

7. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{15}{\sin x + 4}$.

8. Сколько корней имеет уравнение $\dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0$?

9. Укажите наименьшее целое значение a, при котором уравнение $(a + 4)\cos x = a^2 - 16$ имеет хотя бы одно решение.

Запишите решение с полным его обоснованием.

10. Укажите число корней уравнения $0{,}5\sin(2x)\mathrm{tg}\ x - \sin x = \cos^2 x$, принадлежащих промежутку $[-\pi; \pi]$.

2. АЛГЕБРА

2.1. Тождественные преобразования логарифмических выражений

Теоретические сведения

Определение. **Логарифмом числа b по основанию a** ($a > 0$; $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить b:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

$\lg b$ — обозначение десятичного логарифма, т.е. логарифма числа b по основанию 10, $\ln b$ — обозначение натурального логарифма, т.е. логарифма числа b по основанию e ($e \approx 2{,}7\ldots$).

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b \ (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0).$$

Свойства логарифмов ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$):

1) $\log_a a = 1$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

4) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

5) $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$

6) $\log_{a^q} b = \dfrac{1}{q} \cdot \log_a b$, $q \neq 0$

7) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$

$$8)\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a},\ b \neq 1$$

$$9)\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a},\ c \neq 1,\ b \neq 1$$

Решение типовых заданий

Задание 1. Найдите значение выражения $\log_{0,3}\dfrac{1}{0,09}$.

Решение.

Преобразуем выражение и используем определение логарифма:

$$\log_{0,3}(0,09)^{-1} = \log_{0,3}\left((0,3)^2\right)^{-1} = \log_{0,3}(0,3)^{-2} = -2.$$

Ответ: -2.

Задание 2. Найдите значение выражения $\log_2\log_2\sqrt[4]{2}$.

Решение.

Преобразуем выражение, начиная с внутреннего логарифма, и воспользуемся определением логарифма:

$$\log_2\log_2\sqrt[4]{2} = \log_2\log_2 2^{\frac{1}{4}} = \log_2\left(\frac{1}{4}\log_2 2\right) = \log_2\frac{1}{4} = -2.$$

Ответ: -2.

Для преобразования суммы (или разности) логарифмических выражений иногда достаточно использовать определение логарифма, а чаще свойства логарифма (3) и (4). Если основания логарифмов разные, то можно привести логарифмы к одному основанию и затем применить свойства (3) и (4).

Задание 3. Найдите значение выражения

$$\log_3 81 - \log_3 27.$$

Решение.

1-й способ. Используя определение логарифма, получим $\log_3 81 - \log_3 27 = 4 - 3 = 1$.

2-й способ. Используя свойство (4) логарифма, получим

$$\log_3 81 - \log_3 27 = \log_3 \frac{81}{27} = \log_3 3 = 1.$$

Ответ: 1.

Задание 4. Найдите значение выражения

$$\log_3 15 - \log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{81}.$$

Решение.

Преобразуем выражение с помощью свойства (4) логарифма:

$$\log_3 15 - \log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{81} = \log_3 \left(15 : \frac{5}{9}\right) + \log_3 \frac{1}{81} =$$

$$= \log_3 27 + \log_3 \frac{1}{81} = 3 + (-4) = -1.$$

Ответ: -1.

Основное логарифмическое тождество используется при преобразовании выражений, содержащих логарифм в показателе степени. Идея таких преобразований заключается в получении равных основания степени и основания логарифма.

Задание 5. Найдите значение выражения $10^{1-\lg 5}$.

Решение.

Используя свойства степеней и основное логарифмическое тождество, получим

$$10^{1-\lg 5}=\frac{10^1}{10^{\lg 5}}=\frac{10}{5}=2.$$

Ответ: 2.

Задание 6. Вычислите: $\sqrt{5}^{\log_5 16}$.

Решение.

Преобразуем выражение, используя свойства степеней:

$$\sqrt{5}^{\log_5 16}=5^{\frac{1}{2}\log_5 16}=\left(5^{\log_5 16}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя основное логарифмическое тождество, получим $\left(5^{\log_5 16}\right)^{\frac{1}{2}}=16^{\frac{1}{2}}=4.$

Ответ: 4.

Задание 7. Найдите значение выражения $7^{\log_{\frac{1}{49}}\frac{1}{4}}$.

Решение.

Используя свойство (6) логарифма и основное логарифмическое тождество, получим

$$7^{\log_{\frac{1}{49}}\frac{1}{4}}=7^{\log_{(7)^{-2}}\frac{1}{4}}=\left(7^{\log_7\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=2.$$

Ответ: 2.

Иногда можно легко перейти от одного основания логарифма к другому с помощью свойства логарифма (6), например от $\log_9 a$ к $0{,}5\log_3 a$, т. к. $(9=3^2)$. В других случаях следует использовать свойства (7) или (8).

Задание 8. Найдите значение выражения

$$\left(\log_5 36 + \log_5 2 - \log_5 8\right) \cdot \log_9 \frac{1}{25}.$$

Решение.

Преобразовав выражение в скобках с помощью свойств (3) и (4), получим

$$\left(\log_5 36 + \log_5 2 - \log_5 8\right) = \log_5 \frac{36 \cdot 2}{8} = \log_5 9.$$

Используем формулу (7) перехода к новому основанию.

1-й способ.

$$\log_5 9 \cdot \log_9 \frac{1}{25} = \log_5 9 \cdot \frac{\log_5 \frac{1}{25}}{\log_5 9} = \log_5 \frac{1}{25} = -2.$$

2-й способ.

$$\log_5 9 \cdot \log_9 \frac{1}{25} = \frac{\log_9 9}{\log_9 5} \cdot \log_9 \frac{1}{25} = \frac{1 \cdot \log_9 \frac{1}{25}}{\log_9 5} = \log_5 \frac{1}{25} = -2.$$

3-й способ. Используя свойство (5), получим

$$\log_5 9 \cdot \log_9 \frac{1}{25} = \log_5 9 \cdot (-2) \log_9 5 = -2.$$

Ответ: -2.

Задание 9. Найдите значение выражения

$$\log_3 12 - \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4.$$

Решение.

Преобразуем вычитаемое с помощью применения дважды формулы перехода к новому основанию:

$$\log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 = \log_3 7 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 7} \cdot \log_5 4 =$$

$$= \log_3 5 \cdot \log_5 4 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 4}{\log_3 5} = \log_3 4.$$

Первоначальное выражение теперь имеет вид

$$\log_3 12 - \log_3 4 = \log_3 \frac{12}{4} = 1.$$

Ответ: 1.

В заданиях, требующих выразить некоторое логарифмическое выражение через одно или два заданных значения логарифма, обычно надо использовать свойства логарифма произведения или частного (3) и свойство (8) перехода к новому основанию.

Задание 10. Чему равен lg 15, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.
Решение.
Выразим lg 15 через lg 2 и lg 3, учитывая, что

$$15 = 3 \cdot 5 = 3\left(\frac{10}{2}\right).$$

$$\lg 15 = \lg(3 \cdot 5) = \lg 3 + \lg 5 = \lg 3 + \lg\left(\frac{10}{2}\right) =$$
$$= \lg 3 + \lg 10 - \lg 2 = b + 1 - a.$$

Ответ: $b + 1 - a$.

Наибольшую сложность представляют преобразования логарифмических выражений, находящихся под радикалом. В процессе преобразований приходится рассматривать модули логарифмических выражений, для раскрытия которых требуется сравнить иррациональные числа (например, $\log_2 3$ и $\log_3 2$) или рациональное и иррациональное числа (например, $\log_2 3$ и 1).

Задание 11. Представьте в виде разности логарифмов

$$\left(\left(\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2\right)^{\frac{1}{2}} - 2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Решение.
Будем действовать последовательно. Рассмотрим выражение $\log_3^4 2 + \log_2^4 3 + 2$. Перейдем к основанию 3:

$$\log_3^4 2+\log_2^4 3+2=\log_3^4 2+\frac{1}{\log_3^4 2}+2.$$

Приведем к общему знаменателю и применим формулу квадрата суммы двух выражений. Получим: $\left(\dfrac{\log_3^4 2+1}{\log_3^2 2}\right)^2$.

Имеем: $\left(\log_3^4 2+\log_2^4 3+2\right)^{0,5}=\dfrac{\log_3^4 2+1}{\log_3^2 2}$.

Тогда:

$$\left(\log_3^4 2+\log_2^4 3+2\right)^{0,5}-2=\frac{\log_3^4 2+1-2\log_3^2 2}{\log_3^2 2}=\left(\frac{\log_3^2 2-1}{\log_3 2}\right)^2.$$

Окончательно получаем:

$$\left(\left(\log_3^4 2+\log_2^4 3+2\right)^{0,5}-2\right)^{0,5}=\left|\frac{\log_3^2 2-1}{\log_3 2}\right|.$$

Раскрываем модули, учитывая, что $0<\log_3 2<1$ и $0<\log_3^2 2<1$,

$$A=\frac{1-\log_3^2 2}{\log_3 2}=\frac{1}{\log_3 2}-\log_3 2=\log_2 3-\log_3 2.$$

Ответ: $\log_2 3-\log_3 2$.

Задания для самостоятельного решения

Дайте краткий ответ. Для каждого из заданий ответом может являться целое число или число, записанное в виде десятичной дроби.

1. Вычислите: $\log_{0,3}\dfrac{1}{0,09}$.

2. Вычислите: $\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$.

3. Вычислите: $\log_{625} 25$.

4. Вычислите: $\log_5 125$.

5. Вычислите: $\log_6 8 - \log_6 2 + \log_6 9$.

6. Вычислите: $\log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \frac{25}{4}$.

7. Найдите значение выражения $\log_3 81 - \log_3 27$.

8. Найдите значение выражения

$$\log_3 15 - \log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{81}.$$

9. Вычислите: $\log_{35} 7 + \frac{1}{\log_5 35}$.

10. Укажите значение выражения $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7} + 3^{\log_3 7}$.

11. Укажите значение выражения $\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{7} + 3^{\log_{\sqrt{3}} 7}$.

12. Укажите значение выражения $\log_{36} 16 - \log_6 \frac{1}{9}$.

13. Вычислите: $\left(\sqrt{5}\right)^{\log_5 16}$.

14. Вычислите: $2^{\log_{\sqrt{2}} 3}$.

15. Найдите значение выражения $10^{1-\lg 5}$.

16. Укажите значение выражения $\left(\sqrt{6}\right)^{\frac{2}{\log_9 6}}$.

17. Найдите значение выражения

$$\left(\log_5 36+\log_5 2-\log_5 8\right)\cdot\log_9 \frac{1}{25}.$$

18. Найдите значение выражения

$$\log_3 12-\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4.$$

19. Укажите значение выражения $\left(\frac{1}{3}\right)^{4\log_{\frac{1}{3}} 2}$.

20. Укажите значение выражения $\log_8 \log_4 \log_2 16$.

21. Укажите значение выражения $\log_2 \frac{2}{3}+\log_4 \frac{9}{4}$.

22. Укажите значение выражения $\log_{0,5} 32-\log_7 \frac{\sqrt{7}}{49}$.

23. Укажите значение выражения $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

24. Укажите значение выражения

$$2^{\log_8 125}+\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}.$$

25. Укажите значение выражения $\frac{\lg 128}{\lg 4}$.

26. Укажите значение выражения $\log_6 \frac{36}{a}$, если $\log_6 a = -6$.

27. Найдите значение выражения $\log_c\left(16c^2\right)$, если $\log_c 2 = -3$.

28. Найдите значение выражения $\log_a \frac{81}{a^4}$, если $\log_a 3 = 2$.

29. Найдите значение выражения

$$(0{,}1)^{\lg 0{,}1} - 10^{\log_{1000} 64} + 10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2}.$$

30. Найдите значение выражения

$$3\log_2 49 \cdot \log_7 2 - 2^{\lg 2} \cdot 5^{\lg 2}.$$

31. Найдите значение выражения

$$4\sqrt{3} + 5^{\log_5 \frac{3}{5}} - 15^{0{,}5 + \log_{15} \frac{4}{\sqrt{5}}}.$$

32. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 4 + \log_2 \sqrt{10}}{\log_2 20 + 3\log_2 2}$.

33. Найдите значение выражения

$$\log_9 15 + \log_9 18 - 2\log_9 \sqrt{10}.$$

34. Найдите значение выражения

$$6\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7.$$

35. Найдите значение выражения

$$\log_2 14 - \log_2 5 \cdot \log_5 3 \cdot \log_3 7.$$

36. Найдите значение выражения

$$\left(\log_3 4 + \log_2 9\right)^2 - \left(\log_3 4 - \log_2 9\right)^2.$$

37. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$.

38. Найдите значение выражения

$$\log_4 24-\log_4 9\cdot\log_9 13\cdot\log_{13} 6.$$

39. Найдите значение выражения

$$(\log_7 22-\log_7 12+\log_7 6)\cdot\log_{11} 7.$$

40. Найдите значение выражения $3^{\log_5 7}-7^{\log_5 3}$.

41. Найдите значение выражения $9^{\log_3(1+0,5+0,25+\ldots)}$.

42. Упростите: $6^{-0,5+\log_6\frac{\sqrt{3}}{2}}-2^{-0,5+\log_2 0,5}$.

43. Упростите: $\dfrac{1-\lg^2 5}{2\lg\sqrt{10}-\lg 5}-\lg 5$.

2.2. Логарифмические уравнения и неравенства

Теоретические сведения

$\log_a x = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Область определения (ООУ) этого уравнения $x = a^b > 0$.

$\log_a f(x) = b$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Область определения этого уравнения $f(x) > 0$. На этой области уравнение может иметь любое количество корней, в зависимости от функции $f(x)$.

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Область определения этого уравнения задается системой $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

На этой области уравнение имеет корни, которые можно найти, решая уравнение $f(x) = g(x)$.

При решении логарифмических уравнений используются тождественные преобразования логарифмических выражений (см. Раздел 1.1). Кроме тождеств, при