*Моим коллегам и студентам*

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Предисловие к русскому переводу

I am pleased that the Russian edition of my book «Differentiable Dynamical Systems» is coming up. I thank Prof. Malkin and Dr. Safonov for their wonderful work of translation, and thank Prof. Pochinka for launching this project. I hope the Russian reader would like it. I took the Russian language class when I was a high school student. Today I can still sing in Russian a few songs like «Moscow nights». I am glad my book could go beyond the border to reach the homeland of such beautiful songs.

*Lan Wen*

Мне очень приятно, что моя книга «Differentiable Dynamical Systems» выходит на русском языке. Я благодарен проф. Малкину и Сафонову за их замечательную работу по переводу, а также проф. Починке, координировавшей этот проект. Я надеюсь, что русскому читателю книга понравится. Я учился русскому языку в старших классах школы. Сегодня я все еще могу спеть по-русски несколько песен, например «Подмосковные вечера». Я рад, что моя книга, не зная границ, попадет на родину таких прекрасных песен!

*Лан Вен*

Проект по переводу книги Лан Вена «Differentiable Dynamical Systems» был инициирован в 2018 г. нашим молодым коллегой Женей Куренковым, в то время аспирантом первого года обучения. Когда, годом ранее, он познакомился с монографией Лан Вена на английском, она ему очень понравилась и он мог часами пересказывать ее содержание студентам, коллегам, преподавателям.

В 2019 г. Жени не стало... Книгу, увы, перевели без его участия. Замечательный результат проекта вы держите в руках благодаря Михаилу Иосифовичу Малкину, редактору перевода, и Климу Сафонову: они взяли на себя этот нелегкий труд. Перечитывая главы получившийся книги, я вспоминаю Женю, вдохновенно доносящего до слушателей содержание этих глав, вспоминаю даже его интонации во время изложения на наших семинарах. Видя его увлеченность в то время этим материалом, я написала письмо Шаобо Гану, ученику Лан Вена, с просьбой прислать экземпляр книги в подарок на день рождения Жени. Спасибо китайским коллегам, они выполнили просьбу. Нужно было видеть неподдельное счастье на лице Жени, когда мы вручили ему подарок, собственноручно подписанный Лан Веном! Думаю, это был один из самых дорогих для него подарков в его столь рано оборвавшейся жизни. Но для меня Женя навсегда останется жить между строк этой книги.

Координатор проекта по переводу книги,
заведующая международной лабораторией
динамических систем и приложений
*О.В. Починка*

# Предисловие

Истоки теории динамических систем восходят к качественной теории дифференциальных уравнений, созданной Пуанкаре в конце девятнадцатого века. Дифференцируемые динамические системы — это та часть теории динамических систем, которая включает структурную устойчивость, гиперболичность, типичность, плотность и т.п. Эти разделы теории стали активно развиваться с 60-х гг. двадцатого века. Имеется обзорная и в то же время обучающая статья одного из основателей этой теории — С. Смейла (Smale, 1967) (см. также его статью 1980 г.).

Данная книга является учебником по дифференцируемым динамическим системам, она предназначена для старшекурсников и аспирантов. Основное внимание уделяется структурной устойчивости и гиперболичности, которые занимают центральное место в этой области. Для простоты мы рассматриваем дискретные динамические системы, образованные итерациями диффеоморфизмов. Хорошо известно, что периодическая орбита структурно устойчива тогда и только тогда, когда она гиперболическая (собственные значения по модулю не равны единице). То же справедливо и для конечного числа периодических орбит. Долгое время были большие сомнения в том, что динамическая система с бесконечным множеством периодических орбит может быть структурно устойчивой. Эпохальным открытием такой системы в начале 1960-х гг. было построение отображения с подковой Смейла. Это структурно устойчивая система с бесконечным множеством периодических орбит. Вместе со знаменитым автоморфизмом Аносова и построенным вскоре соленоидальным аттрактором эти системы продемонстрировали удивительное свойство мироздания: структурная устойчивость может сочетаться с высоким уровнем сложности (иногда говорят, хаосом). Аналитическое условие, обеспечивающее структурную устойчивость такого хаотического множества, сейчас обоснованно называют «гиперболичностью». Это привело к появлению новой теории *гиперболических множеств*, в которой гиперболические периодические орбиты являются частным случаем. Теорема Смейла об $\Omega$-устойчивости явилась одним из первых глобальных результатов гиперболической теории, она послужила толчком к ее развитию. Этой линии развития гиперболической теории мы будем придерживаться в данной книге.

Книга состоит из шести глав. В главе 1 вводятся некоторые основные понятия теории динамических систем, такие как предельное множество, неблуждающее множество, минимальное множество, транзитивное множество и т.д., а также определяется топологическая сопряженность и структурная устойчивость. Мы приводим краткое изложение классической теории гомеоморфизмов окружности, поскольку в ней наглядно иллюстрируются введенные понятия. Мы также включили в эту главу теорему Конли — фундаментальную теорему теории динамических систем.

Глава 2 посвящена гиперболичности, которая является основным понятием книги. Здесь рассматривается случай отдельной неподвижной точки. Мы изучаем устойчивость гиперболической неподвижной точки к возмущениям, теорему Гробмана–Хартмана, теорему об устойчивом многообразии и др. Этот материал является классическим, но при его изложении мы имеем в виду, что он должен подготовить читателя к пониманию гиперболичности в общем случае, который будет рассмотрен в гл. 4.

В главе 3 представлены три исторические модели: подкова Смейла, аносовский автоморфизм тора и соленоидальный аттрактор, — базовые модели в современной теории дифференцируемых динамических систем.

В главе 4 понятие гиперболичности отдельной неподвижной точки обобщается на случай любого компактного инвариантного множества. Мы изучаем устойчивость гиперболичности и структурную устойчивость, доказываем теорему об устойчивом многообразии, рассматриваем свойство отслеживания для гиперболических множеств. В этой главе разрабатывается аналитический аппарат теории структурной устойчивости, и поэтому с технической точки зрения эта глава является самой сложной частью книги. Если при ее чтении возникают трудности, то читателю рекомендуется вернуться к соответствующим местам гл. 2, которая более доступна и наглядна.

В главе 5 представлена одна из важнейших идей всей теории, которую можно выразить так: гиперболичность влечет структурную устойчивость. Зерном этой идеи является теорема Смейла об $\Omega$-устойчивости. Мы также приводим некоторые эквивалентные описания Ньюхауса и Франке–Селгрейда.

В главе 6 представлена теория квазигиперболичности и линейной трансверсальности. Она помогает взглянуть на гиперболичность под другим углом. Мы также включили в эту главу раздел, в котором бегло освещаются гипотезы, связанные с устойчивостью.

В книге встречается довольно сложный материал, особенно теорема об устойчивом многообразии (теорема 4.16) и теорема о структурной устойчивости (теорема 4.21) для гиперболических множеств. Эти две большие теоремы вызывают обычно трудности при изучении предмета и в его преподавании. Здесь в общем случае произвольного гиперболического множества мы выбрали стратегию доказательств, которая прослеживает аналогии (копии) соответствующих доказательств для гиперболической неподвижной точки. Хорошим примером такой стратегии является доказательство леммы 4.5, которое почти полностью дублирует доказательство леммы 2.9. Читатели могут потратить несколько минут, чтобы просто формально сравнить эти доказательства. Используя данную стратегию, мы смогли дать довольно простые доказательства этих теорем. Автор считает: в отличие от искусства или литературы, в математике не нужно избегать повторений и аналогий; более того, часто таким образом различные явления раскрывают единую природу, хотя имеют непохожую оболочку. Без сомнения, теория гиперболических множеств сложна для усвоения, но мы надеемся, что предложенный нами путь поможет читателю преодолеть препятствия и добраться до самой сути теории динамических систем.

Для чтения этой книги достаточно, по существу, знания традиционного курса анализа, линейной алгебры и основ топологии. Кроме того, полезно знание некоторых основных понятий теории дифференцируемых многообразий, например таких, как касательные расслоения и касательные отображения, подмногообразия, риманова метрика, экспоненциальное отображение. Мы приводим определения менее известных, но необходимых понятий. Для облегчения понимания в книге имеются многочисленные рисунки.

В конце книги приводится список литературы по динамическим системам. Особо я хочу отметить две большие монографии — Катка и Хасселблата (Katok, Hasselblatt, 1995) и Робинсона (Robinson, 1995), в которых представлен панорамный обзор современного состояния теории динамических систем. Многие книги из этого списка я часто использовал в своей работе. Особенно я благодарен книге Занга (Zhang, 1986), которой пользовался как учебником, когда читал курс в Пекинском университете.

Эта книга небольшая, и поэтому, возможно, я сослался не на всех авторов, результаты которых имеют отношение к изложенному. Отмечу, что очень полезной для меня при написании книги была монография Робинсона (Robinson, 1995).

Я несколько раз в семестровом курсе в Пекинском университете рассказывал основную часть материала из первых пяти глав книги. Я также читал подобный курс в Тайваньском университете (весна 2003 г.) и в Университете Providence Тайваня (осень 2004 г.). Часть материала я рассказывал в виде краткого курса в Университете Нанкай (1989), в Университете Сунь Ятсен (1990), в Университете Фучжоу (1995), в Университете Наньцзин (1998), в Национальном центре теоретических наук, Тайвань (1999), в Научно-техническом университете Китая (2001), в Цзилиньском университете (2007), в Университете Чао Тунг Тайваня (2011), в Университете Чуннам в Корее (2014). Я хотел бы воспользоваться возможностью поблагодарить слушателей всех этих курсов. В частности, я хочу выразить благодарность Шаобо Ган за многолетнее сотрудничество и многочисленные обсуждения, а также за тщательную проверку рукописи всей книги. Я благодарю Сяо Вэнь и Давэй Ян за отличные рисунки и за большое число упражнений, а Сяо Вэнь — за обсуждение той части теоремы об устойчивом многообразии, которая касается гладкости $C^k$. И в заключение я благодарю Вэньсян Сан и участников нашего семинара за плодотворные беседы и обсуждения на протяжении многих лет.

Глава 1

# ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Если рассуждать неформально, то динамическую систему можно рассматривать как некий абстрактный поток или движение точек во времени. Движение отдельных точек образует орбиты (в случае потока чаще говорят — траектории. — *Примеч. ред.*). Классическим примером динамической системы является поток, определяемый обыкновенным дифференциальным уравнением (или векторным полем). Предполагается, в силу определения потока, что любое решение задано на всей оси времени $(-\infty, \infty)$, так что точки не убегают из фазового пространства. Самый специфический и простой случай орбиты — это орбита, состоящая из одной точки, которая называется особенностью векторного поля [1]. Состоянием равновесия могут быть, например: сток, источник или седло. Если близкие точки экспоненциально приближаются к состоянию равновесия или удаляются от него, то оно называется гиперболическим. Следующий тип специальной орбиты — это периодическая орбита. Если близкие к ней точки экспоненциально приближаются или удаляются, то периодическая орбита также будет называться гиперболической.

Каждая научная дисциплина имеет множество интересных историй. В 1962 г. Пейшото, по совету Лефшеца, возродил интерес к основополагающей работе Андронова и Понтрягина (Andronov, Pontryagin, 1937) о структурно устойчивых векторных полях на двумерном диске и доказал такую теорему: векторное поле на ориентируемой замкнутой поверхности структурно устойчи-

[1] Другие названия: состояние равновесия (наиболее распространенное название в русскоязычной литературе), состояние покоя, особая точка, неподвижная точка. — *Примеч. ред.*

во тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим трем условиям: 1) у него конечное число состояний равновесия и периодических орбит, все они гиперболические; 2) каждая точка стремится как в положительном, так и в отрицательном направлении к состоянию равновесия или периодической орбите; 3) отсутствуют седловые связки[2]. Более того, структурно устойчивые поля плотны в пространстве всех векторных полей.

По определению векторное поле называется *структурно устойчивым*, если все близкие векторные поля имеют топологически эквивалентные орбитные структуры. С любой точки зрения структурная устойчивость является понятием огромной важности. Однако оно довольно абстрактно: в его определении участвуют все близкие векторные поля, а это затрудняет работу с ним. В отличие от определения, в теореме Пейшото речь идет только о данном векторном поле в терминах лишь его состояний равновесия и периодических орбит. Эта замечательная глобальная теорема сразу же привлекла к себе внимание, в том числе внимание молодого математика С. Смейла. Через несколько лет в статье «О том, как я начал заниматься динамическими системами», опубликованной в издании «Математики своего времени» (Smale S. The Mathematics of Time. 1980), Смейл так описал историю своих исследований.

Читая работу Пейшото, Смейл сначала подумал, что аналогичный результат можно доказать и в более высокой размерности. Однако Левинсон написал ему, что вряд ли стоит надеяться на такой результат в общем случае. Левинсон (Levinson, 1949) привел трехмерный пример с бесконечным множеством периодических орбит, которые не исчезали при возмущениях. С некоторым недоверием к этому результату Смейл провел много времени (как он пишет, на пляже в Рио с ручкой и блокнотом), изучая работу Левинсона, и в конце концов изменил свое мнение. Фактически Смейл придумал следующий геометрический механизм, лежащий в основе аналитических результатов Левинсона и Картрайта и Литтлвуда (Cartwright, Littlewood, 1945).

На рис. 1.1 изображена площадка $Q$, трансверсальная направлению потока. Под действием этого потока площадка ста-

[2] То есть траектории, идущие из седла в седло. — *Примеч. ред.*

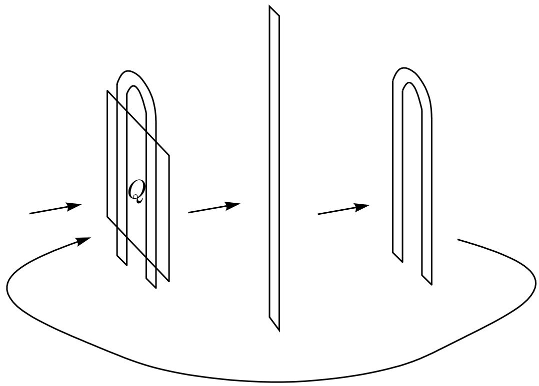


**Рис. 1.1.** Ключевой механизм в трехмерном потоке

новится все более длинной и узкой, при этом сгибаясь в форме подковы, и затем возвращается обратно, пересекая $Q$. (Здесь мы сократили описанную историю; детали см. в статье Смейла (Smale, 1980).) Смейл понял, что именно такой простой механизм является причиной постоянного присутствия бесконечного множества периодических орбит. Чтобы прояснить ситуацию, он перешел от трехмерного потока к двумерному отображению. Другими словами, он рассмотрел отображение так называемого «первого возвращения» $f : Q \to R^2$, см. рис. 1.2.

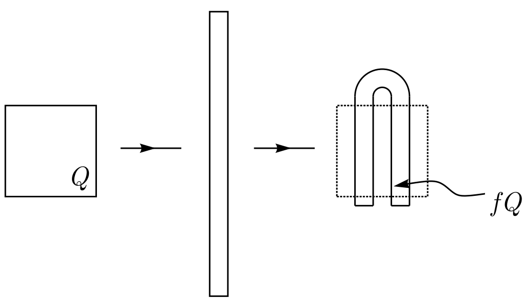


**Рис. 1.2.** Двумерная подкова Смейла

Тогда неподвижная точка отображения $f$ будет соответствовать периодической траектории потока. Периодическая точка отображения $f$ также соответствует периодической траектории потока, но совершающей при этом несколько оборотов. Смейл доказал, что $f$ имеет бесконечное множество периодических точек, которые не исчезают при возмущениях. Это означает, что теорема Пейшото не выполняется в более высоких размерностях. Оказывается, что структурная устойчивость в больших размерностях может сосуществовать с высоким уровнем сложности (который иногда называют хаосом). Этот феномен стал неким символом современной теории дифференцируемых динамических систем. Отображение подковы мы будем изучать в гл. 3.

Вскоре Смейл понял, что обнаруженное явление уходит своими корнями к удивительному гомоклиническому феномену, открытому Пуанкаре в его исследованиях по небесной механике, а также имеет отношение к работе Биркгофа о диффеоморфизмах поверхностей. Основываясь на отображении подковы и появившейся вскоре важной работе Аносова (Anosov, 1967), Смейл пришел к понятию гиперболического множества, включающего (как частный случай) гиперболическую периодическую орбиту, а *гипотеза об устойчивости*, сформулированная им совместно с Палисом (Palis, 1970) в качестве аналога критерия Пейшото, дала толчок ко многим важным работам и расцвету теории дифференцируемых динамических систем.

Что касается проблемы плотности структурно устойчивых систем, то здесь ситуация оказалась несколько иной. Начиная со Смейла (Smale, 1966) многие авторы один за другим приходили к выводу, что в больших размерностях структурно устойчивые системы вообще не плотны. Другими словами, в пространстве всех систем существуют открытые области, подобные «странным дырам», где любая система не является структурно устойчивой. Бонатти и Диаз (Bonatti, Diaz, 2003) обнаружили даже дыру $\mathcal{U}$ с универсальной динамикой в том смысле, что (в отличие от ситуации с единственностью динамики вблизи структурно устойчивой системы) около любой системы из $\mathcal{U}$, с точностью до соответствующей итерации, может встретиться любая динамика! Динамические системы, кажется, созданы для того, чтобы удивлять нас! В 90-х гг. прошлого столетия Палис предложил ряд гипотез для выяснения общих особенностей динамики в дырах (см. Палис (Palis, 2000, 2005)) и, в частности, выдвинул *гипотезу о плотности*, утверждающую, что в дырах плотны системы со специфической неустойчивой динамикой, а именно, с гомоклиническими бифуркациями. Эти гипотезы вызвали появление большого числа замечательных работ. Так тайны природы, чудеса природы раскрываются шаг за шагом исследователями разных эпох…

Эта книга представляет собой первую (но в то же время базовую) часть этой замечательной области знаний. Для простоты мы рассматриваем системы с дискретным временем, то есть итерации диффеоморфизмов.

## 1.1. Основные понятия

Пусть $X$ — компактное метрическое пространство и $f : X \to X$ — гомеоморфизм. Он порождает семейство гомеоморфизмов, называемых *итерациями* $f$, которые записываются в виде[3]

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}, \quad f^0 = id, \quad f^{-n} = (f^n)^{-1}.$$

Очевидно, что

$$f^n \circ f^m = f^{n+m}$$

для любых целых чисел $n$ и $m$. Мы называем семейство $\{f^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (дискретной) *динамической системой*. Для простоты изложения динамической системой мы называем и сам гомеоморфизм $f$.

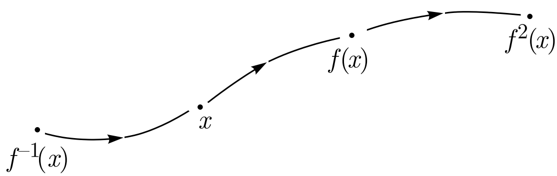


**Рис. 1.3.** Орбита

Для любой точки $x \in X$ множество $\{f^n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ называется *орбитой* $x$ относительно $f$. Обозначается: орбита $\mathrm{Orb}(x, f)$ или просто $\mathrm{Orb}(x)$, см. рис. 1.3. Любые две орбиты либо

[3] Большинство понятий и результатов данного раздела имеют место и в случае непрерывного отображения $f$, только в этом случае итерации рассматриваются с неотрицательным целым «временем» $n$. Замечание относительно обозначений в книге: итерации точки $x$ обозначаются как $f^n(x)$, так и $f^n x$; аналогично, обозначения $f^n(M)$ и $f^n M$ применяются для итераций множества $M$. — *Примеч. ред.*

совпадают, либо не пересекаются. Множества $\{x, fx, f^2x, \ldots\}$ и $\{x, f^{-1}x, f^{-2}x, \ldots\}$ называются *положительной* и *отрицательной* орбитами точки $x$ соответственно и обозначаются $\mathrm{Orb}^+(x)$ и $\mathrm{Orb}^-(x)$ . Точка $x \in X$ называется *периодической*, если существует $n \geqslant 1$ такое, что $f^n(x) = x$. Минимальное положительное целое число $n$, удовлетворяющее этому равенству, называется *периодом* точки $x$. Орбита периодической точки называется *периодической орбитой*. Периодические точки периода 1 являются неподвижными точками. Легко видеть, что точка $x \in X$ периодическая тогда и только тогда, когда $\mathrm{Orb}(x)$ состоит из конечного числа точек. Обозначим множество периодических точек гомеоморфизма $f$ через $\mathrm{P}(f)$, а множество его неподвижных точек — через $\mathrm{Fix}(f)$.

Множество $\Lambda \subset X$ называется *инвариантным* относительно $f$, если $f(\Lambda) = \Lambda$. Любая орбита является инвариантным множеством. Множество $\Lambda$ инвариантно тогда и только тогда, когда $\Lambda$ есть объединение орбит.

**Теорема 1.1.** *Если множество $\Lambda$ инвариантно, то его замыкание $\overline{\Lambda}$, граница $\partial(\Lambda)$ и внутренность $int(\Lambda)$ также инвариантны.*

**Доказательство.** Поскольку $f$ — гомеоморфизм, то $f(\overline{\Lambda}) = \overline{f(\Lambda)} = \overline{\Lambda}$. Доказательство для двух других множеств аналогично. □

Множество $\mathrm{Fix}(f)$ неподвижных точек компактно и инвариантно, но может оказаться пустым. Множество $\mathrm{P}(f)$ периодических точек тоже инвариантно и может быть пустым, а может оказаться и непустым, но некомпактным.

Теперь мы определим другие инвариантные множества. Для данной точки $x \in X$ положительная орбита $x, fx, f^2x, \ldots$, вообще говоря, не образует сходящуюся последовательность (а если образует, то предел должен быть неподвижной точкой). Тем не менее у нее есть много сходящихся подпоследовательностей. Точка $y \in X$ называется *$\omega$-предельной* для $x \in X$, если существует подпоследовательность $n_i \to +\infty$ натуральных чисел такая, что $f^{n_i}(x) \to y$. Множество $\omega$-предельных точек называется *$\omega$-предельным множеством* точки $x$ и обозначается $\omega(x)$, см. рис. 1.4. Обратив время, получим определение *$\alpha$-предельного множества* точки $x$, т.е. точка $y \in X$ называется *$\alpha$-предельной* для $x$, если существует подпоследовательность $n_i \to +\infty$ натуральных чисел такая, что $f^{-n_i}(x) \to y$. Множество $\alpha$-предельных точек для $x$ называется *$\alpha$-предельным множеством* точки $x$ и обозначается через $\alpha(x)$. Очевидно, что $\alpha(x) = \alpha(x, f) = \omega(x, f^{-1})$. Обычно мы формулируем результаты только для $\omega(x)$. Заметим, что если $x \in \mathrm{P}(f)$, то

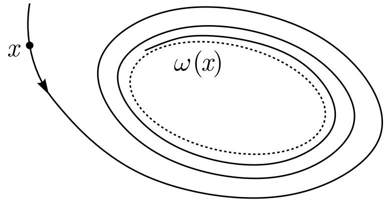

**Рис. 1.4.** $\omega$-предельное множество

$$\omega(x) = \alpha(x) = \mathrm{Orb}(x).$$

**Теорема 1.2.** *Для любой точки $x \in X$ множество $\omega(x)$ непусто, компактно и инвариантно. Более того,*

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), \omega(x)) = 0.$$

**Доказательство.** Поскольку $X$ компактно, то $\omega(x)$ непусто и компактно. Возьмем $y \in \omega(x)$. Существует подпоследовательность $n_i \to +\infty$ такая, что $f^{n_i}(x) \to y$. Тогда $f^{n_i+1}(x) \to f(y)$, следовательно, $f(y) \in \omega(x)$. Таким образом, $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$. Аналогично, $f^{n_i-1}(x) \to f^{-1}(y)$ и поэтому $f^{-1}(\omega(x)) \subset \omega(x)$. Тогда $f(\omega(x)) \supset \omega(x)$. Это доказывает инвариантность $\omega(x)$.

Теперь предположим (от противного) что равенство

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), \omega(x)) = 0$$

не выполняется. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательность $n_i \to +\infty$ такие, что $\mathrm{d}(f^{n_i}(x), \omega(x)) \geqslant \varepsilon_0$ для всех $i$. Перейдя к подпоследовательности $n_{i_k}$, получим $f^{n_{i_k}}(x) \to z \notin \omega(x)$ — противоречие. $\square$

Когда говорят о поведении динамической системы, обычно имеют в виду предельное поведение орбит, описываемое множеством

$$\mathrm{L}(f) = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x) \cup \alpha(x)},$$

которое называется *предельным множеством* гомеоморфизма $f$. Оно непусто, компактно и инвариантно.

Кроме того, изучение поведения динамической системы подразумевает рассмотрение орбит с некоторым свойством возвращаемости (рекуррентности). У периодической орбиты самая сильная возвращаемость. Мы приведем несколько понятий возвращаемости, каждое из которых слабее предыдущего. Точка $x \in X$ называется *положительно рекуррентной*, если $x \in \omega(x)$. Другими словами, точка $x \in X$ является положительно рекуррентной, если она лежит в собственном $\omega$-предельном множестве. Аналогично, точка $x \in X$ называется *отрицательно рекуррентной*, если $x \in \alpha(x)$. Положительно или отрицательно рекуррентная точка называется *рекуррентной*. Обозначим через $R(f)$ множество рекуррентных точек гомеоморфизма $f$. Оно непусто, инвариантно, но может оказаться некомпактным (упражнение 1.6).

Более слабым свойством возвращаемости является неблуждаемость. Точка $x \in X$ называется *неблуждающей* относительно $f$, если для любой окрестности $V$ точки $x$ существует $n \geqslant 1$ такое, что $f^n(V) \cap V \neq \varnothing$. Другими словами, в любой окрестности $V$ точки $x$ найдется точка $y$, орбита которой пересекает $V$, по меньшей мере, дважды, см. рис. 1.5. Объединение неблуждающих точек образует *неблуждающее множество*, которое обозначается $\Omega(f)$. Очевидно, что $\Omega(f)$ непусто, компактно и инвариантно.

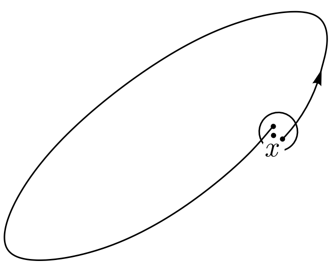


**Рис. 1.5.** Неблуждающая точка $x$

Наконец, дадим определение еще более слабой возвращаемости. Под *$\varepsilon$-цепью от $x$ до $y$* понимается конечная последовательность $x_0, x_1, \cdots, x_k$, у которой $x_0 = x, x_k = y$ и

$$d(f(x_n),\ x_{n+1}) < \varepsilon$$

для $n = 0, 1, \cdots, k-1$. Если $x = y$, то $\varepsilon$-цепь называется *периодической*. Точка $x \in X$ называется *цепно-рекуррентной* относительно $f$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon$-цепь от $x$ до $x$, т.е. существует периодическая $\varepsilon$-цепь, проходящая через $x$. Множество цепно-рекуррентных точек называется *цепно-рекуррентным множеством* $f$ и обозначается $\mathrm{CR}(f)$. Конечно, цепная рекуррентность является самым слабым типом возвращаемости (см. замечание после леммы 1.15).

Условие цепной рекурентности не жесткое (см. упражнения в конце этой главы): на самом деле точка $x \in X$ является цепно-рекуррентной тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует периодическая $\varepsilon$-цепь, проходящая через $\varepsilon$-окрестность точки $x$ (упражнение 1.9). Легко видеть, что множество $\mathrm{CR}(f)$ компактно, инвариантно и

$$\overline{\mathrm{P}(f)} \subset \mathrm{L}(f) \subset \Omega(f) \subset \mathrm{CR}(f).$$

Непустое компактное инвариантное множество можно рассматривать как динамическую систему, ограниченную на этом множестве. Множество $\Lambda \subset X$ называется *минимальным*, если $\Lambda$ непусто, компактно и инвариантно, но не содержит собственных непустых, компактных и инвариантных подмножеств[4]. Периодическая орбита очевидным образом является минимальным множеством. В то время как некоторые динамические системы могут не иметь периодических орбит, согласно следующей теореме минимальные множества всегда существуют. При доказательстве нам потребуется лемма Цорна, которую мы сейчас напомним читателю.

Рассмотрим множество $S$ с бинарным отношением $\prec$, определенным для некоторых пар элементов из $S$. Мы говорим, что $\prec$ является отношением *частичного порядка*, если: (1) $x \prec x$ для каждого $x \in S$; (2) из $x \prec y$ и $y \prec x$ следует $x = y$; (3) из $x \prec y$ и $y \prec z$ следует $x \prec z$. Подчеркнем, что некоторые пары $(x, y)$ элементов из $S$ могут быть несравнимы, т.е. может не выполняться ни $x \prec y$, ни $y \prec x$. Типичным примером отношения частичного порядка является хорошо знакомое включение $\subset$ для множеств. Подмножество $A$ из $S$ называется *вполне упорядоченным* (относительно $\prec$), если для каждой пары $(x, y)$ элементов из $A$ имеет место либо $x \prec y$, либо $y \prec x$.

Элемент $z \in S$ называется *минимальным*, если для каждого $x \in S$ либо $z$ и $x$ несравнимы, либо $z \prec x$. Пусть $z \in S$ и $A \subset S$.

[4] В случае когда фазовое пространство некомпактно, в определении минимального множества условие компактности заменяется условием замкнутости. — *Примеч. ред.*

Мы говорим, что $z$ является *нижней границей* $A$, если $z \prec x$ для каждого $x \in A$. Лемма Цорна утверждает, что если любое вполне упорядоченное подмножество $A$ из $S$ имеет нижнюю границу, то в $S$ есть минимальный элемент.

**Теорема 1.3.** *Любое непустое компактное инвариантное множество содержит минимальное подмножество.*

**Доказательство.** Пусть $\Gamma$ — непустое компактное $f$-инвариантное множество и $\mathcal{C}$ — семейство непустых компактных $f$-инвариантных подмножеств, содержащихся в $\Gamma$. Включение $\subset$ является отношением частичного порядка на $\mathcal{C}$. Пусть $\mathcal{A}$ — вполне упорядоченное подмножество в $\mathcal{C}$ и $A$ — пересечение всех множеств из $\mathcal{A}$. Тогда $A$ является непустым компактным $f$-инвариантным множеством. Очевидно, что $A$ будет нижней границей в $\mathcal{A}$. Согласно лемме Цорна в $\mathcal{C}$ есть минимальный элемент, и, таким образом, он представляет собой минимальное множество для $f$. $\square$

Следующая лемма утверждает, что точки минимального множества обладают сильной возвращаемостью.

**Теорема 1.4.** *Компактное инвариантное множество* $\Lambda$ *минимально тогда и только тогда, когда орбита любой точки* $x \in \Lambda$ *плотна в* $\Lambda$.

**Доказательство.** Пусть $\Lambda$ — минимальное множество. Для любой точки $x \in \Lambda$ множество $\overline{\mathrm{Orb}(x)} \subset \Lambda$ непусто, компактно и инвариантно, и поэтому в силу минимальности $\overline{\mathrm{Orb}(x)} = \Lambda$. Обратно: предположим (от противного), что $\Lambda$ не является минимальным множеством, т.е. существует собственное подмножество $\Lambda_1 \subset \Lambda$, которое непусто, компактно и инвариантно. Тогда для любой точки $x \in \Lambda_1$ будем иметь $\overline{\mathrm{Orb}(x)} \subset \Lambda_1 \neq \Lambda$. Противоречие доказывает наше утверждение. $\square$

Напомним, что подмножество $\Lambda \subset X$ называется *нигде не плотным* в $X$, если его замыкание не содержит внутренних точек. Например, интервал нигде не плотен на плоскости.

**Теорема 1.5.** *Если пространство* $X$ *связно, то любое минимальное множество либо совпадает с* $X$, *либо нигде не плотно в* $X$.

**Доказательство.** Пусть $\Lambda$ — минимальное множество для $f$. Отметим, что граница $\partial\Lambda$ компактна и инвариантна. Если $\partial\Lambda = \varnothing$, то $\Lambda = \mathrm{int}(\Lambda)$ и, значит, $\Lambda$ — открытое множество. Таким образом, $\Lambda$ является одновременно открытым и замкнутым множеством, следовательно (в силу связности) совпадает с $X$. Если же $\partial\Lambda \neq \varnothing$, то $\partial\Lambda$ — непустое, компактное и инвариантное множество и, в силу минимальности, $\partial\Lambda = \Lambda$. Таким образом, в данном случае множество $\Lambda$ не имеет внутренних точек и поэтому нигде не плотно в $X$. $\square$

Компактное инвариантное множество $\Lambda$ называется *неразложимым*, если его нельзя представить в виде объединения двух (непустых) компактных инвариантных множеств. Ясно, что минимальное множество неразложимо. Более общее свойство, которое гарантирует неразложимость — это топологическая транзитивность. Компактное инвариантное множество $\Lambda \in X$ называется *топологически транзитивным* или просто *транзитивным* если существует точка $x \in \Lambda$ такая, что $\omega(x) = \Lambda$. Очевидно, что транзитивное множество неразложимо.

**Теорема 1.6** (*Биркгоф*). *Пусть $\Lambda$ — компактное $f$-инвариантное множество. Следующие условия эквивалентны*:

(1) $\Lambda$ — *транзитивное множество*;

(2) *для любых двух открытых*[5] *подмножеств $U$ и $V$ из $\Lambda$ существует $n \geqslant 1$ такое, что $f^n U \cap V \neq \varnothing$*;

(3) *существует точка $x \in \Lambda$, положительная орбита которой плотна в $\Lambda$.*

**Доказательство.** Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказывается очень просто, и доказательство мы опускаем. Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Возьмем счетную базу $V_1, V_2, \ldots$ в $\Lambda$[6]. Для любого $i \geqslant 1$ множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n} V_i$ открыто в $\Lambda$. Кроме того, оно плотно в $\Lambda$, поскольку для любого открытого множества $U$ в $\Lambda$ существует,

---

[5] В индуцированной топологии подпространства $\Lambda$. — *Примеч. ред.*

[6] Счетная база существует в силу компактности $\Lambda$. Из компактности также следует полнота, которая далее в доказательстве используется при применении теоремы Бэра. В книге Катка и Хасселблата (Katok, Hasselblatt, 1995) эквивалентность условий (2) и (3) доказана для более общего случая — для непрерывных отображений сепарабельного локально компактного метрического пространства. — *Примеч. ред.*

в силу условия (2), $n \geqslant 1$ такое, что $f^n(U) \cap V_i \neq \varnothing$. Поэтому $U \cap f^{-n}(V_i) \neq \varnothing$. По теореме Бэра множество

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n} V_i$$

плотно в $\Lambda$. Для любой точки $x \in B$ и любого $i \geqslant 1$ существует $n \geqslant 1$ такое, что $x \in f^{-n} V_i$, т.е. $f^n x \in V_i$. Это означает, что орбита $\mathrm{Orb}^+(x)$ плотна в $\Lambda$. Таким образом, импликация (2) $\Rightarrow$ (3) доказана.

Теперь докажем, что (3) $\Rightarrow$ (1). Возьмем точку $x \in \Lambda$ такую, что $\Lambda = \overline{\mathrm{Orb}^+(x)}$. Тогда $f^{-1}(x) \in \overline{\mathrm{Orb}^+(x)}$. Если $f^{-1}(x) \in \mathrm{Orb}^+(x)$, то $x$ — периодическая точка и как следствие $\Lambda = \omega(x)$. Если $f^{-1}(x) \notin \mathrm{Orb}^+(x)$, то $f^{-1}(x) \in \omega(x)$. Отсюда $\mathrm{Orb}^+(x) \subset \omega(x)$. Тогда $\Lambda = \overline{\mathrm{Orb}^+(x)} \subset \omega(x)$. Но $\Lambda$ содержит $x$ и следовательно, содержит $\omega(x)$. Поэтому $\Lambda = \omega(x)$. Теорема доказана. $\square$

**Замечание.** В условии (3) вместо положительной орбиты можно указать отрицательную. Иногда условие (3) ошибочно формулируют в виде «существует точка $x \in \Lambda$, орбита которой плотна в $\Lambda$», или просто: «есть плотная орбита», т.е. без указания «положительная» (или «отрицательная»). Рассмотрим контрпример: пусть $\Lambda$ состоит из двух неподвижных точек и бесконечной (в обоих направлениях) орбиты $O$, которая их соединяет. Тогда в множестве $\Lambda$ есть плотная орбита $O$, но $\Lambda$ не является транзитивным. Таким образом, слово «положительная» (или «отрицательная») перед словом «орбита» необходимо.

Естественно попытаться разложить компактное инвариантное множество на попарно не пересекающиеся неразложимые компактные инвариантные подмножества (их количество может быть бесконечным). Следующее отношение эквивалентности позволит нам сделать это в случае цепно-рекуррентного множества $\mathrm{CR}(f)$.

Две точки $x, y \in \mathrm{CR}(f)$ будем называть *цепно-эквивалентными* и записывать $x \sim y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\varepsilon$-цепь из $x$ в $y$ и $\varepsilon$-цепь из $y$ в $x$. Введенное отношение является отношением эквивалентности на $\mathrm{CR}(f)$, и каждый класс эквивалентности называется *цепно-транзитивным классом* или просто *цепным классом*[7]. Цепной класс является компактным и $f$-инвариантным множеством.

Следующая теорема утверждает, что при $\varepsilon \to 0$ периодические $\varepsilon$-цепи, проходящие через точку цепного класса, должны окружать цепной класс, приближаясь к нему, и следовательно, любой цепной класс неразложим.

**Теорема 1.7.** *Пусть $C$ — цепной класс гомеоморфизма $f$. Тогда:*

(1) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in C$ любая периодическая $\delta$-цепь, проходящая через $x$, содержится в $B(C, \varepsilon)$, т.е. в $\varepsilon$-окрестности $C$;*

(2) *множество $C$ неразложимо.*

**Доказательство.** (1) Предположим (от противного), что найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, для которого при любом $n \geqslant 1$ существуют $x_0^n \in C$ и периодическая $1/n$-цепь

$$x_0^n,\ x_1^n,\ \ldots,\ x_{j_n}^n$$

такие, что $x_{k_n}^n \notin B(C, \varepsilon_0)$ для некоторого $k_n$. Перейдя к подпоследовательностям, если необходимо, мы можем считать, что $x_0^n \to x$ и $x_{k_n}^n \to y$. Тогда $x$ и $y$ будут цепно-эквивалентны. Но $x \in C$, а $y \notin C$ и, таким образом, получаем противоречие.

(2) Предположим (от противного), что множество $C$ разложимо, т.е. его можно представить в виде объединения двух непересекающихся непустых компактных $f$-инвариантных множеств $C_1$ и $C_2$. Возьмем настолько малое $\varepsilon > 0$ , что

$$B(C_1, \varepsilon) \cap B(C_2, \varepsilon) = \varnothing, \quad (fB(C_1, \varepsilon)) \cap B(B(C_2, \varepsilon), \varepsilon) = \varnothing.$$

Второе равенство означает, что любая точка из $B(C_1, \varepsilon)$ не может прыгнуть за один шаг в $\varepsilon$-окрестность множества $B(C_2, \varepsilon)$.

Возьмем $x \in C_1$. В силу (1) существует $\delta > 0$ такое, что любая периодическая $\delta$-цепь, проходящая через $x$, содержится в $B(C_1, \varepsilon) \cup B(C_2, \varepsilon)$. Мы можем считать, что $\delta < \varepsilon$. Поскольку $C_1$ и $C_2$ находятся в одном цепном классе, то существует периодическая $\delta$-цепь, проходящая через $x$ и пересекающая $B(C_2, \varepsilon)$. Тогда имеется точка $z \in B(C_1, \varepsilon)$ такая,

[7] Употребляют также термин «цепная компонента». — *Примеч. ред.*

что $f(z) \in B(B(C_2, \varepsilon), \delta) \subset B(B(C_2, \varepsilon), \varepsilon)$, что противоречит выбору $\varepsilon$. $\square$

Таким образом, $\mathrm{CR}(f)$ есть объединение непересекающихся цепных классов, которые уже неразложимы. Система может иметь бесконечно много цепных классов. Простейшим примером является гомеоморфизм отрезка $[0,1]$ с бесконечным множеством неподвижных точек $p_n$ — чередующихся стоков и источников, которые накапливаются к неподвижной точке 0. В этом случае каждая точка $p_n$ является цепным классом.

## 1.2. Сопряженность и структурная устойчивость

Два гомеоморфизма $f: X \to X$ и $g: X \to X$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h: X \to X$ такой, что $hf = gh$. Проще говоря, $f$ и $g$ переходят друг в друга при некоторой непрерывной взаимно-однозначной замене координат. Гомеоморфизм $h$ называется *топологическим сопряжением*, или просто *сопряжением* $f$ и $g$. Сопряженность является отношением эквивалентности на пространстве всех гомеоморфизмов. Легко видеть, что имеет место соотношение $hf^n = g^n h$ при всех $n$. Следовательно, сопряжение $h$ переводит орбиты в орбиты, т.е.

$$h(\mathrm{Orb}(x, f)) = \mathrm{Orb}(h(x), g)$$

для любых точек $x \in X$. В частности, сопряжение сохраняет множество периодических точек, $\omega$-предельное множество, неблуждающее множество и цепно-рекуррентное множество. Итак,

$$h(\mathrm{P}(f)) = \mathrm{P}(g), \quad h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g),$$
$$h(\Omega(f)) = \Omega(g), \quad h(\mathrm{CR}(f)) = \mathrm{CR}(g).$$

Классифицировать все гомеоморфизмы с точностью до сопряженности было бы идеальной мечтой, но это нереально. Тем не менее в очень простых ситуациях такая классификация возможна. Рассмотрим случай, когда $X$ — это отрезок $[a, b]$, а гомеоморфизм $f: [a, b] \to [a, b]$ либо строго возрастающий, т.е. сохраняет порядок любых двух точек интервала, либо строго убывающий, т.е. меняет порядок любых двух точек. В первом случае говорят, что $f$ *сохраняет ориентацию*, а во втором — что $f$ *меняет ориентацию*. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм не может быть сопряжен с меняющим ориентацию (иначе они были бы сопряжены на границе $\partial([a,b])$), но сохраняющий ориентацию гомеоморфизм на $\partial([a,b])$ имеет две неподвижные точки, а меняющий ориентацию — ни одной.

Гомеоморфизмы интервала обладают простейшей возвращаемостью. Точнее, для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $f : [a,b] \to [a,b]$ выполняется [8]

$$\mathrm{CR}(f) = \mathrm{Fix}(f).$$

Действительно, если $x \notin \mathrm{Fix}(f)$, то можно считать, что $f(x) > x$. Положим $\varepsilon = |f(x) - x|/2$. Тогда не существует $\varepsilon$-цепи от $x$ до $x$.

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f$, не имеющий неподвижных точек на $(a,b)$. На самом деле такому условию удовлетворяет ограничение любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $f$ на замыкании любой его связной компоненты дополнения к $\mathrm{Fix}(f)$. В этом случае график $f$ либо выше диагонали, либо ниже диагонали.

**Теорема 1.8.** *Любые два сохраняющих ориентацию гомеоморфизма отрезка $[a,b]$ без неподвижных точек на $(a,b)$ топологически сопряжены.*

**Доказательство.** Пусть $f$ и $g$ — два сохраняющих ориентацию гомеоморфизма отрезка $[a,b]$ без неподвижных точек на $(a,b)$. Рассмотрим один из четырех случаев, а именно, случай, когда $f(x) > x$ и $g(x) > x$ при всех $x \in (a,b)$, см. рис. 1.6 (в остальных трех случаях доказательство аналогично). Возьмем произвольную точку $p \in (a,b)$ и любой гомеоморфизм

$$h_0 : [p, f(p)] \longrightarrow [p, g(p)]$$

такой, что $h_0 p = p$, $h_0(fp) = gp$. Для каждого целого числа $n$ определим

$$h_n : [f^n(p), f^{n+1}(p)] \longrightarrow [g^n(p), g^{n+1}(p)]$$

[8] Для меняющего ориентацию гомеоморфизма к неподвижным точкам добавляются периодические периода 2. К этому выводу можно придти, если рассмотреть вторую итерацию, так как $f^2$ сохраняет ориентацию. — *Примеч. ред.*

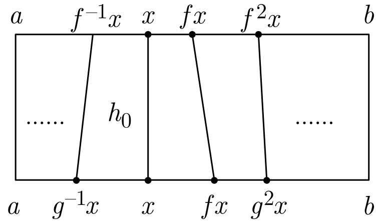


**Рис. 1.6.** Построение топологической сопряженности $h$ в теореме 1.8

следующим образом:

$$h_n = g^n \circ h_0 \circ f^{-n}.$$

Нетрудно проверить, что подклеенные друг к другу гомеоморфизмы $h_n$ образуют гомеоморфизм $h : [a, b] \to [a, b]$ и $hf = gh$. $\square$

**Замечание.** Теорема 1.8 показывает, что построение топологической сопряженности на блуждающих областях достаточно произвольно или, другими словами, динамика на блуждающих областях не чувствительна к возмущениям.

С топологической сопряженностью тесно связано понятие структурной устойчивости. Оно рассматривается в терминах дифференцируемых динамических систем.

Пусть $M$ — компактное $C^\infty$-многообразие без края. Обозначим через $\mathrm{Diff}^r(M)$ множество $C^r$-диффеоморфизмов $M$, наделенное $C^r$-топологией. *$C^r$-топологию* можно определить следующим образом. Зафиксируем конечное покрытие допустимыми координатными окрестностями $(U_i, \phi_i)$, $i = 1, \ldots, N$, на $M$. Мы говорим, что последовательность $C^r$-диффеоморфизмов $f_n$ многообразия $M$ *сходится в $C^r$-топологии* к $C^r$-диффеоморфизму $f$, если для всех $1 \leqslant i, j \leqslant N$ локальные отображения $\phi_j f_n \phi_i^{-1}$, а также их частные производные до порядка $r$ включительно равномерно сходятся к соответствующим производным отображения $\phi_j f \phi_i^{-1}$ (всюду, где они определены). Это задает $C^r$-топологию на $\mathrm{Diff}^r(M)$. Различные покрытия допустимыми координатными окрестностями определяют эквивалентные $C^r$-топологии.

Диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$ называется *$C^r$-структурно устойчивым*, если у него есть такая $C^r$-окрестность $\mathcal{U}$ в $\mathrm{Diff}^r(M)$, что каждый диффеоморфизм $g \in \mathcal{U}$ топологически сопряжен с $f$. Проще говоря, диффеоморфизм $f$ $C^r$-структурно устойчив, если малыми $C^r$-возмущениями нельзя изменить топологическую структуру его орбит. Термин *возмущение* $f$, вообще говоря, зависит от контекста. Обычно он означает диффеоморфизм $g$, который $C^r$-близок к $f$. Иногда этот термин означает также расстояние между $f$ и $g$, и в этом смысле говорят «малое возмущение».

Очевидно, что если диффеоморфизм $f$ $C^r$-структурно устойчив, то он и $C^{r+1}$-структурно устойчив. Таким образом, $C^1$-структурная устойчивость является самой сильной. Понятие $C^0$-структурной устойчивости не используется, поскольку $C^0$-возмущения слишком разрушительны. Например, $C^0$-возмущение может легко превратить изолированную неподвижную точку в целую окрестность неподвижных точек, т.е. такое возмущение нарушает какую угодно структурную устойчивость. Поэтому $f$ и $g$ в определении структурной устойчивости должны быть диффеоморфизмами, а не просто гомеоморфизмами. С другой стороны, от сопряженности $h$ лишь требуется быть гомеоморфизмом, а не обязательно диффеоморфизмом. Дело в том, что дифференцируемая сопряженность была бы слишком жестким требованием. Например, из формулы для производной сложной функции следует, что дифференцируемая сопряженность сохраняет значения производной в неподвижных точках, в то время как $C^r$-возмущением производную в неподвижной точке можно легко изменить. Поэтому, если потребовать дифференцируемую сопряженность, то фактически не оказалось бы структурно устойчивых систем. Таким образом, введенное понятие структурной устойчивости является естественным. Оно ограничивает возможные возмущения (они должны быть дифференцируемыми и тем самым — менее разрушительными) и в то же время позволяет более удобной топологической сопряженности вернуться к исходной системе.

Характеризация структурно устойчивых систем оставалась центральной проблемой дифференцируемых динамических систем на протяжении нескольких десятилетий прошлого века. Лишь в некоторых простых случаях, как (например) в случае диффеоморфизмов интервала, она легко решается. Это показывает следующая теорема. Заметим, что запись $f \in \mathrm{Diff}^1[a, b]$ означает не только то, что $f$ является дифференцируемым гомеоморфизмом, но и то, что функция $f^{-1}$ дифференцируема. (Например, функция $f(x) = x^3$ не является диффеоморфизмом.) В частности, абсолютное значение производной $f'$ имеет положительную нижнюю границу. Легко видеть, что для диффеоморфизма $f$ любая функция $g$, $C^1$-близкая к $f$, также является диффеоморфизмом.

**Теорема 1.9.** *Пусть $f : [a, b] \to [a, b]$ — сохраняющий ориентацию $C^r$-диффеоморфизм без неподвижных точек на $(a, b)$. Для любого $r \geqslant 1$ диффеоморфизм $f$ является $C^r$-структурно устойчивым тогда и только тогда, когда $f'(a) \neq 1$ и $f'(b) \neq 1$.*

**Доказательство.** Пусть $f'(a) \neq 1$ и $f'(b) \neq 1$. Докажем, что $f$ является $C^r$ структурно устойчивым для любого $r \geqslant 1$. Достаточно доказать это для $r = 1$. Существуют $C^1$-окрестность $\mathcal{U}_1$ диффеоморфизма $f$ в $\mathrm{Diff}^1([a, b])$, а также открытые (в $[a, b]$) окрестности $U$ и $V$ точек $a$ и $b$, соответственно, такие, что любой диффеоморфизм $g \in \mathcal{U}_1$ сохраняет ориентацию, имеет единственную неподвижную точку в $U$, совпадающую с $a$, и единственную неподвижную точку в $V$, совпадающую с $b$, см. рис. 1.7. Поскольку $f$ не имеет неподвижных точек на компактном множестве $[a, b] - U - V$, то функция $|f(x) - x|$ достигает наименьшего положительного значения на этом множестве. Поэтому $f$ имеет такую $C^1$-окрестность[9] $\mathcal{U}_2$, что у любого $g \in \mathcal{U}_2$ нет неподвижных точек на $[a, b] - U - V$. Положим

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2.$$

Тогда $g \in \mathcal{U}$ сохраняет ориентацию и не имеет неподвижных точек на $(a, b)$. Согласно теореме 1.8 $g$ и $f$ сопряжены.

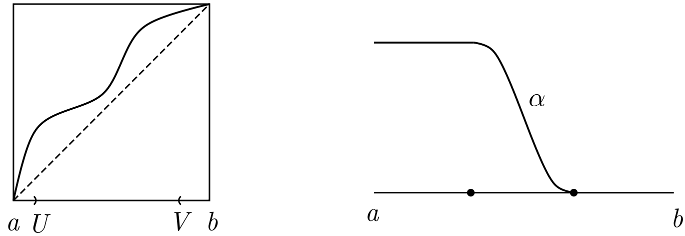


**Рис. 1.7.** Доказательство теоремы 1.9

[9] Даже $C^0$-окрестность. — *Примеч. ред.*

Обратно: предположим, что $f'(a) = 1$ или $f'(b) = 1$; пусть, для определенности, $f'(a) = 1$. Покажем, что для любого $r \geqslant 1$ можно найти такое сколь угодно малое $C^r$-возмущение $g$, у которого более двух неподвижных точек, и следовательно, диффеоморфизм $f$ не структурно устойчив. Для удобства будем считать, что $a = 0$ и $b = 1$. Возьмем $C^\infty$-гладкую специальную функцию $\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$ такую, что $\alpha = 1$ на $[0, 1/3]$, $\alpha = 0$ на $[0, 2/3]$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ на $[0, 1]$. Без ограничения общности можно считать, что график $f$ лежит выше диагонали. Для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$g(x) = g_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon\alpha(x)x.$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $g$ будет сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом[10]. При $\varepsilon \to 0$ диффеоморфизмы $g$ и $f$ становятся сколь угодно близкими в $C^r$-топологии. Очевидно, что точки $x = 0$ и $x = 1$ являются неподвижными для $g$. Так как вблизи точки $x = 0$

$$g(x) = f(x) - \varepsilon x,$$

то $g'(0) = f'(0) - \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Поэтому график $g$ вблизи $x = 0$ получается из графика $f$ небольшим поворотом по часовой стрелке вокруг начала координат, а затем график идет вверх и должен пересечь диагональ[11]. Следовательно, $g$ имеет еще и другую неподвижную точку, значит, у $g$ как минимум три неподвижные точки. Теорема доказана. $\square$

Теорема 1.9 довольно простая, но она очень поучительна. Она показывает (что в отличие от блуждающих точек) неблуждающие (в данном случае, неподвижные точки) чувствительны к возмущениям. Чтобы выжить после возмущений, для них должно выполняться условие, подобное $f'(a) \neq 1$, т.е. должна иметь место *гиперболичность*. Таким образом, неблуждающее множество важно не только потому, что оно отражает информацию о долгосрочном поведении всех орбит, но и потому, что оно более чувствительно к возмущениям. Другой интересный

[10] Так как $f'$ на $[0, 1]$ имеет положительную нижнюю границу. — *Примеч. ред.*

[11] Левее точки $x = 2/3$, так как $g(x) < x$ при малых $x > 0$ и $g(2/3) = f(2/3) > 2/3$. — *Примеч. ред.*

момент заключается в том, что, как показывает теорема 1.9, для диффеоморфизмов интервала $C^i$-структурная устойчивость эквивалентна $C^j$-структурной устойчивости при любых $i$ и $j$. Это верно и для потоков на ориентируемых поверхностях в силу классического результата Пейшото (Peixoto, 1962). Однако в общем случае неизвестно, справедлив ли этот факт.

## 1.3. Гомеоморфизмы окружности

Пусть $S^1$ — единичная окружность и $f : S^1 \to S^1$ — гомеоморфизм. Мы говорим, что $f$ *сохраняет ориентацию*, если любое поднятие $f$ на накрывающее пространство $\mathbb{R}$ является строго монотонно возрастающим. Скажем, что $f$ *меняет ориентацию*, если любое поднятие $f$ на $\mathbb{R}$ является строго монотонно убывающим. Гомеоморфизм $f : S^1 \to S^1$ либо сохраняет, либо меняет ориентацию. Композиция двух сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов сохраняет ориентацию. Композиция двух гомеоморфизмов, один из которых сохраняет ориентацию, а другой меняет, является меняющим ориентацию гомеоморфизмом.

Эти определения можно дать в терминах направленных интервалов. Две точки $a, b \in S^1$ определяют два открытых интервала, т.е. две связные компоненты множества $S^1 - \{a, b\}$. Обозначим через $(a, b)$ интервал (дугу) от $a$ до $b$ против часовой стрелки (здесь мы используем ориентацию плоскости). При этом другой интервал обозначается $(b, a)$, так как он идет от $b$ к $a$ против часовой стрелки. Отметим, что здесь $(a, b)$ и $(b, a)$ — это разные интервалы, в отличие от обозначений на числовой прямой, где $(a, b)$ и $(b, a)$ обозначают один и тот же интервал, несмотря на то, что соответствуют двум разным ориентациям $\mathbb{R}$. А на $S^1$ они обозначают разные интервалы по отношению к одной и той же ориентации $S^1$. Для любого открытого интервала $(a, b) \subset S^1$ множество $f(a, b)$ есть открытый интервал с концевыми точками $f(a)$ и $f(b)$. Таким образом, $f(a, b)$ совпадает либо с $(f(a), f(b))$, либо с $f(a, b) = (f(b), f(a))$. Поэтому, когда $f$ сохраняет ориентацию, имеем $f(a, b) = (f(a), f(b))$ для любых $a, b \in S^1$, а когда $f$ меняет ориентацию, будет $f(a, b) = (f(b), f(a))$ для любых $a, b \in S^1$.

Пусть $\Lambda \subset S^1$ — компактное множество. *Смежный интервал* множества $\Lambda$ — это связная компонента множества $S^1 - \Lambda$.

Таким образом, смежный интервал — это открытый интервал $(a,b)$, для которого $a,b\in\Lambda$ и $(a,b)\cap\Lambda=\varnothing$. Пусть $f:S^1\to S^1$ — гомеоморфизм. Следующая лемма очевидна, и мы опускаем ее доказательство.

**Лемма 1.10.** *Пусть $f:S^1\to S^1$ — гомеоморфизм и $\Lambda\subset\subset S^1$ — компактное $f$-инвариантное множество. Тогда $f$ отображает смежные интервалы в смежные интервалы. Точнее, для любого смежного интервала $I$ найдется единственный смежный интервал $J$ такой, что $f(I)=J$, и это соответствие является биекцией на множестве смежных интервалов.*

**Пример 1.** Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f$, как показано на рис. 1.8. $\mathrm{Fix}(f)$ состоит из трех точек. $f$ отображает каждый из трех смежных интервалов множества $\mathrm{Fix}(f)$ на себя. В каждом смежном интервале точки движутся в направлении, указанном стрелками. В общем случае $\mathrm{Fix}(f)$ может быть любым замкнутым подмножеством в $S^1$ с конечным или счетным семейством смежных интервалов и произвольно выбранными стрелками.

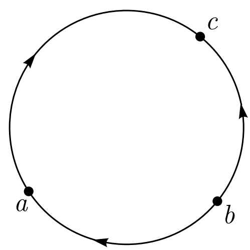


**Рис. 1.8.** Пример 1

**Пример 2.** $f$ — это рациональный поворот на угол $2\pi m/n$, $(m,n)=1$. Тогда $f$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, и $\mathrm{P}(f)=S^1$. Все точки периодические и имеют одинаковый период $n$.

**Пример 3.** $f$ — это иррациональный поворот на угол $2\pi\alpha$, где $\alpha$ — иррациональное число. Легко видеть, что $f$ сохраняет ориентацию и $\mathrm{P}(f)=\varnothing$. Покажем, что вся окружность $S^1$ является минимальным множеством для $f$. Возьмем любую точку $x\in S^1$ и докажем, что $\overline{\mathrm{Orb}(x)}=S^1$. Пусть $(a,b)$ — произвольный открытый (малый) интервал. Достаточно доказать, что $\mathrm{Orb}(x)$ пересекает $(a,b)$, см. рис. 1.9. Так как точка $x$ не является периодической, то орбита $\mathrm{Orb}(x)$ бесконечна. Следовательно, найдется пара точек $f^n(x)$ и $f^m(x)$ таких, что $l[f^n(x),f^m(x)]\leqslant l[a,b]/3$, где $l[a,b]$ обозначает длину интервала $[a,b]$. Обозначим $f^n(x)=y$, $f^m(x)=z$ и $f^{m-n}=g$. Тогда $g(y)=z$. Таким образом, $g$ — это поворот на малый угол. Поскольку $g[y,z],g^2[y,z],\ \dots$ —

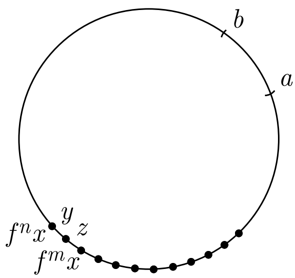


**Рис. 1.9.** Пример 3

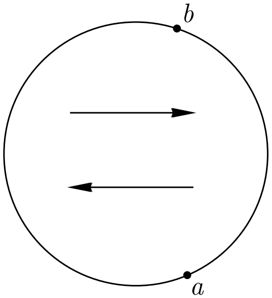


**Рис. 1.10.** Пример 4

примыкающие последовательно друг к другу интервалы равной длины $l[y,z]$, то существует $k \geqslant 1$ такое, что $g^k[y,z] \subset (a,b)$. Итак, $\mathrm{Orb}(x)$ пересекает $(a,b)$.

**Пример 4.** $f$ — меняющий ориентацию гомеоморфизм, изображенный на рис. 1.10. Тогда $\mathrm{Fix}(f)$ состоит из двух неподвижных точек $a, b \in S^1$, и $f$ меняет местами два смежных интервала множества $\{a,b\}$ (т.е. два интервала $S^1 \setminus \{a,b\}$). Поэтому ограничение $f^2$ на $[a,b]$ (и на $[b,a]$) является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом. Легко видеть, что $\Omega(f)$ состоит из двух неподвижных точек $a$, $b$ и некоторого количества периодических точек периода 2.

Поскольку меняющие ориентацию гомеоморфизмы $S^1$ имеют довольно простую динамику, в остальной части данного раздела мы рассматриваем только гомеоморфизмы, сохраняющие ориентацию. Могут быть два случая: $\mathrm{P}(f) \neq \varnothing$ и $\mathrm{P}(f) = \varnothing$; мы их рассмотрим отдельно.

**Теорема 1.11.** *Пусть $f : S^1 \to S^1$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм и $\mathrm{P}(f) \neq \varnothing$. Тогда все периодические точки имеют одинаковый период и $\mathrm{P}(f) = \Omega(f)$.*

**Доказательство.** Возьмем любую точку $x \in \mathrm{P}(f)$. Предположим, что ее период равен $n$, пусть все $n$ точек орбиты $\mathrm{Orb}(x)$ — это точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, занумерованные последовательно против часовой стрелки (отметим, что нумерация может не совпадать с порядком итераций). Тогда

$$(x_1, x_2),\ (x_2, x_3),\ \ldots,\ (x_n, x_1)$$

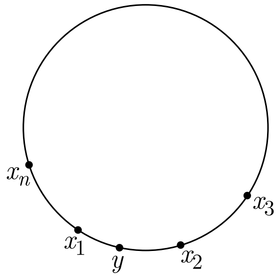


**Рис. 1.11.** Доказательство теоремы 1.11

— смежные интервалы множества $\mathrm{Orb}(x)$, см. рис. 1.11. Так как $f^m(x_i, x_{i+1}) = (f^m x_i, f^m x_{i+1})$, то для $m$, кратного $n$, имеем $f^m(x_i, x_{i+1}) = (x_i, x_{i+1})$. В противном случае $f^m(x_i, x_{i+1}) \cap \cap (x_i, x_{i+1}) = \varnothing$.

Возьмем любую точку $y \in S^1 - \mathrm{Orb}(x)$. Достаточно доказать, что $y$ является либо $n$-периодической, либо блуждающей. Без ограничения общности можно считать, что $y \in (x_1, x_2)$. Заметим, что ограничение $f^n$ на $(x_1, x_2)$ является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом. Если $f^n(y) = y$, то $y$ — периодическая точка периода $n$. Если же $f^n(y) \neq y$, то существует окрестность $V$ точки $y$ в $(x_1, x_2)$ такая, что $f^{nk}(V) \cap V = \varnothing$ при всех $k \geqslant 1$. Как мы отмечали выше, для любого $1 \leqslant j \leqslant n-1$ имеем $f^{nk+j}(V) \cap V = \varnothing$. Таким образом, $f^i(V) \cap V = \varnothing$ для всех $i \geqslant 1$. Следовательно, $y$ — блуждающая точка. Теорема доказана. $\square$

Теперь мы рассмотрим сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $S^1$ без периодических точек. Отметим, что здесь мы можем и не упоминать сохранение ориентации, так как гомеоморфизм, меняющий ориентацию, должен иметь неподвижные точки.

*Канторовское множество* определяется как множество, которое является компактным, совершенным, вполне несвязным и метризуемым, см. книгу Хокинга и Янга (Hocking, Young, 1961). Все канторовские множества гомеоморфны друг другу. Самое известное канторовское множество получается классической процедурой удаления средней трети на каждом шаге. Напомним, что множество $\Lambda$ называется *совершенным*, если оно замкнуто и не имеет изолированных точек, т.е. каждая точка $x \in \Lambda$ является его предельной точкой. Напомним также, что множество $\Lambda$ *вполне несвязно*, если его любая связная компонента состоит из одной точки.

**Теорема 1.12.** *Пусть $f : S^1 \to S^1$ — гомеоморфизм без периодических точек. Тогда $\Omega(f)$ — минимальное множество. Более того, $\Omega(f)$ либо совпадает с $S^1$, либо является канторовским множеством.*

**Доказательство.** Чтобы доказать, что $\Omega(f)$ — минимальное множество, достаточно проверить, что каждое непустое компактное $f$-инвариантное множество $\Lambda$ содержит $\Omega(f)$. Возьмем любой смежный интервал $(a, b)$ множества $\Lambda$. Для любого $n \geqslant 1$ либо $f^n(a, b) = (a, b)$, либо $f^n(a, b) \cap (a, b) = \varnothing$. В первом случае точки $a$ и $b$ будут периодическими, но это противоречит условию теоремы. Итак, $f^n(a, b) \cap (a, b) = \varnothing$ при всех $n \geqslant 1$. Это означает, что $(a, b) \cap \Omega(f) = \varnothing$, и поэтому $\Omega(f) \subset \Lambda$.

Согласно теореме 1.5 либо $\Omega(f) = S^1$, либо $\Omega(f)$ нигде не плотно на $S^1$. Докажем, что во втором случае $\Omega(f)$ представляет собой канторовское множество. Отметим, что в размерности 1 нигде не плотность означает вполне несвязность. (Это не так в многомерном случае: например, замкнутый интервал — это нигде не плотное множество на плоскости, но он не является вполне несвязным.) Так как $\Omega(f)$ компактно, остается доказать, что $\Omega(f)$ не содержит изолированных точек. Возьмем любую точку $x \in \Omega(f)$. Поскольку $\Omega(f)$ — минимальное множество, $\omega(x) = \Omega(f)$. Поэтому существует последовательность $n_i \to \infty$ такая, что $f^{n_i}(x) \to x$. Из условия $\mathrm{P}(f) = \varnothing$ следует, что все члены последовательности $\{f^{n_i}(x)\} \subset \Omega(f)$ различны. Следовательно, точка $x$ не изолирована в $\Omega(f)$. Теорема доказана. $\square$

Гомеоморфизм $f : S^1 \to S^1$ называется *исключительным*, если $\mathrm{P}(f) = \varnothing$ и $\Omega(f)$ представляет собой канторовское множество.

**Пример 5.** Исключительный гомеоморфизм $f : S^1 \to S^1$. Проиллюстрируем построение исключительного гомеоморфизма. Возьмем чистый иррациональный поворот $f : S^1 \to S^1$ и любую точку $p \in S^1$. Заменим точки

$$\ldots, f^{-1}p,\ p,\ fp,\ f^2p, \ldots$$

на соответственные замкнутые интервалы

$$\dots, I_{-1},\ I_0,\ I_1,\ I_2, \dots$$

так, чтобы сумма их длин была конечна. Получим новую окружность $\Sigma$. Определим гомеоморфизм $g : \Sigma \to \Sigma$ следующим образом: пусть $gx = fx$ для всех $x \in \Sigma - \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_n$, и пусть $g$ отображает $I_n$ на $I_{n+1}$ гомеоморфно с сохранением ориентации. Тогда у $g$ нет периодических точек, а есть блуждающие интервалы. Следовательно, $g$ является исключительным гомеоморфизмом.

Заметим, что исключительный гомеоморфизм $g$, построенный в примере 5, вообще говоря, имеет гладкость $C^0$. При помощи более тонкой конструкции можно добиться того, чтобы $g$ стал $C^1$-диффеоморфизмом, см. книгу Нитецкого (Nitecki, 1971) или Робинсона (Robinson, 1995). Данжуа доказал, что не существует исключительных диффеоморфизмов класса $C^2$. Этот глубокий результат см., например, в книгах Нитецкого (Nitecki, 1971) или ди Мелу и Ван Стрина (de Melo, Van Strein, 1993).

## 1.4. Фундаментальная теорема Конли

В этом разделе представлен результат Конли (Conley, 1978), утверждающий, что любая система является «градиентно-подобной» по модулю цепной рекуррентности. Этот результат иногда называют фундаментальной теоремой теории динамических систем. Заложенная в нем простая идея о захватывающих областях очень быстро приводит к глубоким последствиям. Мы благодарны Фрэнксу и Бонатти за их неопубликованные заметки по теории Конли, которые очень помогли при написании данного раздела.

Напомним, что градиентный поток порождается векторным полем градиента функции $\phi : M \to \mathbb{R}$: а именно, функция строго убывает вдоль орбиты каждой регулярной точки. Конли обнаружил, что у любого потока есть подобная функция $\phi : M \to \mathbb{R}$ (на самом деле, много функций), называемая функцией Ляпунова, которая постоянна на каждом цепном классе потока и строго убывает вдоль орбиты каждой точки, не являющейся цепно-рекуррентной. Здесь мы приводим результат для систем с дискретным временем.

**Теорема 1.13** (фундаментальная теорема Конли). *Пусть $f : X \to X$ — гомеоморфизм компактного метрического пространства. Тогда существует непрерывная функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:*

(1) *Если $x \notin \mathrm{CR}(f)$ , то $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$.*

(2) *Для любых точек $x, y \in \mathrm{CR}(f)$ равенство $\varphi(x) = \varphi(y)$ выполняется тогда и только тогда, когда $x$ и $y$ принадлежат одному и тому же цепному классу. В частности, если $x \in \in \mathrm{CR}(f)$, то $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$.*

(3) *Множество $\varphi(\mathrm{CR}(f))$ компактно и нигде не плотно в $\mathbb{R}$.*

Прежде чем доказывать теорему, мы объясним сначала взаимосвязь цепных классов и захватывающих областей. Открытое множество $U \subset X$ называется *захватывающей областью* для $f$, если $f(\overline{U}) \subset U$. Компактное $f$-инвариантное множество $A \subset X$ называется *притягивающим* [12], если существует его окрестность $U$ такая, что $A = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\overline{U})$. Будем называть $U$ *изолирующей окрестностью* множества $A$. *Отталкивающее множество* для $f$ — это притягивающее множество для $f^{-1}$.

Если $A$ — притягивающее множество для $f$ с изолирующей окрестностью $U$, то $V = X - \overline{U}$ — захватывающая область для $f^{-1}$; следовательно, $A^* = \bigcap_{n \geqslant 0} f^{-n}(\overline{V})$ является отталкивающим множеством для $f$, которое называется *двойственным отталкивающим множеством* множества $A$. Очевидно, что $A^*$ не зависит от выбора для $A$ ее изолирующей окрестности $U$ [13].

[12] Вместо термина «захватывающая область» (trapping region) в русскоязычной литературе употребляется также «поглощающая область», а «притягивающее множество» (attracting set) часто называют аттрактором. Обсуждение различных определений аттрактора см. в работе С.В. Гонченко и Д.В. Тураева «О трех типах динамики и понятии аттрактора» (Тр. МИАН. 2017. Т. 297. С. 133–157). — *Примеч. ред.*

[13] Заметим, что для захватывающей области $U$ множество $A = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(\overline{U})$ автоматически будет компактным и инвариантным. Теми же свойствами — компактности и инвариантности — обладает и двойственное отталкивающее множество $A^*$. Таким образом, априори предполагать компактность и инвариантность притягивающей (отталкивающей) области не обязательно. — *Примеч. ред.*

**Лемма 1.14.** *Семейство притягивающих множеств не более чем счетно.*

**Доказательство.** Пусть $\mathcal{B} = \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счетная база, задающая топологию на $X$. Возьмем для $f$ притягивающее множество $A$ с изолирующей окрестностью $U$. Поскольку $A$ — компакт, то существуют множества $V_{i_1}, \ldots, V_{i_k}$ из базы такие, что $A \subset V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k} \subset U$. Тогда

$$A = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(U) = \bigcap_{n \geqslant 0} f^n(V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_k}).$$

Таким образом, притягивающих множеств имеется не более, чем всех конечных семейств из $\mathcal{B}$. Лемма доказана. □

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — притягивающие множества[14] для $f$ и $\{A_i^*\}$ — соответствующие им двойственные отталкивающие множества.

**Лемма 1.15.** $\mathrm{CR}(f) = \bigcap_{i=1}^{\infty}(A_i \cup A_i^*)$.

**Доказательство.** Перед тем, как доказывать лемму, отметим один важный факт.

**Факт**. Если $U$ — захватывающая область для $f$, то найдется такое $\varepsilon_0$, для которого не существует $\varepsilon_0$-цепей из $f^2(U)$ в $X - f(U)$.

Действительно, можно взять $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2} d(X - f(U),\ \overline{f^2(U)})$.

Вернемся к доказательству леммы и докажем включение «$\subset$». Предположим, что $x \notin A \cup A^*$ для некоторого притягивающего множества $A$, и покажем, что в этом случае $x \notin \mathrm{CR}(f)$. Пусть $U$ — изолирующая окрестность множества $A$. Заметим, что тогда $U - f(U)$ является *фундаментальной областью* множества $X - (A \cup A^*)$. Это означает, что любая орбита из $X - (A \cup A^*)$ пересекает $U - f(U)$ ровно один раз. Поэтому мы можем считать, что $x \in U - f(U)$. Возьмем $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы у любой $\varepsilon_1$-цепи $x = x_0$, $x_1$, $x_2$ элемент $x_2$ принадлежал $f^2(U)$. Далее, возьмем $\varepsilon_0$ в силу отмеченного выше Факта и положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$. Тогда не существует $\varepsilon$-цепи из $x$ в $x$, и поэтому $x \notin \mathrm{CR}(f)$.

---

[14] Имеются в виду все притягивающие множества. Их можно занумеровать в силу леммы 1.14. — *Примеч. ред.*

Теперь докажем включение «$\supset$». Для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ обозначим через $\Omega(x, \varepsilon)$ множество таких точек $y \in X$, для которых существует $\varepsilon$-цепь из $x$ в $y$. Тогда множество $\Omega(x, \varepsilon)$ открыто. Из определения $\varepsilon$-цепи следует, что $\varepsilon/2$-окрестность множества $f(\Omega(x, \varepsilon))$ содержится в $\Omega(x, \varepsilon)$. Поэтому $f(\overline{\Omega(x, \varepsilon)}) \subset \subset \Omega(x, \varepsilon)$; значит, $\Omega(x, \varepsilon)$ является захватывающей областью.

Пусть $x \notin \mathrm{CR}(f)$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $x \notin \Omega(x, \varepsilon_0)$. Ясно, что $fx \in \Omega(x, \varepsilon_0)$. Пусть $A$ — притягивающее множество с изолирующей окрестностью $U = \Omega(x, \varepsilon_0)$, и пусть $A^*$ — его двойственное отталкивающее множество. Тогда $x \notin A \cup A^*$ [15] Лемма доказана. □

**Замечание.** Последние два абзаца из доказательства леммы показывают следующее: если $x \notin \mathrm{CR}(f)$, то существует притягивающее множество $A$ такое, что точка $x$ не лежит в $A$, но притягивается к $A$ (т.е. ее положительная орбита стремится к $A$). Другими словами, $x$ принадлежит «настоящему бассейну» множества $A$ и, значит, не обладает возвращаемостью ни в каком смысле.

**Лемма 1.16.** *Точки $x, y \in \mathrm{CR}(f)$ находятся в одном и том же цепном классе тогда и только тогда, когда для любого $i$ обе точки $x$ и $y$ принадлежат одновременно либо $A_i$, либо $A_i^*$.*

**Доказательство.** Если $x \in A_i$, а $y \in A_i^*$ для некоторого $i$, то найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что не существует $\varepsilon_0$-цепи из $x$ в $y$ [16]. Следовательно, $x$ и $y$ не лежат в одном цепном классе.

Обратно, если $x$ и $y$ не лежат в одном цепном классе, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что либо $y \notin \Omega(x, \varepsilon_0)$, либо $x \notin \Omega(y, \varepsilon_0)$. Допустим, что $y \notin \Omega(x, \varepsilon_0)$, и пусть $A$ — притягивающее множество с изолирующей окрестностью $\Omega(x, \varepsilon_0)$, а $A^*$ — его двойственное отталкивающее множество. Согласно лемме 1.15 $x$ и $y$ принадлежат $A \cup A^*$. Тогда $x \in A$, $y \in A^*$. Лемма доказана. □

---

[15] $x \notin A$, так как $x \notin U$; чтобы показать, что $x \notin A^*$, нужно учесть три момента: 1) $f(x) \in U$, 2) $U \cap A^* = \varnothing$ и 3) множество $A^*$ инвариантно. — *Примеч. ред.*

[16] В силу Факта, отмеченного выше при доказательстве леммы 1.15. — *Примеч. ред.*

Далее мы рассмотрим взаимосвязь захватывающих областей и *функций Ляпунова*, т.е. функций, которые не возрастают вдоль орбит.

**Лемма 1.17.** *Пусть* $(A, A^*)$ *— двойственная (притягивающая – отталкивающая) пара для* $f$*. Тогда существует такая непрерывная функция* $\varphi : X \to [0,1]$*, что*

(1) $\varphi|_{A^*} = 1$*,* $\varphi|_A = 0$ *и* $\varphi(x) \in (0,1)$ *для всех* $x \notin A \cup A^*$*;*

(2) $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$ *для всех* $x \notin A \cup A^*$.

**Доказательство.** Пусть $U$ — изолирующая окрестность множества $A$. Возьмем непрерывную функцию $\alpha : X \to [0,1]$ такую, что $\alpha(X - U) = 1$, $\alpha(f(\overline{U})) = 0$ и $\alpha(x) \in (0,1)$ для всех $x \in U - f(\overline{U})$. Например, в качестве $\alpha(x)$ можно взять функцию

$$\alpha(x) = \frac{d(x, f(\overline{U}))}{d(x, X - U) + d(x, f(\overline{U}))}.$$

Пусть $x \notin A \cup A^*$. Тогда $\mathrm{Orb}(x)$ пересекает $U - f(U)$ ровно в одной точке. Следовательно, значения $\alpha$ вдоль $\mathrm{Orb}(x)$ образуют либо последовательность $\ldots, 1, 1, 0, 0, \ldots$, либо последовательность $\ldots, 1, 1, a, 0, 0, \ldots$, где $a \in (0,1)$, в зависимости от того, пересекает $\mathrm{Orb}(x)$ границу $\partial(U - f(U))$ или нет. В любом случае — это невозрастающая последовательность.

Пусть $\alpha_n(x) = \alpha(f^n(x))$. Возьмем последовательность $a_n > 0$ такую, что $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n = 1$, и пусть

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \alpha_n.$$

Как сумма функций, невозрастающих вдоль любой $f$-орбиты, функция $\varphi$ является невозрастающей вдоль такой орбиты. Проверим другие требуемые условия для $\varphi$. Очевидно, что $\varphi|_{A^*} = 1$ и $\varphi|_A = 0$. Для любой точки $x \notin A \cup A^*$ функция $\alpha_n(x)$ не равна тождественно 1 для всех $n$ и не равна тождественно 0 для всех $n$. Поэтому $\varphi(x) \in (0,1)$. Наконец, для любой точки $x \notin A \cup A^*$ существует, по крайней мере, одно $n$ такое, что $\alpha_n(f(x)) < \alpha_n(x)$, значит, $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$ [17]. Лемма доказана. □

[17] Осталось проверить непрерывность функции $\varphi$. Действительно, $\varphi$ представляется рядом из непрерывных неотрицательных функций,

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 1.13.

**Доказательство.** По лемме 1.17 для любого $i \in \mathbb{N}$ существует функция $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$, для которой $\varphi_i^{-1}(1) = A_i^*$, $\varphi_i^{-1}(0) = A_i$, причем $\varphi_i$ строго убывает вдоль орбит из множества $X - (A_i \cup \cup A_i^*)$. Определим функцию $\varphi : X \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\varphi_i(x)}{3^i}.$$

Тогда $\varphi$ — непрерывная функция[18]. Если $x \notin \mathrm{CR}(f)$, то в силу леммы 1.15 найдется $i$ такое, что $x \notin A_i \cup A_i^*$. Следовательно, $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$. Тем самым доказан пункт (1) теоремы 1.13.

Если $x \in \mathrm{CR}(f)$, то $x \in A_i \cup A_i^*$ для всех $i$. Поэтому для любого $i$ либо $\varphi_i(x) = 0$, либо $\varphi_i(x) = 1$ . Значит, троичное разложение числа $\varphi(x)$ содержит только цифры 0 и 2, поэтому $\varphi(x)$ принадлежит стандартному канторовскому множеству $C$ (получающемуся удалением средней трети на каждом шаге). Таким образом, $\varphi(\mathrm{CR}(f)) \subset C$ и поэтому $\varphi(\mathrm{CR}(f))$ является компактным и нигде не плотным множеством. Это доказывает пункт (3) теоремы 1.13.

Наконец, если $x, y$ находятся в одном и том же цепном классе, то очевидно, что $\varphi(x) = \varphi(y)$[19]. Проверим обратное утверждение. Пусть $x, y \in \mathrm{CR}(f)$, причем $\varphi(x) = \varphi(y)$. Как было замечено выше, $2\varphi_i(x)$ является цифрой в $i$-м разряде троичного разложения $\varphi(x)$; значит, $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ для любого $i$. Тогда обе точки $x$ и $y$ находятся либо в $A_i$, либо в $A_i^*$. По лемме 1.16 $x$ и $y$ находятся в одном и том же цепном классе. Пункт (2) и теорема 1.13 доказаны. □

## Упражнения

Пусть $X$ — компактное метрическое пространство и $f : X \to \to X$ — гомеоморфизм.

---

который мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \alpha_n$. Поэтому функциональный ряд сходится равномерно и его сумма — непрерывная функция. — *Примеч. ред.*

[18] Как сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. — *Примеч. ред.*

[19] В силу леммы 1.16. — *Примеч. ред.*

**Упражнение 1.1.** Докажите, что точка $x \in X$ является периодической тогда и только тогда, когда ее орбита состоит из конечного числа точек.

**Упражнение 1.2.** Докажите, что точка $x \in X$ является периодической тогда и только тогда, когда ее орбита компактна.

**Упражнение 1.3.** Постройте гомеоморфизм $f$ такой, что $\mathrm{P}(f)$ не является замкнутым множеством.

**Упражнение 1.4.** Докажите, что для любого $x \in X$

$$\omega(x) = \bigcap_{N \geqslant 0} \overline{\{f^n(x) | n \geqslant N\}}.$$

**Упражнение 1.5.** Пусть $x \in X$. Докажите, что

(1) $\omega(x)$ не может быть объединением двух непересекающихся замкнутых инвариантных подмножеств;

(2) если $\omega(x)$ представляет собой объединение конечного числа периодических орбит, то $\omega(x)$, на самом деле, является периодической орбитой;

(3) если $\omega(x)$ представляет собой объединение счетного числа периодических орбит, то $\omega(x)$, на самом деле, является периодической орбитой.

А что можно сказать про случай, когда $\omega(x)$ является объединением несчетного семейства периодических орбит?

**Упражнение 1.6.** Докажите, что множество $R(f)$ рекуррентных точек всегда непусто. Постройте пример незамкнутого множества $R(f)$.

**Упражнение 1.7.** Докажите, что $x \in X$ — неблуждающая точка гомеоморфизма $f$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U$ точки $x$ в $X$ существует $n \neq 0$ такое, что $(f^n U) \cap U \neq \varnothing$, а также тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U$ точки $x$ в $X$ и любого натурального $N$ существует $n \geqslant N$ такое, что $(f^n U) \cap U \neq \varnothing$.

**Упражнение 1.8.** Докажите, что если $\Omega(f) = X$, то множество $\{x : x \in \omega(x)\}$ всюду плотно в $X$.

**Упражнение 1.9.** Докажите, что для любого $\delta > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что если последовательность точек $\{y_n\}$ удовлетворяет условию $d(y_n, x_n) < \eta$, где $\{x_n\}$ — $\eta$-цепь, то $\{y_n\}$ является $\delta$-цепью. В частности, точка $x \in X$ будет цепно-рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется периодическая $\varepsilon$-цепь, проходящая через $\varepsilon$-окрестность точки $x$.

**Упражнение 1.10.** Докажите, что множество $\mathrm{CR}(f)$ непусто, компактно, инвариантно и выполняется

$$\overline{\mathrm{P}(f)} \subset \mathrm{L}(f) \subset \Omega(f) \subset \mathrm{CR}(f).$$

Приведите примеры, показывающие, что каждое из данных включений может быть строгим.

**Упражнение 1.11.** Докажите, что для любого $\delta > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что если $x_0, \ldots, x_k$ — $\eta$-цепь для $f$, то $x_k, \ldots, x_0$ — $\delta$-цепь для $f^{-1}$.

**Упражнение 1.12.** Докажите, что в формулировке теоремы 1.4 слово «орбита» может быть заменено на «положительную полуорбиту» или «отрицательную полуорбиту».

**Упражнение 1.13.** Пусть $\Lambda \subset X$ — компактное $f$-инвариантное множество. Докажите, что $\Lambda$ минимально тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \geqslant 0$ такое, что для каждой точки $x \in \Lambda$ все точки из $\Lambda$ лежат в $\varepsilon$-окрестности множества $\{f^n(x)\}_{n=-N}^{N}$.

**Упражнение 1.14.** Пусть $\Lambda$ — минимальное множество для $f$. Докажите, что если $\Lambda_1$ — открытое инвариантное подмножество $\Lambda$, то $\Lambda_1 = \Lambda$.

**Упражнение 1.15.** Пусть гомеоморфизм $f : X \to X$ топологически транзитивен. Докажите, что любая $f$-инвариантная непрерывная функция $\varphi : X \to R$ постоянна ($\varphi$ называется инвариантной, если $\varphi f = \varphi$).

Ограничение гомеоморфизма $f$ на компактное инвариантное множество $\Lambda \subset X$ называется *топологически перемешивающим*, если для любых двух открытых множеств $U$ и $V$ в $\Lambda$ существует $N = N(U, V) \geqslant 1$ такое, что $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$ для любого $n \geqslant N$.

**Упражнение 1.16.** Найдите гомеоморфизм $f : X \to X$, который является транзитивным, но не топологически перемешивающим.

**Упражнение 1.17.** Пусть $f : X \to X$ и $g : X \to X$ — два гомеоморфизма, и пусть $h : X \to X$ топологически сопрягает $f$ и $g$. Докажите, что $h(\mathrm{Orb}(x, f)) = \mathrm{Orb}(h(x), g)$ для любого $x \in X$. Докажите также, что $h(\mathrm{P}(f)) = \mathrm{P}(g)$, $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$, $h(\mathrm{CR}(f)) = \mathrm{CR}(g)$.

**Упражнение 1.18.** Докажите, что в определении $C^r$-топологии на $\mathrm{Diff}^r(M)$ различные покрытия допустимыми координатными окрестностями дают эквивалентные $C^r$-топологии.

**Упражнение 1.19.** Приведите пример, когда множество $\mathrm{CR}(f)$ не может быть разложено в объединение непересекающихся транзитивных множеств.

**Упражнение 1.20.** Докажите, что если множество $X$ связно и $\mathrm{CR}(f) = X$, то $X$ представляет собой цепной класс.

**Упражнение 1.21.** Доказажите, что если $f : X \to X$ имеет единственный цепной класс $C$, то $X = C$.

**Упражнение 1.22.** Приведите пример, когда $\Omega(f) \neq X$, а единственное притягивающее множество есть $X$.

**Упражнение 1.23.** Пусть $f : S^1 \to S^1$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм и $\mathrm{P}(f) \neq \varnothing$. Докажите, что либо $\mathrm{CR}(f) = \mathrm{P}(f)$, либо $\mathrm{CR}(f) = S^1$.

**Упражнение 1.24.** Пусть $f : S^1 \to S^1$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм и $\mathrm{P}(f) = \varnothing$. Докажите, что $\mathrm{CR}(f) = S^1$.

**Упражнение 1.25.** Непрерывное отображение $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *поднятием* отображения $f : S^1 \to S^1$, если $\pi \circ F = f \circ \pi$, где $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ — проекция mod. Пусть $f$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм на $S^1$ и $F$ — его поднятие. Докажите, что

(1) $F$ монотонно возрастает,
(2) $F(t + 1) = F(t) + 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

**Упражнение 1.26.** Пусть $f : S^1 \to S^1$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм и $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — его поднятие. Докажите, что

(1) для любых $t \in \mathbb{R}$ предел

$$\rho(F, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(t) - t}{n}$$

существует, не зависит от $t$, поэтому этот предел можно обозначить как $\rho(F)$;

(2) если $F_1$ и $F_2$ — два поднятия $f$, то $\rho(F_1) - \rho(F_2)$ — целое число, таким образом, число $\rho(f) = \rho(F) \pmod 1$ не зависит от поднятия и называется *числом вращения* гомеоморфизма $f$.

**Упражнение 1.27.** Пусть $f, g : S^1 \to S^1$ — топологически сопряженные сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы. Докажите, что $\rho(f) = \rho(g)$.