

Содержание

Предисловие к русскому изданию	14
Предисловие	16
Благодарности.....	23
Глава 1.	
Введение	26
Глава 2.	
Дискретные сигналы и системы	35
2.1. Введение	35
2.2. Дискретные сигналы	36
2.3. Дискретные системы	42
2.3.1. Системы без памяти	43
2.3.2. Линейные системы	44
2.3.3. Стационарные системы	45
2.3.4. Причинность	46
2.3.5. Устойчивость	47
2.4. Линейные стационарные системы	48
2.5. Свойства линейных стационарных систем	53
2.6. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами	58
2.7. Представление сигналов и систем в частотной области	63
2.7.1. Собственные функции линейных стационарных систем.....	63
2.7.2. Мгновенно поданный экспоненциальный сигнал	68
2.8. Преобразование Фурье	70
2.9. Симметрии преобразования Фурье	76
2.10. Теоремы о преобразовании Фурье	79
2.10.1. Линейность преобразования Фурье.....	79
2.10.2. Временной и частотный сдвиги.....	79
2.10.3. Обращение времени.....	80
2.10.4. Дифференцирование по частоте	80
2.10.5. Теорема Парсеваля	80
2.10.6. Теорема о свертке	80
2.10.7. Модуляция, или теорема о произведении сигналов	81
2.11. Случайные дискретные сигналы.....	84
2.12. Краткое содержание главы.....	90
Задачи	90
Глава 3.	
Z-преобразование	117
3.1. Введение	117
3.2. Z-преобразование.....	117
3.3. Область сходимости z-преобразования	126
3.4. Обратное z-преобразование	132
3.4.1. Табличный метод	132
3.4.2. Метод простейших дробей	132

3.4.3.	Разложение в степенные ряды	137
3.5.	Свойства z -преобразования	138
3.5.1.	Линейность	139
3.5.2.	Задержка	140
3.5.3.	Умножение на экспоненциальную последовательность	141
3.5.4.	Дифференцирование $X(z)$	142
3.5.5.	Сопряжение комплексной последовательности	143
3.5.6.	Обращение времени	143
3.5.7.	Свертка последовательностей	144
3.5.8.	Теорема о начальном значении	145
3.5.9.	Несколько слов в заключение	145
3.6.	Z -преобразование и ЛС-системы	146
3.7.	Одностороннее z -преобразование	148
3.8.	Краткое содержание главы	150
	Задачи	151

Глава 4.

Дискретизация непрерывного сигнала	164	
4.1.	Введение	164
4.2.	Периодическая дискретизация	164
4.3.	Частотное представление дискретизации	167
4.4.	Восстановление сигнала с ограниченным спектром по его отсчетам	173
4.5.	Дискретная обработка непрерывных сигналов	176
4.5.1.	Дискретная обработка непрерывных сигналов ЛС-системами	177
4.5.2.	Импульсная инвариантность	182
4.6.	Непрерывная обработка дискретных сигналов	184
4.7.	Изменение частоты дискретизации с помощью дискретной обработки ..	187
4.7.1.	Уменьшение частоты дискретизации в целое число раз	188
4.7.2.	Увеличение частоты дискретизации в целое число раз	192
4.7.3.	Простые и практичные интерполяционные фильтры	195
4.7.4.	Изменение частоты дискретизации с рациональным множителем	198
4.8.	Многоскоростная обработка сигналов	201
4.8.1.	Смена порядка фильтрации и понижающей/повышающей дискретизации	202
4.8.2.	Многоступенчатые прореживание и интерполирование	203
4.8.3.	Полифазное разложение	204
4.8.4.	Полифазная реализация прореживающих фильтров	206
4.8.5.	Полифазная реализация интерполяционных фильтров	207
4.8.6.	Банки многоскоростных фильтров	209
4.9.	Цифровая обработка аналоговых сигналов	212
4.9.1.	Предварительная фильтрация для устранения эффекта наложения спектров	213
4.9.2.	Преобразование аналогового сигнала в цифровой	215
4.9.3.	Анализ ошибок квантования	220
4.9.4.	Преобразование цифрового сигнала в аналоговый	226
4.10.	Избыточная дискретизация и формирование шумов в АЦП и ЦАП	230
4.10.1.	Избыточно дискретизированный АЦП с простым квантованием	230
4.10.2.	Избыточно дискретизированный АЦП с формированием шумов	234

4.10.3. Избыточная дискретизация и формирование шумов в ЦАП	239
4.11. Краткое содержание главы	241
Задачи	242
Глава 5.	
Анализ линейных стационарных систем	276
5.1. Введение	276
5.2. Комплексная частотная характеристика ЛС-систем	277
5.2.1. Фаза частотной характеристики и групповая задержка	277
5.2.2. Иллюстрация эффекта групповой задержки и затухания	280
5.3. Системы, характеризующиеся линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами	284
5.3.1. Устойчивость и причинность	286
5.3.2. Обратные системы	287
5.3.3. Импульсная характеристика систем с рациональной системной функцией	289
5.4. КЧХ систем с рациональной системной функцией	291
5.4.1. КЧХ системы первого порядка	292
5.4.2. Примеры с кратными полюсами или нулями	296
5.5. Взаимосвязь АЧХ и ФЧХ	299
5.6. Все пропускающие системы	304
5.7. Минимально-фазовые системы	309
5.7.1. Минимально-фазовое и все пропускающее разложение	309
5.7.2. Компенсация воздействия КЧХ неминимально-фазовых систем	311
5.7.3. Свойства минимально-фазовых систем	315
5.8. Линейные системы с обобщенной линейной фазой	319
5.8.1. Системы с линейной фазой	320
5.8.2. Обобщенная линейная фаза	323
5.8.3. Причинные системы с обобщенной линейной фазой	325
5.8.4. Связь линейно-фазовых КИХ-систем с минимально-фазовыми	333
5.9. Краткое содержание главы	334
Задачи	337
Глава 6.	
Структуры для дискретных систем	368
6.1. Введение	368
6.2. Блок-схемы линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами	369
6.3. Сигнальный потоковый граф линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами	375
6.4. Основные структуры БИХ-систем	380
6.4.1. Прямые формы	381
6.4.2. Каскадные формы	381
6.4.3. Параллельные формы	385
6.4.4. Обратная связь в БИХ-системах	387
6.5. Транспонированные формы	389
6.6. Основные структуры КИХ-систем	392
6.6.1. Прямая форма	392

6.6.2.	Каскадная форма	393
6.6.3.	Структуры КИХ-систем с линейной фазой	393
6.7.	Решетчатые фильтры	396
6.7.1.	Решетчатые КИХ-фильтры	396
6.7.2.	Решетчатая структура с одними полюсами (All-Pole Lattice Structure)	402
6.7.3.	Обобщение решетчатых систем	404
6.8.	Обзор проблем цифрового представления	405
6.8.1.	Численное представление	405
6.8.2.	Квантование при реализации систем	408
6.9.	Квантование коэффициентов	411
6.9.1.	Квантование коэффициентов в БИХ-системах	411
6.9.2.	Пример квантования коэффициентов в эллиптическом фильтре	412
6.9.3.	Полюсы квантованных секций второго порядка	417
6.9.4.	Квантование коэффициентов в КИХ-системах	418
6.9.5.	Пример квантования оптимального КИХ-фильтра	420
6.9.6.	Поддержка линейной фазы	423
6.10.	Шумы округления в цифровых фильтрах	424
6.10.1.	Анализ прямой формы БИХ-структур	425
6.10.2.	Масштабирование в реализациях БИХ-систем с фиксированной точкой	432
6.10.3.	Пример анализа каскада БИХ-структур	436
6.10.4.	Анализ прямой формы КИХ-систем	440
6.10.5.	Реализация дискретных систем в арифметике с плавающей точкой ..	444
6.11.	Предельные циклы при отсутствии входного сигнала в реализациях цифровых БИХ-фильтров	446
6.11.1.	Предельные циклы, возникающие при округлении и усечении	446
6.11.2.	Предельные циклы, вызываемые переполнениями	448
6.11.3.	Предупреждение предельных циклов	449
6.12.	Краткое содержание главы	450
	Задачи	451
Глава 7.		
Техника проектирования фильтров		
7.1.	Введение	477
7.2.	Спецификации фильтров	478
7.3.	Проектирование дискретных БИХ-фильтров, основанное на непрерывных фильтрах	480
7.3.1.	Разработка фильтров с помощью импульсной инвариантности	481
7.3.2.	Билинейное преобразование	486
7.4.	Дискретные фильтры Баттерворта, Чебышева и эллиптический	491
7.4.1.	Примеры проектирования БИХ-фильтров	492
7.5.	Преобразования частоты БИХ-фильтров нижних частот	503
7.6.	Разработка КИХ-фильтров оконным методом	511
7.6.1.	Стандартные окна и их свойства	515
7.6.2.	Обобщенная линейная фаза	516
7.6.3.	Метод Кайзера проектирования фильтров	520
7.7.	Примеры проектирования КИХ-фильтров методом Кайзера	524

7.7.1.	Фильтр нижних частот	524
7.7.2.	Фильтр верхних частот	526
7.7.3.	Дискретный дифференциатор	529
7.8.	Оптимальная аппроксимация КИХ-фильтров	531
7.8.1.	Оптимальный фильтр нижних частот I типа	538
7.8.2.	Оптимальный фильтр нижних частот II типа	543
7.8.3.	Алгоритм Паркса – Макклеллана	544
7.8.4.	Характеристики оптимальных КИХ-фильтров	547
7.9.	Примеры равнопульсирующей КИХ-аппроксимации	548
7.9.1.	Фильтр нижних частот	549
7.9.2.	Компенсация для схемы запоминания нулевого порядка	551
7.9.3.	Полосовой фильтр	553
7.10.	Комментарии к дискретным БИХ- и КИХ-фильтрам	554
7.11.	Проектирование фильтров для повышения частоты дискретизации	556
7.12.	Краткое содержание главы	559
	Задачи	560
Глава 8.		
	Дискретное преобразование Фурье	601
8.1.	Введение	601
8.2.	Представление периодических последовательностей: дискретные ряды Фурье	601
8.3.	Свойства дискретных рядов Фурье	605
8.3.1.	Линейность	606
8.3.2.	Сдвиг последовательности	606
8.3.3.	Дуальность	606
8.3.4.	Симметричность	607
8.3.5.	Периодическая свертка	607
8.3.6.	Обзор свойств представления периодических последовательностей дискретными рядами Фурье	609
8.4.	Преобразование Фурье периодических сигналов	609
8.5.	Дискретизация Фурье-образа	614
8.6.	Представление Фурье конечных последовательностей: дискретное преобразование Фурье	617
8.7.	Свойства дискретного преобразования Фурье	620
8.7.1.	Линейность	621
8.7.2.	Циклический сдвиг последовательности	622
8.7.3.	Дуальность	624
8.7.4.	Симметрия	625
8.7.5.	Циклическая свертка	628
8.7.6.	Обзор свойств дискретного преобразования Фурье	631
8.8.	Вычисление линейной свертки через ДПФ	632
8.8.1.	Линейная свертка двух конечных последовательностей	633
8.8.2.	Циклическая свертка как линейная с наложением во времени	634
8.8.3.	Реализация ЛС-систем через дискретное преобразование Фурье	637
8.9.	Дискретное косинусное преобразование	643
8.9.1.	Определение дискретного косинусного преобразования	644
8.9.2.	Определение ДКП-1 и ДКП-2	644

8.9.3.	Связь между ДПФ и ДКП-1.....	647
8.9.4.	Связь между ДПФ и ДКП-2.....	648
8.9.5.	Уплотнение энергии при ДКП-2	649
8.9.6.	Приложения ДКП	652
8.10.	Краткое содержание главы.....	653
	Задачи	654
Глава 9.		
Вычисление дискретного преобразования Фурье.....		
9.1.	Введение	683
9.2.	Прямое вычисление дискретного преобразования Фурье	684
9.2.1.	Прямое вычисление по определению ДПФ.....	685
9.2.2.	Алгоритм Герцеля	686
9.2.3.	Использование как симметрии, так и периодичности	689
9.3.	Прореживание по времени.....	689
9.3.1.	Обобщение и программирование БПФ	695
9.3.2.	Вычисления на месте	695
9.3.3.	Альтернативные формы.....	698
9.4.	Прореживание по частоте	701
9.4.1.	Вычисление на месте	704
9.4.2.	Альтернативные формы.....	705
9.5.	Подробное исследование алгоритма	706
9.5.1.	Нумерация	707
9.5.2.	Коэффициенты	709
9.6.	Более общие алгоритмы БПФ.....	709
9.6.1.	Алгоритмы для составных N	709
9.6.2.	Оптимизированные алгоритмы БПФ	712
9.7.	Реализация дискретного преобразования Фурье с помощью свертки.....	712
9.7.1.	Обзор алгоритма Винограда–Фурье.....	712
9.7.2.	Преобразование с линейной частотной модуляцией.....	713
9.8.	Эффекты, связанные с конечной длиной регистров.....	718
9.9.	Краткое содержание главы.....	725
	Задачи	725
Глава 10.		
Приложение ДПФ к Фурье-анализу.....		
10.1.	Введение	753
10.2.	ДПФ и Фурье-анализ сигналов.....	753
10.3.	ДПФ-анализ синусоидальных сигналов.....	757
10.3.1.	Эффект обработки методом окна	757
10.3.2.	Свойства окон.....	760
10.3.3.	Спектральная дискретизация	762
10.4.	Преобразование Фурье, зависящее от времени	769
10.4.1.	Обратимость $X[n, \lambda]$	775
10.4.2.	Интерпретация $X[n, \lambda]$ в терминах банков фильтров.....	775
10.4.3.	Эффект обработки окном.....	776
10.4.4.	Дискретизация по времени и по частоте.....	778
10.4.5.	Восстановление сигнала методом перекрытия с суммированием	780



10.4.6.	Обработка сигналов, основанная на зависящем от времени преобразовании Фурье.....	784
10.4.7.	Интерпретация зависящего от времени преобразования Фурье как банка фильтров.....	785
10.5.	Примеры Фурье-анализа нестационарных сигналов.....	788
10.5.1.	Зависящий от времени Фурье-анализ речевых сигналов	789
10.5.2.	Зависящий от времени Фурье-анализ радарных сигналов	791
10.6.	Фурье-анализ стационарных случайных сигналов: периодограмма	794
10.6.1.	Периодограмма.....	796
10.6.2.	Свойства периодограмм	797
10.6.3.	Усреднение периодограмм	801
10.6.4.	Вычисление усредненных периодограмм через ДПФ	802
10.6.5.	Пример периодограммного анализа	803
10.7.	Спектральный анализ случайных сигналов с помощью оценки автокорреляционной функции	807
10.7.1.	Вычисление корреляции и оценка спектра мощности с помощью ДПФ	810
10.7.2.	Оценка спектра мощности шума квантования	812
10.7.3.	Оценка спектра мощности речи	817
10.8.	Краткое содержание главы.....	820
	Задачи	822
Глава 11.		
Параметрическое моделирование сигнала		
		849
11.1.	Введение	849
11.2.	Полюсное моделирование сигналов	850
11.2.1.	Аппроксимация методом наименьших квадратов	851
11.2.2.	Модель, обратная методу наименьших квадратов	851
11.2.3.	Формулировка задачи линейного предсказания для полюсной модели	853
11.3.	Модели детерминированных и случайных сигналов.....	854
11.3.1.	Полюсное моделирование детерминированных сигналов с конечной энергией	855
11.3.2.	Моделирование случайных сигналов.....	855
11.3.3.	Минимальный средний квадрат ошибки	856
11.3.4.	Свойство согласования автокорреляции.....	857
11.3.5.	Определение коэффициента усиления G	857
11.4.	Оценка корреляционной функции	859
11.4.1.	Автокорреляционный метод.....	859
11.4.2.	Ковариационный метод.....	861
11.4.3.	Сравнение методов	863
11.5.	Порядок модели	864
11.6.	Анализ полюсного спектра	866
11.6.1.	Полюсный анализ речевых сигналов.....	867
11.6.2.	Расположение полюсов	870
11.6.3.	Полюсное моделирование синусоидальных сигналов	871
11.7.	Решение автокорреляционных нормальных уравнений.....	874
11.7.1.	Рекурсия Левинсона – Дарбина	875

11.7.2. Вывод алгоритма Левинсона–Дарбина	876
11.8. Решетчатые фильтры	879
11.8.1. Решетчатый фильтр ошибки предсказания	880
11.8.2. Решетчатая полюсная модель	882
11.8.3. Прямое вычисление k -параметров	883
11.9. Краткое содержание главы	885
Задачи	885
Глава 12.	
Дискретное преобразование Гильберта	902
12.1. Введение	902
12.2. Вещественная и мнимая части Фурье-образа причинной последовательности	904
12.3. Теоремы достаточности для конечных последовательностей	908
12.4. Взаимосвязь абсолютного значения и фазы	914
12.5. Соотношения преобразования Гильберта для комплекснозначных последовательностей	915
12.5.1. Проектирование преобразователя Гильберта	919
12.5.2. Представление полосовых сигналов	922
12.5.3. Полосовая дискретизация	924
12.6. Краткое содержание главы	927
Задачи	927
Глава 13.	
Кепстральный анализ и гомоморфное обращение свертки	937
13.1. Введение	937
13.2. Определение кепстра	938
13.3. Определение комплексного кепстра	939
13.4. Свойства комплексного логарифма	941
13.5. Другие выражения для комплексного кепстра	942
13.6. Свойства комплексного кепстра	943
13.6.1. Экспоненциальные последовательности	943
13.6.2. Минимально- и максимально-фазовые последовательности	946
13.6.3. Соотношения между вещественным и комплексным кепстрами	947
13.7. Вычисление комплексного кепстра	949
13.7.1. Развертка фазы	950
13.7.2. Расчет комплексного кепстра с помощью логарифмической производной	953
13.7.3. Минимально-фазовая реализация для минимально-фазовых последовательностей	955
13.7.4. Рекурсивные вычисления комплексного кепстра для минимально- и максимально-фазовых последовательностей	955
13.7.5. Использование экспоненциального взвешивания	956
13.8. Вычисление комплексного кепстра с помощью корней многочлена	957
13.9. Обращение свертки с помощью комплексного кепстра	959
13.9.1. Гомоморфное обращение свертки минимально-фазового и фазового компонентов	960

13.9.2. Гомоморфное обращение свертки минимально- и максимально-фазового компонентов	961
13.10. Комплексный кепстр для простой многолучевой модели	963
13.10.1. Расчет комплексного кепстра путем анализа z -преобразования	966
13.10.2. Вычисление кепстра с помощью ДПФ	967
13.10.3. Гомоморфное обращение свертки для многолучевой модели	970
13.10.4. Минимально-фазовое разложение	974
13.10.5. Обобщения	979
13.11. Приложения кепстра для обработки речи	980
13.11.1. Модель речевых сигналов	980
13.11.2. Пример гомоморфного обращения свертки для речевого сигнала	983
13.11.3. Оценка параметров модели речи	985
13.11.4. Приложения	988
13.12. Краткое содержание главы	988
Задачи	988

Приложение А.

Случайные сигналы	1000
А.1. Дискретные случайные процессы	1000
А.2. Средние	1001
А.2.1. Определения	1001
А.2.2. Временные средние	1004
А.3. Свойства корреляционной и ковариационной последовательностей	1005
А.4. Преобразование Фурье случайных сигналов	1007
А.5. Использование z -преобразования при вычислении средней мощности	1009

Приложение Б.

Непрерывные фильтры	1012
Б.1. Фильтры Баттерворта нижних частот	1012
Б.2. Фильтры Чебышева	1013
Б.3. Эллиптические фильтры	1015

Приложение В.

Ответы к избранным задачам	1017
---	------

Литература	1027
-------------------------	------

Литература на русском языке	1041
--	------

Предметный указатель	1044
-----------------------------------	------

Предисловие к русскому изданию

Уважаемые читатели!

Вашему вниманию предлагается перевод третьего переработанного издания учебника А. Оппенгейма и Р. Шафера «Цифровая обработка сигналов», впервые опубликованного в 1975 г. Переводы на русский язык предыдущих изданий выходили из печати в нашей стране дважды и имели вполне приличные тиражи, но до настоящего времени являются своего рода бестселлерами как для студентов старших курсов технических вузов, так и для специалистов, чья деятельность связана с применением цифровых технологий в различных областях научно-технической деятельности. Для многих инженеров, работавших в области обработки радиолокационных сигналов, перевод первого издания книги стал своего рода откровением, позволившим по-новому, с фундаментальных позиций взглянуть на проблематику цифровой обработки сигналов. Настоящее издание выгодно отличается от предыдущих тем, что наряду с сохранением фундаментального подхода к проблематике цифровой обработки в нем учтены те изменения и достижения науки и технологий, которые характерны для последних десятилетий.

Читателям, знакомым с проблемами применения цифровых технологий, безусловно, известно, что в последние годы появились новые концепции цифровой обработки, резко увеличились функциональные возможности и производительность схем аналого-цифрового преобразования, универсальных и специализированных (в том числе программируемых цифровых процессоров обработки сигналов), появился значительный ряд новых приложений.

Технологии цифровой обработки сигналов произвели революционные изменения в целом ряде областей науки и техники, среди которых можно выделить следующие:

- *беспроводные телекоммуникации;*
- *цифровое теле- и радиовещание;*
- *высокотехнологичная медицинская диагностическая техника и технологии хранения и анализа медицинских данных;*
- *космические технологии (дальняя связь, дистанционное зондирование Земли, анализ многоспектральных изображений);*
- *научное производство технологий (сейсморазведка, управление и контроль производственными процессами, неразрушающий контроль конструкций и материалов);*
- *радиолокация в различных частотных диапазонах, гидролокация;*
- *научное приборостроение;*
- *автомобилестроение;*
- *бытовая техника.*

Этот список можно продолжать очень долго.

Учитывая подобный перечень научно-производственных направлений, можно сделать очевидный вывод о непрерывном возрастании потребности в подготовке специалистов в области цифровой обработки сигналов. Новое издание учебника А. Оппенгейма и Р. Шафера полностью отвечает этим потребностям. Об этом свидетельствуют, в частности, серьезные достижения в технологиях цифровой обработки, которых добились специалисты предприятий, входящих в состав компании

ОАО «РТИ», в ходе разработки и создания принципиально новых образцов радиолокационной и телекоммуникационной техники, обладающих поистине рекордными параметрами с точки зрения критерия «эффективность — качество». Могу ответственно заявить, что для ведущих специалистов-цифровиков ОАО «РТИ» предыдущие издания этой книги всегда были «настолярными».

Учебник написан на основе курсов лекций, прочитанных в Массачусетском технологическом институте (MIT) и Технологическом университете штата Джорджия (Georgia Tech). Большинство специалистов, как молодых, так и весьма «зрелых», всегда отмечали высокий научный уровень книги, серьезную фундаментальную базу, лежащую в основе теоретической части. В новом издании в значительной степени увеличено число примеров, иллюстрирующих основные концептуальные положения цифровой обработки, а также количество задач, предлагаемых читателям для самостоятельного решения. В примерах, демонстрирующих реальные результаты применения методов и алгоритмов цифровой обработки, используется пакет MATLAB, который является мощным вычислительным инструментом и широко используется студентами разных курсов технических вузов, аспирантами и уже сложившимися специалистами. Однако для закрепления материала книги авторы рекомендуют читателям не пренебрегать и самостоятельным созданием отдельных программ обработки сигналов.

Учебник рассчитан на подготовленного читателя, освоившего курсы математического анализа и основ теории функций комплексного переменного. В книгу также включены элементы теории непрерывных линейных систем, в том числе преобразования Лапласа и Фурье. С этими разделами учебник стал вполне самостоятельным. В последние параграфы отдельных глав включены некоторые ранее не рассматриваемые темы (например, шумы квантования), для освоения которых потребуется знакомство со стохастическими сигналами. Краткий обзор необходимого предварительного материала включен в приложение.

Этот весьма обширный теоретический и практический материал структурирован таким образом, чтобы его можно было гибко использовать на любом уровне обучения (бакалаврском, магистерском, аспирантском). Основываясь на отработанной методологии преподавания, авторы предлагают варианты компоновки курсов и различные последовательности самостоятельного изучения материала. В предисловии авторы приводят достаточно подробное изложение содержания книги.

Книга будет полезна практически всем категориям учащихся (студентов, аспирантов) и специалистов, которые в своей деятельности сталкиваются с вопросами цифровой обработки сигналов и с более широким кругом вопросов разработки информационно-телекоммуникационных систем и комплексов, использующих цифровые технологии. Надеюсь, что российские читатели не просто познакомятся с самыми современными методами цифровой обработки, но и сумеют с помощью этой книги добиться новых замечательных успехов в создании перспективных образцов инфокоммуникационных систем и комплексов различного назначения.

С. Ф. Боев

*доктор экономических наук, профессор,
лауреат Государственной премии РФ,
генеральный директор ОАО «РТИ»*

Предисловие

Книга, предлагаемая вашему вниманию, — третье переработанное издание нашего учебника «Цифровая обработка сигналов», опубликованного в 1975 г. То весьма популярное издание вышло в свет, когда цифровая обработка сигналов была в самом начале пути, но уже начала стремительно развиваться. В то время этот предмет преподавали только на старших курсах в небольшом числе технических вузов. Учебник 1975 г. предназначался именно для таких курсов. Его до сих пор издают и с успехом используют как в США, так и за рубежом.

К 80 гг. темпы исследований и развития технологий интегральных схем показали, что цифровая обработка сигналов (ЦОС) смогла реализовать потенциал, заложенный в 1970-х годах. Широкое распространение и важность ЦОС сделали насущной задачу пересмотра первого издания. Однако при попытках переработки текста стало ясно, что необходимо внести так много изменений и дополнений, что разумнее написать новый учебник, основанный на исходной книге. Мы назвали новый учебник, изданный в 1989 г., «Обработка сигналов в дискретном времени»¹, подчеркивая, что большая часть теории и практических методов, представленных в нем, применима к более широкому классу сигналов и систем, будь то аналоговые или цифровые.

К моменту издания «Обработки сигналов в дискретном времени» основы ЦОС стали преподавать уже на начальных курсах, а линейные системы входили иногда составной частью в лекции для студентов первого года обучения, а несколько более сложные разделы — в курсы третьего или четвертого года или в самое начало выпускного курса. Поэтому необходимо было значительно расширить и углубить темы, посвященные линейным системам, дискретизации, многоскоростной обработке сигналов, приложениям и спектральному анализу. Кроме того, для иллюстрации трудных понятий и важных приемов в новый учебник было включено более 400 задач, помогающих освоению материала.

За десять лет, прошедших с момента публикации «Обработки сигналов в дискретном времени», появились новые концепции, имеющие большое значение, возможности цифровых интегральных схем выросли экспоненциально, и открылся значительный ряд новых приложений. Однако основная теория и фундаментальные приемы остаются в значительной степени прежними, хотя сместились акценты и изменилась методология преподавания. Поэтому, анализируя предстоящее редактирование, необходимое для поддержания этого учебника на современном уровне, мы обнаружили, что предстоит менее решительная переработка текста, чем предыдущая. При работе над текстом мы руководствовались тем принципом, что главная цель учебника — раскрыть объект, а не закамуфлировать его излишними усложнениями и подробностями. В связи с этим наша цель последней подготовки текста — сделать предмет ОДС еще более доступным для студентов и практикующих инженеров, не исключая при этом из текста те концепции, которые мы считаем важными и составляющими основу этой области знаний. Наконец, мы значительно расширили темы, посвященные многоскоростной обработке сигналов, ввиду важности процессов дискретизации аналоговых сигналов, их восстановления по дискретным отсчетам и реализации цифровых фильтров. Был добавлен раздел о косинусном пре-

¹Оригинальное название книги — «Discrete-Time Signal Processing», что переводится как «Обработка сигналов в дискретном времени». — *Примеч. перев.*

образовании, играющем центральную роль при сжатии данных. С другой стороны, из книги был удален некоторый материал, который, как мы считаем, имеет меньшее значение в настоящей редакции учебника или соответствует более сложным книгам, предназначенным студентам последнего года обучения или дипломированным специалистам. Многие удаленные из основного текста материалы (например основные результаты, касающиеся кепстров) вошли в задачи для самостоятельного решения.

Основные усилия по последнему пересмотру текста были направлены на задачи и примеры. Мы значительно увеличили число примеров, важных для иллюстрации и понимания основных концепций предмета. Не избежали этой участи и задачи для самостоятельного решения. Кроме того, задачи были реорганизованы согласно их уровню сложности, а ответы приведены лишь для определенного типа задач. Методическое пособие для преподавателя, доступное в издательстве, содержит обновленные решения всех задач, опубликованных в учебнике. Решения были подготовлены Ли Лийе (Li Lee) и Майей Сэд (Maya Said) из Массачусетского технологического института (MIT) и Жорданом Розенталем (Jordan Rosenthal) и Грегом Слэбоу (Greg Slabaugh) из Технологического университета Джорджии (Georgia Tech). Туда же вошли некоторые задачи экзамена наших курсов, прочитанных в MIT и Технологическом университете.

Как и в предыдущих версиях учебника, мы предполагаем, что читатель владеет курсом математического анализа и основами теории функций комплексного переменного. В целях расширения аудитории в этом издании мы воздержались от использования комплексного интеграла вдоль контура. Теория непрерывных линейных систем, включая преобразования Лапласа и Фурье, которая входит в программы большинства курсов, все еще остается центральной темой книги. Вместе с ней учебник самодостаточен. В частности, освоить предмет может и читатель, не обладающий предварительным опытом работы с дискретными сигналами, преобразованием Фурье, z -преобразованием и т. п. В последние параграфы отдельных глав включены некоторые темы (например шум квантования), для освоения которых потребуется знакомство со стохастическими сигналами. Краткий обзор необходимого предварительного материала включен в гл. 2 и приложение А.

Многие современные учебники, посвященные обработке сигналов, содержат задачи, предназначенные для решения на компьютере. В нашей книге тоже есть широкий класс задач, которые легко переформулировать для этой цели. Как и в первом издании, по ряду причин мы намеренно опускаем описание специальных программ, осуществляющих алгоритмы, представленные здесь. Главная из них — существование массы недорогих программных пакетов для обработки сигналов, удобных для иллюстрации и реализации алгоритмов обработки сигналов на любых широко распространенных персональных компьютерах и рабочих станциях. Пакеты снабжены полной документацией и обладают превосходной технической поддержкой. Во многих из них предусмотрен дружественный интерфейс, облегчающий работу с программами. Кроме того, они находятся в состоянии постоянного совершенствования, предполагающего доступность программного обеспечения для использования в компьютерных классах. Мы разделяем энтузиазм многих пользователей программы MATLAB, в число которых входит все большее и большее количество студентов с разных курсов. Для разработки примеров, иллюстрирующих основные методы, освещенные в книге, мы предпочитаем пользоваться таким мощным вычислительным инструментом, как MATLAB. Однако сложности, связанные с про-

граммным синтаксисом, затмевают тонкости концепций и путей их применения. Мы твердо считаем, что исключительно полезен «ручной опыт». Действительно, программы типа MATLAB позволяют студентам реализовывать системы обработки стохастических сигналов на их персональных компьютерах, и мы чувствуем, что это приносит огромную пользу тем студентам, которые уже усвоили основные принципы и сумеют отделить ошибки программирования от концептуальных ошибок. По этим причинам методическое руководство преподавателя содержит раздел с указаниями для решения заданий на компьютере, представленные в недорогих изданиях: Макклеллан и др. «Упражнения для решения на компьютере по обработке сигналов с использованием MATLAB 5» (McClellan et al. *Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB 5*) и Бак, Дэниэл и Зингер «Компьютерное исследование сигналов и систем с помощью MATLAB» (Buck, Daniel and Singer. *Computer Explorations in Signals and Systems Using MATLAB*). Обе книги доступны в издательстве Prentice-Hall. Методическое руководство связывает разделы названных книг с конкретными параграфами, примерами и задачами нашего учебника, что позволяет преподавателям разрабатывать задания для лабораторных работ с учетом материала и примеров, освоенных в аудитории, и связать эти задания с традиционной аналитической самостоятельной работой, закрепляющей концепции, пройденные с преподавателем.

Материал организован так, чтобы его можно было гибко использовать как на бакалаврском, так и на магистерском уровне. Типичный семестровый бакалаврский курс по выбору может состоять из § 2.1–2.10, гл. 3, § 4.1–4.7, 5.1–5.4, 6.1–6.6, 7.1–7.4 и короткого обзора § 7.5–7.7. Если студенты уже изучали дискретные системы и сигналы в общих курсах, посвященных сигналам и системам, материал гл. 2, 3 и 4 можно подать в сильно сокращенном виде, экономя время для освоения гл. 8. На первом курсе магистратуры можно дополнить перечисленные темы за счет параграфов гл. 5, не охваченных начальным курсом, обсуждения многоскоростной обработки сигналов (§ 4.8), демонстрации некоторых эффектов квантования, введенных в § 4.9, и возможного введения в формирование шумов при переходе от аналогового сигнала к цифровому и наоборот (§ 4.10). Магистерский курс должен также включать расширенный рассказ об эффектах квантования, которым посвящены § 6.7–6.10, обсуждение оптимальных КИХ-фильтров, как сделано в § 7.8–7.10, и подробное рассмотрение дискретного преобразования Фурье (гл. 8) и его вычисления с использованием быстрого преобразования Фурье (гл. 9). Освоение дискретного преобразования Фурье можно сделать намного эффективнее, если привлечь большое число примеров из гл. 10. В двухсеместровом магистерском курсе можно использовать полный текст книги, в том числе новые главы о параметрическом моделировании сигналов (гл. 11) и кепстре (гл. 13), а также целый ряд неосвещенных в предыдущих изданиях актуальных тем. В любом случае задания на самостоятельное закрепление теоретического материала в конце каждой главы можно выполнять как на компьютере, так и без него.

Мы завершаем предисловие кратким обзором содержания всех глав, обращая особое внимание на новые подразделы, включенные в настоящее издание.

В гл. 2 вводится класс стандартных дискретных сигналов и систем и определяются такие основные свойства, как линейность, стационарность, устойчивость и причинность. Особое внимание в книге уделено линейным стационарным системам ввиду богатого набора инструментов, доступных для проектирования и анализа этого класса систем. В частности, в гл. 2 мы излагаем представление линей-

ных стационарных систем во временной области с помощью дискретной свертки и вводим класс линейных стационарных систем, описываемых линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами. В гл. 6 углубляется изучение этого класса систем. Кроме того, в гл. 2 мы вводим частотное представление сигналов и систем, используя преобразование Фурье. Центральное место в гл. 2 отведено представлению последовательностей в терминах преобразования Фурье, т. е. в виде линейной комбинации комплексных экспонент, и изучению основных свойств этого преобразования.

В гл. 3 мы исследуем z -преобразование, обобщающее преобразование Фурье. Глава сфокусирована на основных теоремах и свойствах z -преобразования. Не обойден вниманием и прием разложения дробей в сумму элементарных, облегчающий вычисление обратного преобразования. В это издание включен раздел об одностороннем z -преобразовании. В гл. 5 результаты, полученные в гл. 2 и 3, интенсивно используются при подробном обсуждении представления и анализа линейных стационарных систем. Хотя материал, вошедший в главы 2 и 3, может быть знаком многим студентам, большинство вводных курсов по дискретным сигналам и системам не дают достаточно глубокого или широкого изучения данных тем. Кроме того, в этих главах вводится нотация, которая будет использована во всем тексте учебника. Таким образом, мы советуем изучить главы 2 и 3 как можно основательнее, чтобы обрести уверенность в понимании основных понятий дискретных сигналов и систем.

В гл. 4 проводится детальный анализ связи непрерывных сигналов с дискретными, когда последние получаются в процессе периодической дискретизации непрерывных. Анализ включает в себя изучение теоремы Найквиста¹. Кроме того, мы обсуждаем повышение и понижение частоты дискретизации, что используется, например, в системах многоскоростной обработки сигналов. Глава заканчивается обсуждением некоторых практических приложений, встречающихся при конвертировании непрерывных сигналов в дискретные, включая предварительную фильтрацию для удаления наложения спектров, моделирование эффектов квантования по уровню, когда дискретные сигналы представляются цифровым способом, и дискретизацию с повышенной частотой, упрощающую переход от аналоговых сигналов к дискретным, и наоборот. В третье издание включены новые примеры шума квантования, обсуждаются интерполяционные фильтры, получаемые на основе сплайнов, а также рассматриваются многокаскадная интерполяция и двухканальные многоскоростные банки фильтров.

В гл. 5 мы применяем концепции, развитые в предыдущих главах, для подробного исследования свойств линейных стационарных систем. Мы определяем класс идеальных частотно-избирательных фильтров и развиваем представление систем, описываемых линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, как с помощью системных функций, так и с помощью нулей и полюсов, — класс систем, чья реализация подробно изучается в гл. 6. Кроме того, в гл. 5 мы определяем и обсуждаем групповую задержку, фазочастотную характеристику и фазовое искажение, а также связь между фазочастотной и амплитудно-частотной характеристиками систем, включая обсуждение минимально-фазовых, всепропускающих систем и систем с обобщенной линейной фазой. В третье издание также включен новый пример, демонстрирующий влияние групповой задержки и АЧХ на выходной сигнал системы.

¹Теорема Котельникова в отечественной литературе. — *Примеч. перев.*

В гл. 6 мы фокусируем внимание на системах, описываемых линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, и развиваем их представление в терминах блок-схем и потоковых графов. Многое в этой главе посвящено многообразию важных структур систем и сравнению некоторых их свойств. Важность такого обсуждения и множество структур фильтров имеют отношение к тому факту, что при практической реализации дискретных систем влияние неточностей коэффициентов и арифметических округлений сильно зависит от использованного варианта структуры. Хотя рассматриваемые вопросы не связаны с различиями между дискретными и цифровыми системами, мы иллюстрируем их в этой главе в контексте именно цифровой реализации, обсуждая эффекты квантования коэффициентов и шумов арифметических округлений, имеющих место в цифровых фильтрах. В новом разделе подробно обсуждаются решетчатые КИХ- и БИХ-фильтры, реализующие разностные уравнения с постоянными коэффициентами. В гл. 6, а также в гл. 11 говорится о том, что этот класс фильтров благодаря своим свойствам оказывается очень важным для решения целого ряда прикладных задач. Как правило, во многих работах при обсуждении решетчатых фильтров их значимость тесно связывают с использованием линейного предсказания для анализа и моделирования сигналов. Однако важность решетчатых структур не зависит от того, каким именно образом было получено реализуемое ими разностное уравнение. Так, это разностное уравнение может быть выведено в результате применения самых разных способов синтеза фильтров из гл. 7 или получено в результате моделирования сигналов, о котором идет речь в гл. 11.

В то время как гл. 6 полностью посвящена формам представления и реализации систем, описываемых линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, в гл. 7 исследуются процедуры вычисления коэффициентов уравнений этого класса для аппроксимации желаемых характеристик. Методы проектирования делятся на два класса: для фильтров с бесконечной импульсной характеристикой и для фильтров с конечной импульсной характеристикой. Новые примеры синтеза БИХ-фильтра призваны продемонстрировать свойства различных методов аппроксимации. Новый пример расчета интерполирующего фильтра подчеркивает практические аспекты применения КИХ- и БИХ-фильтров.

В теории непрерывных линейных систем преобразование Фурье является основным теоретическим инструментом для представления сигналов и систем. В дискретном же случае многие системы и алгоритмы обработки сигналов включают явное вычисление преобразования Фурье. В то время как преобразование Фурье не может быть вычислено, дискретная его версия поддается вычислению и служит адекватным представлением сигналов конечной длины. В гл. 8 вводится понятие дискретного преобразования Фурье (ДПФ), исследуются его свойства, а также его связь с преобразованием Фурье, дискретизированным по времени. В этой главе также предлагается введение в дискретное косинусное преобразование, которое играет важную роль во многих приложениях, включая сжатие аудио- и видеосигналов.

В гл. 9 собрана богатая коллекция алгоритмов для вычисления или генерирования ДПФ, включая алгоритм Герцеля, алгоритмы быстрого преобразования Фурье и преобразования с линейной частотной модуляцией. В третьем издании повышающая и понижающая дискретизация, о которой идет речь в гл. 4, используется для более подробного изучения сущности алгоритмов БПФ. Кроме того, в этой главе говорится о том, что благодаря развитию технологий существенно изменились показатели оценки эффективности алгоритмов обработки сигналов. В 70-е гг., когда

вышла в свет наша первая книга, требуемая память и арифметические операции (умножения, а также сложения с плавающей запятой) обходились дорого, и эффективность алгоритмов, как правило, оценивалась с точки зрения количества необходимых ресурсов. В наше время для увеличения скорости и уменьшения энергозатрат при реализации алгоритмов обработки цифровых сигналов практикуют использование дополнительной памяти. Подобным образом благодаря многоядерным платформам в некоторых случаях прибегают к параллельной реализации алгоритмов, невзирая на возрастание общего объема вычислений. Сейчас при выборе структуры реализации алгоритма в качестве ключевых показателей часто используют число циклов обмена данными, коммуникацию в пределах микросхемы и энергозатраты. В гл. 9 речь идет о том, что хотя БПФ эффективнее алгоритма Герцеля или прямого вычисления ДПФ с точки зрения числа умножений, оно менее эффективно, если главный показатель — циклы пересылки данных, поскольку прямое вычисление или алгоритм Герцеля можно распараллелить в большей мере, чем БПФ.

Вооружившись теорией, развитой в начальных главах (в частности в гл. 2, 3, 5 и 8), в гл. 10 мы приступаем к Фурье-анализу сигналов с использованием ДПФ. Без полного понимания проблем, включающих в себя взаимосвязь непрерывного преобразования Фурье, преобразования Фурье с дискретным временем и дискретного преобразования Фурье, использование ДПФ при практическом анализе сигналов часто приводит к недоразумениям и ошибочным истолкованиям результатов. Мы собрали часть этих проблем в гл. 10. Кроме того, в этой главе рассматриваются некоторые вопросы Фурье-анализа нестационарных сигналов с помощью преобразования Фурье, зависящего от времени. В третьем издании подробнее рассматривается анализ банков фильтров, в том числе иллюстрируется использование банка фильтров в МРЕГ, приводятся новые примеры зависящего от времени анализа Фурье ЛЧМ-импульсов, иллюстрирующие влияние длины окна, более подробно показано моделирование шума квантования.

Гл. 11 — полностью новая глава, посвященная параметрическому моделированию сигналов. Начиная с основной идеи представления сигнала как выходного отклика ЛС-системы, в гл. 11 показано, как с помощью системы линейных уравнений можно определить параметры модели сигнала. Составление и решение этих уравнений подробно описаны и иллюстрированы примерами. Особое внимание уделено алгоритму Левинсона–Дарбина и многим свойствам решения, которые несложно получить из этого алгоритма, таким как идея решетчатого фильтра.

В гл. 12 вводится дискретное преобразование Гильберта. Это преобразование возникает в многочисленных приложениях, включая фильтрацию, комплексное представление вещественных полосовых сигналов, технику однополосной модуляции и многое другое. С появлением все более сложных систем связи и все более разнообразных методов эффективной дискретизации полосовых и многополосных аналоговых сигналов все важнее становится понимание сущности преобразования Гильберта. Преобразование Гильберта также играет важную роль в обсуждении кепстра в гл. 13.

В нашем первом издании 1975 г. и втором издании 1989 г. был подробный разбор класса нелинейных методов, т. н. кепстрального анализа и гомоморфного обращения свертки. Эти методы становятся все более популярными и широко используются в таких прикладных областях, как кодирование речи, распознавание речи, идентификация говорящего, анализ геофизических и медицинских данных, а также во многих других областях, где необходимо обращение свертки. Поэтому в настоящем изда-

нии мы освещаем эти темы подробнее и со значительно большим числом примеров. В этой главе вы найдете подробное определение и свойства кепстра, а также многие способы его вычисления, включая новые результаты использования корней многочлена как основы для вычисления кепстра. Ознакомившись с материалом гл. 13, читатель получит возможность глубже понять материал, изложенный в предыдущих главах, на основе комплекса методов анализа нелинейных сигналов, приобретающих все большее значение наряду с линейными методами анализа. В этой главе вы найдете также новые примеры, иллюстрирующие использование гомоморфной фильтрации для обращения свертки.

Мы надеемся с успехом использовать настоящее издание в преподавательской работе, и хочется верить, что наши коллеги и студенты по достоинству оценят этот труд. Обработка сигналов вообще, и дискретная обработка сигналов в частности, во всем ее богатстве и разнообразии сулит нам еще немало новых открытий.

*Алан В. Оппенгейм
Рональд В. Шафер*

Благодарности

Это третье издание *«Дискретной обработки сигналов»* является логическим развитием первых двух (1989, 1999), которые продолжают нашу первую книгу *«Цифровая обработка сигналов»* (1975). Влияние многих коллег, студентов и друзей, которые оказывали помощь, поддержку и содействие в появлении тех ранних работ, остается, очевидно, и в этом новом издании, и мы хотели бы еще раз выразить нашу глубокую признательность всем, кого перечислили в тех предыдущих книгах.

На протяжении всей своей карьеры авторы имели счастье учиться у выдающихся наставников. Каждый из нас хотел бы выразить признательность тем из них, кто сильно повлиял на нашу жизнь и карьеру.

Ал Оппенгейм как во времена студенчества, так и на протяжении всей своей карьеры находился под чутким руководством и влиянием профессора Амара Бозе (Amar Bose), профессора Томаса Стокхэма (Thomas Stockham) и доктора Бена Голда (Ben Gold). Будучи в течение нескольких лет ассистентом профессора Бозе, а также аспирантом под его руководством, Алан проникся творческим характером обучения, креативным поиском и стилем, которые являются характерной чертой профессора Бозе во всем, что он делает. В начале своей карьеры Алу Оппенгейму очень повезло тесно сотрудничать и дружить с доктором Беном Голдом и профессором Томасом Стокхэмом. На стиль преподавания и исследовательской деятельности оказали влияние невероятная доброжелательность Бена и сама его личность. Томас Стокхэм тоже был замечательным руководителем, он предложил поддержку и одобрение, как и продолжающуюся по сей день дружбу. Томас служит еще одним замечательным примером для подражания. Влияние этих выдающихся наставников ощущается на всем протяжении этой книги.

Наиболее заметные среди многих учителей и наставников, которые оказали влияние на Рона Шафера, — это профессор Леви Т. Вильсон (Levi T. Wilson), профессор Томас Стокхэм (Thomas Stockham) и доктор Джеймс Л. Фланаган (James L. Flanagan). Профессор Вильсон показал наивному городскому мальчику чудеса математики и науки, что изменило жизнь Рона. Его преданность преподаванию была слишком сильной, чтобы можно было ей сопротивляться. Профессор Стокхэм был великим учителем, другом в решающий момент, ценным коллегой и удивительно творческим инженером. Джим Фланаган (Jim Flanagan) является гигантом в области науки и техники обработки речи и служит источником вдохновения всем, кому повезло работать с ним. Не все великие учителя носили титул «профессор». Он учил Рона и многих других тщательно размышлять, стремлению к познанию и умению четко и понятно выражать свои мысли. Рон Шафер признает, что заимствовал множество привычек, мыслей и выражений у своих великих наставников и уверен, что они совсем не против.

На протяжении всей нашей академической карьеры Массачусетский технологический институт и Технологический институт Джорджии создали нам стимулирующую среду для научных исследований и поддержали этот развивающийся проект. С 1977 г. Ал Оппенгейм провел несколько отпусков и почти каждое лето в Океанографическом институте Вудса Хоула (WHOI), он глубоко признателен за предоставленные ему возможности и сотрудничество. Именно в эти периоды и в чудесной среде WHOI была написана значительная часть всех изданий этой книги.

В Массачусетском технологическом институте и Технологическом институте Джорджии мы получали щедрую финансовую поддержку из ряда источников. Алан Опшенгейм очень благодарен за поддержку господину Рэю Стата (Ray Stata) и корпорации Analog Devices, фонду Бозе и фонду Форда за финансирование (в различных формах) научных исследований и преподавания в Массачусетском технологическом институте. Мы также получали поддержку нашей преподавательской и научно-исследовательской деятельности от корпорации Texas Instruments (TI). В частности Джин Франц (Gene Frantz) из TI всегда оставалась преданным сторонником нашей работы и преподавания дискретной обработки сигналов в целом в обоих академических институтах. Рон Шафер также признателен за щедрую поддержку фонда Джона и Марии Франклин, который финансирует кафедру Джона и Марилу Маккарти в Технологическом институте Джорджии. В частности, особой благодарности заслуживают Димитрий Пари (Demetrius Paris), бывший долгое время директором школы электроники и кибернетики при Технологическом институте Джорджии, В. Келли Мосли (W. Kelly Mosley) и Марилу Маккарти из упомянутого фонда — за их более чем тридцатилетнюю дружбу и поддержку. Рон Шафер высоко ценит возможность быть участником исследовательской группы в лаборатории Hewlett-Packard (HP), сначала благодаря их поддержке исследований в Технологическом институте Джорджии в течение многих лет, а начиная с 2004 г. — будучи членом совета (HP Fellow). Третье издание было бы невозможно без поощрения и поддержки менеджеров лаборатории HP Фреда Китсона (Fred Kitson), Сюзи Ви (Susie Wee) и Иоана Апостолопулоса (John Apostolopoulos).

Наше сотрудничество с корпорацией Prentice Hall началось несколько десятилетий назад с нашей первой книги, вышедшей в 1975 г., и продолжалось при выпуске всех трех изданий этой книги, а также других книг. Нам было чрезвычайно приятно работать с Prentice Hall. Поощрения и помощь, предоставленные Марсией Хортон (Marcia Horton) и Томом Роббинсом (Tom Robbins) для этого и многих других издательских проектов, трудно переоценить. Майкл Макдональд (Michael McDonald), Эндрю Гилфиллан (Andrew Gilfillan), Скотт Дисанно (Scott Disanno) и Клер Ромео (Clare Romeo) существенно увеличили наше удовольствие от подготовки и реализации этого проекта.

Как и ранее, в подготовке этого третьего издания нам посчастливилось получить помощь от многих коллег, учеников и друзей. Мы высоко ценим их щедрую трату своего времени на помощь в этом проекте. В частности, мы выражаем нашу благодарность и признательность:

профессору Джону Баку (John Buck) за его значительную роль в подготовке второго издания и его усилия в течение продолжительного времени при подготовке этого издания;

профессорам Вивеку Гоялу (Vivek Goyal), Джей Лим (Jae Lim), Григорию Уорнеллу (Gregory Wornell), Виктору Зу (Victor Zue) и докторам Бабаку Аязифару (Babak Ayazifar), Сюзанне Бехешти (Soosan Beheshti) и Чарльзу Порсу (Charles Rohrs), преподававшим в MIT материал из различных изданий и сделавших много полезных замечаний и предложений;

профессорам Тому Барнуэллу (Tom Barnwell), Расу Мерсеру (Russ Mersereau) и Джиму Маккеллану (Jim McClellan), старым друзьям и коллегам Рона Шафера, которые использовали в преподавании материал из различных изданий и повлияли на многие аспекты книги,

профессору Брюсу Блэку (Bruce Black) из Технологического института Роуза Халмана за тщательную организацию десятилетних усилий по поиску новых задач, выбору и обновлению лучших из них помещению их в главы книги;

профессору Марку Йодеру (Mark Yoder) и профессору Уэйну Пэдгетту (Wayne Padgett) за разработку сопутствующего веб-сайта этого издания;

Балларду Блейру (Ballard Blair) за его помощь в корректировке библиографии;

Эрику Страттману (Eric Strattman), Дарле Секор (Darla Secor), Диане Вилер (Diane Wheeler), Стаси Шульц (Stacy Schultz), Каю Гилстрапу (Kay Gilstrap) и Шарлотте Доути (Charlotte Doughty) за их административную поддержку при подготовке этого издания и продолжающуюся помощь нашему преподаванию;

Тому Барану (Tom Baran) за его помощь во многих компьютерных вопросах, связанных с управлением файлами, для данного издания и за его значительный вклад в примеры к некоторым главам;

Шаю Маймону (Shay Maumon), тщательно прочитавшему большую часть глав, прорешавшему множество задач в более сложных главах и внесшему значительные коррективы и предложения;

всем, кто помогал и тщательно просмотрел рукопись и верстку: Берклину Билгику (Berkin Bilgic), Алберту Чангу (Albert Chang), Мьюнгу Джин Чои (Myung Jin Choi), Маджиду Фозунбалу (Majid Fozunbal), Риву Инглу (Reeve Ingle), Джереми Лью (Jeremy Leow), Йингу Лиу (Ying Liu), Паулю Рю (Paul Ryu), Санквану Сонгу (Sanquan Song), Дэнису Вей (Dennis Wei) и Захи Караму (Zahi Karam);

а также многим преподавателям, которые повлияли на это издание, прямо или косвенно, преподавая с нами этот предмет в Массачусетском технологическом институте и в Технологическом институте Джорджии.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

Обработка сигналов имеет долгую и богатую историю. Это технология, охватывающая огромный набор приложений, включая развлечения, коммуникации, космические исследования, медицину, геофизику и археологию. Перечислено лишь несколько направлений, выбранных наугад из большого списка. Сложнейшие алгоритмы обработки сигналов и соответствующее аппаратное оборудование используются в широком диапазоне систем: от узкоспециализированных военных и промышленных до недорогой широко распространенной бытовой электроники. Мы воспринимаем как само собой разумеющееся работу домашних приборов, например телевизоров или высококачественных музыкальных центров и интерактивных игр, не задумываясь о том, что своим существованием они в большой степени обязаны развитой теории и практике обработки сигналов. Сложные цифровые сигнальные процессоры являются «сердцем» всех современных сотовых телефонов. Стандарты сжатия изображений и видеопотоков (JPEG и MPEG¹) опираются на многочисленные принципы и технологии обработки сигналов, рассматриваемые в этой книге. Хранение данных с высокой плотностью на дисковых носителях, а также реализация современной твердотельной памяти все больше опираются на достижения обработки сигналов, чтобы придать надежность этим хрупким по своей природе технологиям. В общем и целом при взгляде в будущее становится ясно, что роль обработки сигналов в нашем обществе становится все более заметной частично благодаря сближению средств коммуникации, компьютеров и обработки сигналов как в потребительской сфере, так и в более грандиозных индустриальных и правительственных проектах.

Возрастающее число приложений и повышенный спрос на все более и более сложные алгоритмы идут «рука об руку» с быстро развивающейся технологией реализации систем обработки сигналов. По некоторым оценкам, несмотря на ограниченную применимость закона Мура, производительность как специализированных сигнальных микропроцессоров, так и персональных компьютеров за следующие 10 лет может увеличиться на несколько порядков. Кажется абсолютно очевидным, что необходимость и роль обработки сигналов в современном обществе постоянно растут и ширятся.

Обработка сигналов имеет дело с представлением и преобразованием сигналов и информации, которую они несут. Например, нам может потребоваться разделить два или более сигнала, которые тем или иным способом были объединены (например сложением, перемножением или сверткой), может возникнуть необходимость усилить некоторые компоненты или оценить параметры сигнала. В коммуникационных системах сигнал перед передачей нужно подвергать предварительной обработке,

¹ Аббревиатуры MPEG и JPEG используются даже неспециалистами при ссылках на стандарты, разработанные «Moving Picture Expert Group (MPEG)» (экспертная группа по движущемуся изображению) и «Joint Photographic Expert Group (JPEG)» (объединенная группа экспертов по фотографии) из «International Organization for Standardization (ISO)» (международная организация по стандартизации).

например модуляции, обеспечивая выполнение определенных требований к передающемуся сигналу, или сжатию для более быстрой передачи по каналу, а затем выполнить обратные операции на приемной стороне, чтобы получить копию исходного сигнала. До 1960-х годов технология обработки сигналов сводилась почти исключительно к непрерывной, аналоговой, технологии¹. Быстрое развитие цифровых компьютеров и микропроцессоров вместе с важными теоретическими достижениями типа быстрого преобразования Фурье, параметрическое моделирование сигналов, многоскоростные методы, полифазная фильтрация, а также новые методы представления сигналов, например вейвлет-анализ, привели к существенному изменению в цифровых технологиях — возникновению направления ЦОС. Приведем всего лишь один пример: аналоговые радиосистемы превращаются в «программное радио» с перестраиваемой конфигурацией, реализуемое почти исключительно с помощью цифровых вычислений.

Основное отличие ЦОС от классической теории состоит в том, что сигнал в ЦОС — это числовая последовательность. Сигналы в ЦОС представляются последовательностями чисел конечной точности (имеется в виду, что значения элементов последовательностей лежат в дискретной области), а обработка осуществляется с помощью операций над числами. Более общий термин «*обработка сигналов, дискретизированных по времени*», или «*обработка дискретных сигналов*» (ОДС), посвящен области, включающей ЦОС как частный случай, в которой последовательности отсчетов (данные дискретизации) обрабатываются с применением других дискретных технологий. Различие между понятиями «обработка дискретных сигналов» и «цифровая обработка сигналов» часто не принимается в расчет, поскольку оба термина относятся к областям науки, имеющим дело с дискретными сигналами. Это особенно справедливо, когда речь идет о высокоточных вычислениях. Хотя существует много примеров, когда обрабатываемые сигналы действительно являются числовыми последовательностями, большинство приложений используют дискретные технологии для обработки непрерывных сигналов. В последнем случае непрерывные сигналы преобразуются в последовательности отсчетов, т. е. дискретный сигнал. Действительно, одним из самых мощных стимулов к широкому использованию цифровой обработки сигнала послужило появление дешевых АЦП/ЦАП, основанных на дифференциальном квантовании с формированием шума. После дискретной обработки ее результат вновь конвертируется в непрерывный сигнал. Для таких систем часто необходима или предпочтительна работа в режиме реального времени. С ростом доступных скоростей вычислений дискретная обработка непрерывных сигналов в режиме реального времени стала типичной в системах связи, радаров и сонарах (гидролокаторах), аудио- и видеосистемах, биомедицине и многих других областях применения. Есть применения и у обработки не в реальном времени. Проигрыватель компакт-дисков (CD-плеер) и MP3-плеер — примеры асимметричных систем, где входной сигнал обрабатывается лишь один раз. Эта исходная обработка может выполняться как в реальном времени, так и медленнее или даже быстрее. Обработанный сигнал хранится на компакт-диске или в микросхеме памяти, а реконструкция исходного сигнала производится в реальном времени в тот момент, когда это необходимо. Как записывающая, так и воспроизводящая сис-

¹ Обычно переменную, от которой зависит сигнал, мы называем временем, хотя в отдельных ситуациях независимую переменную можно выбирать из довольно широкого класса измеряемых величин. Поэтому к непрерывному и дискретному времени нужно относиться как к общему термину, обозначающему непрерывную и дискретную независимую переменную.

тема компакт-дисков и MP3-плееров основывается на многих результатах теории обработки сигналов, которая обсуждается в нашей книге.

Еще одна область применения понятий и методов цифровой обработки сигналов — это финансовый инжиниринг. Эффективное моделирование, прогнозирование и фильтрация экономической информации могут привести к значительным положительным результатам в производительности и к повышению экономической стабильности. Например, специалисты по инвестированию все больше используют результаты цифровой обработки, поскольку даже незначительное увеличение в предсказуемости сигнала или отношении сигнал–шум может привести к значительному увеличению производительности.

Другой важный класс задач обработки сигналов касается *интерпретации сигналов*. Цель такой задачи состоит не в получении выходного сигнала, а в описании характеристик входного. Например, при записи или распознавании речи система направлена на интерпретацию входного сигнала, иными словами, на извлечение из него информации. Обычно такие системы сначала подвергают получаемый сигнал цифровой обработке (фильтрация, оценка параметров и т. д.), а затем применяют технологии распознавания образов, чтобы создать символьное представление сигнала, такое как, например, знаки транскрипции. Символьный выходной сигнал, в свою очередь, может подаваться на вход экспертной системы для получения окончательной интерпретации исходного сигнала.

Еще один относительно новый аспект обработки сигналов состоит в манипулировании аналитическими выражениями, описывающими обработку сигналов. Такое манипулирование потенциально полезно для рабочих станций, обрабатывающих сигналы, и для автоматизированного проектирования устройств обработки сигналов. При этом сигналы и системы представляются и обрабатываются как абстрактные объекты данных. Объектно-ориентированные языки программирования обеспечивают удобную среду для работы с сигналами, системами и операциями обработки сигналов, без явных вычислений последовательностей данных. Сложность систем, предназначенных для оперирования с символическими представлениями, определяется внедрением в них фундаментальных концепций теории, различного рода теорем и свойств, именно таких, которые служат объектом изучения нашей книги. Например, устройство, содержащее информацию о том, что свертка сигналов во временной области соответствует их произведению в частотном представлении, может анализировать многообразные перестановки фильтрующих структур, включая те, которые напрямую используют алгоритмы дискретного и быстрого преобразования Фурье. Аналогично прибор, «знающий» о связи между частотой дискретизации и наложением спектров, может эффективно выбирать стратегию прореживания и интерполяции при реализации фильтров. Похожие идеи в данный момент исследуются для реализации распределенной обработки сигналов. В таких системах данные сопровождаются высокоуровневыми описаниями необходимой обработки, а реализация этой обработки организуется динамически, исходя из доступных в данный момент ресурсов сети.

Многое из концепций и техники проектирования, обсуждаемых здесь, включено сейчас в структуру сложных программных пакетов, таких как, например, MATLAB, Simulink, Mathematica и LabVIEW. Во многих случаях, когда дискретные сигналы записаны в компьютер, инструментарий пакетов программ позволяет сконструировать из базисных функций чрезвычайно сложные процедуры обработки сигналов. В этих случаях совсем не обязательно знать подробности алгоритмов, реализующих

вычисления, например алгоритм быстрого преобразования Фурье, но важно понимать, что именно вычисляется и как следует интерпретировать результат. Другими словами, хорошее понимание концепций, изложенных в этом тексте, необходимо для грамотного использования программ, обрабатывающих сигналы, которые сейчас широко распространены и легко доступны.

Задачи обработки сигналов не ограничиваются, естественно, одномерными сигналами. Хотя существует фундаментальное отличие в теориях одномерных и многомерных сигналов, многое из изложенного здесь имеет параллель в теории многомерных систем. Теория обработки многомерных дискретных сигналов подробно изложена в книгах¹ Даджена (Dudgeon) и Мерсере (Mersereau) [56], Лима (Lim) [125] и Брэйсвелла (Bracewell) [25]. Многие приложения по обработке изображений опираются на технику обработки двумерных сигналов. К ним относятся кодирование видеосигналов, обработка медицинских изображений, увеличение и анализ аэрофотоснимков, анализ спутниковых фотографий метеослужбы, а также устройства для космических исследований. Приложения теории обработки многомерных сигналов к распознаванию изображений представлены такими авторами, как Маковски (Makovski) [128], Каслман (Castleman) [30], Джойн (Jain) [101], Бовик (Bovic (ed.)) [22], Вудс (Woods) [238], Гонсалес и Вудс (Gonzalez and Woods) [75] и Пратт (Pratt) [168]. Анализ сейсмических данных, требующийся при разведке нефтяных месторождений, предсказаниях землетрясений и контроле за ядерными испытаниями, также требует обработки многомерных сигналов. Приложение многомерной теории к сейсмологии — тема изданий Робинсона (Robinson) и Трейтеля (Treitel) [188], Робинсона и Даррани (Durrani) [187].

Обработка многомерных сигналов — только одна из многих современных специализированных тем, не вошедших в нашу книгу. Спектральный анализ, основанный на ДПФ, и моделирование сигналов — другие чрезвычайно богатые и важные аспекты обработки сигналов. В главах 10 и 11 мы знакомим читателя с большим числом понятий из этих тем, концентрируя внимание на основных концепциях и технике, имеющей отношение к применению ДПФ и параметрического моделирования сигналов. В гл. 11 мы также рассмотрим класс методов спектрального анализа с высоким разрешением, основанный на представлении анализируемого сигнала как реакции дискретного стационарного линейного фильтра на импульсный сигнал или белый шум. Спектральный анализ делается с помощью оценки параметров (например коэффициентов разностного уравнения) системы и вычисления квадрата амплитудно-частотной характеристики полученной модели фильтра. Подробное обсуждение соответствующей теории можно найти у Кея (Kay) [116], Марпла (Marple) [133], Хайеса (Hayes) [81] и Стойка и Моузес (Stoica and Moses) [219].

Моделирование сигналов играет не последнюю роль при сжатии и кодировании данных, и вновь основы разностных уравнений служат базисом для понимания многого из соответствующего раздела техники. Например, один из методов кодирования сигналов, называемый *кодированием с линейным предсказанием*, эксплуатирует следующее наблюдение: если сигнал — отклик подходящего класса дискретных фильтров, то его значения в произвольный момент времени — линейная функция от предыдущих значений (поэтому они поддаются *линейному предсказанию*). Следовательно, эффективные представления сигналов могут быть получены на основе параметров предсказания и остаточной ошибки предсказания. После этого сигнал

¹ Литература, на которую будут появляться ссылки в этом тексте, расположена в конце книги.

можно при необходимости восстановить, исходя из значений этих параметров модели. Упомянутый класс методов работы с сигналами, особенно эффективный при кодировании речевых сигналов, подробно описан Джейнентом (Jayant) и Ноллом (Noll) [102], Маркелом (Markel) и Грейем (Gray) [132], Рабинером (Rabiner) и Шафером (Schafer) [175] и Куатьери (Quatieri) [170], а также частично освещен в гл. 11.

Другое сложное направление огромной важности — адаптивная обработка сигналов. Адаптивные системы представляют собой специфический класс меняющихся во времени и, в некотором смысле, нелинейных систем с обширными приложениями и хорошо развитыми эффективными методами проектирования и анализа. И здесь многие подходы строятся на фундаментальных принципах обработки дискретных сигналов. Детальное изложение адаптивной обработки можно найти в учебниках Уидроу (Widrow) и Стирнза (Stearns) [240], Хайкина (Haykin) [83] и Сайеда (Sayed) [192].

Мы упомянули лишь о нескольких из многих развитых направлений техники, активно использующих математический аппарат, которому посвящен наш учебник. Остальные включают в себя специализированные процедуры проектирования фильтров, множество узконаправленных алгоритмов, вычисляющих преобразование Фурье, специфические структуры фильтров и разнообразную технику многоскоростной обработки сигналов, в том числе банки фильтров и вейвлет-преобразование (см. Баррас, Гопимас и Гуо (Burrus, Gopimath and Guo) [14], Вайдинатан (Vaidyanathan) [227] и Веттерли и Ковачевич (Vetterli and Kovačević) [230] для начального ознакомления с этими темами).

Фундаментальный учебник, по общему мнению, должен скорее ярко освещать предмет, чем затенять его излишними сложностями. При выборе обсуждаемых тем и степени глубины их проработки мы руководствовались именно этим принципом. Краткий обзор современных направлений научной мысли, которым мы предвараем основной материал, и список литературы в конце книги наглядно показывают широчайший диапазон теоретических и практических задач для тех, кто вдумчиво подготовится к ним, освоив фундаментальные основы ЦОС.

Исторический обзор

Обработка дискретных сигналов развивается уже долгое время, но несколько неравномерно, можно даже сказать, скачкообразно. Ретроспективный взгляд на историю становления этой отрасли знаний помогает выделить те фундаментальные принципы, которые будут занимать центральное место в ЦОС еще многие годы. Начиная с изобретения математического анализа в XVII веке, ученые и инженеры разрабатывают модели физических явлений в терминах функций непрерывных переменных и дифференциальных уравнений. Если аналитических методов решения соответствующих задач не хватает, к делу подключаются численные методы. Уже Ньютон, один из авторов «исчисления флюкций», активно эксплуатировал метод конечных разностей, которые, как мы убедимся, являются частным случаем описания дискретных систем. Математики XVIII века, например Эйлер, Бернулли и Лагранж, работали над численным интегрированием и интерполяцией функций непрерывной переменной. Интересное историческое исследование Хейдмана (Heideman), Джонсона (Johnson) и Барраса (Burrus) [85] показывает, что Гаусс открыл основные принципы быстрого преобразования Фурье (обсуждаемого в гл. 9) уже в 1805 г., опере-

див публикацию трактата самого Фурье о представлении функций гармоническими рядами.

Как мы уже говорили, вплоть до начала 1950-х годов обработка сигналов обычно ограничивалась аналоговыми системами, реализуемыми электронными схемами или даже механическими устройствами. Несмотря на то, что в то время первые вычислительные машины уже работали в бизнесе и крупных научных лабораториях, они были еще слишком дороги и обладали крайне малыми вычислительными ресурсами. В то же время постоянно возрастающая потребность в более сложной обработке сигналов в некоторых прикладных областях увеличивала интерес к обработке дискретных сигналов. Одна из первых попыток привлечения компьютеров к цифровой обработке сигналов была предпринята в геофизических исследованиях, где сейсмические данные можно было зафиксировать на магнитной ленте для последующей обработки. Естественно, такая обработка не могла проводиться в режиме реального времени. Минуты и даже часы тратились на обсчет сигналов секундной длительности с помощью первых ЭВМ. Однако возможности компьютера и потенциальная выгода такого метода обработки были весьма привлекательны.

Тогда же работа по привлечению вычислительных машин к обработке сигналов пошла по разным направлениям. Благодаря усиливающейся мощности компьютеров оказалось возможным моделировать на них системы обработки сигналов перед воплощением в железе. Таким образом, новые алгоритмы, обрабатывающие сигналы, равно как и системы, стали изучать в удобной экспериментальной среде перед привлечением (часто очень дорогостоящих) экономических и технических средств для их реализации. Типичным примером такого приема служит моделирование вокодера, выполненное в лабораториях Линкольна при Массачусетском технологическом институте и компании *Bell Laboratory*. При проектировании аналогового тракта вокодера необходимо было рассчитать характеристики фильтра, которые воздействуют на качество закодированного речевого сигнала настолько тонко, что без моделирования и соответствующих вычислений крайне трудно было оценить их эффект достаточно объективно. С помощью же компьютерного моделирования эти характеристики и качество системы кодирования речи можно было точно отрегулировать перед проектированием аналоговой части.

Очевидно, что в изложенных примерах компьютер значительно расширяет возможности по обработке сигналов. Однако процесс расчета все еще не мог идти в режиме реального времени. Поэтому было принято считать, что ЭВМ можно использовать лишь для *приблизительной* обработки или *моделирования* аналоговых систем. В соответствии с этим принципом ранние работы по цифровым фильтрам были в основном направлены на поиск путей программирования фильтров на компьютере так, чтобы при конвертировании аналогового сигнала в цифровой, обработке его цифровым фильтром и обратном преобразовании цифрового сигнала в аналоговый получалась хорошая аппроксимация аналогового фильтра. Мысль о практическом применении *цифровых систем* к актуальным задачам обработки в режиме реального времени — в речевой связи, в радарх или иных многообразных приложениях — даже в наиболее оптимистические времена казалась достаточно спекулятивной. Скорость, стоимость и размер — вот три основных фактора, влиявших на выбор аналоговых, а не дискретных компонентов.

Поскольку сигналы обрабатывались на цифровых компьютерах, скорость работы и память которых постоянно увеличивались, исследователи, естественно, экспериментировали со все более и более сложными сигналами и алгоритмами. Неко-

торые из этих алгоритмов появлялись благодаря возможностям вычислительных машин и не имели реального воплощения в аналоговом оборудовании. Иными словами, многие из этих алгоритмов считались интересными, но далекими от практического применения разработками. Однако развитие алгоритмов обработки сигналов делало идею создания полностью цифровых систем обработки сигналов все более заманчивой. Активная работа, начатая с исследования цифрового вокодера, цифровых анализаторов спектра и других полностью цифровых систем, подкреплялась надеждой, что в конечном счете такие системы станут востребованными.

Развитие новой точки зрения на перспективы обработки дискретных сигналов было ускорено изобретением Кули (Cooley) и Тьюки (Tukey) эффективного класса алгоритмов вычисления преобразования Фурье [47]. Сейчас подобные алгоритмы известны как быстрое преобразование Фурье (БПФ). Открытие БПФ оказалось революционным по нескольким причинам. Многие алгоритмы обработки сигналов, разработанные для компьютеров, работали в несколько раз медленнее реального времени. Происходило это из-за необходимости анализа спектра, эффективных методов которого не существовало. Алгоритм БПФ сильно ускорил вычисление преобразования Фурье, допуская применение все более сложных алгоритмов за короткое время, что позволило производить интерактивные эксперименты с разрабатываемыми системами. Кроме того, алгоритмы, включающие в себя БПФ, стало возможно реализовать в узкоспециализированных аппаратных средствах. Поэтому абстрактные до этого момента алгоритмы стали приобретать и практическое значение.

Другим важным следствием изобретения БПФ стала его дискретная природа. БПФ было направлено на вычисление преобразования Фурье дискретных сигналов или последовательностей и включало в себя множество свойств и математический аппарат из дискретной области обработки сигналов. Короче говоря, ДПФ — не простое приближение к непрерывному преобразованию Фурье. Оно оказало стимулирующий эффект к переформулировке многих концепций и алгоритмов обработки сигналов в терминах дискретной математики, что привело к появлению множества точных соотношений в дискретной области. Отход от отношения к обработке сигналов на компьютерах как к приближительной модели аналоговой обработки привел к тому, что обработка дискретных сигналов стала считаться важной самостоятельной областью знаний.

Еще одно важное достижение в истории обработки дискретных сигналов произошло в области микроэлектроники. Изобретение и быстрое распространение микропроцессоров дало возможность создания дешевых систем, обрабатывающих сигналы. Хотя первые микропроцессоры были слишком медлительны для реализации большинства систем, которые работали бы в реальном времени (за исключением очень малой частоты дискретизации), к середине 1980-х годов технологии интегральных схем подошли к уровню, позволившему конструировать очень быстрые микрокомпьютеры, производящие вычисления как с фиксированной, так и с плавающей запятой, архитектура которых была разработана специально для реализации алгоритмов обработки дискретных сигналов. Стремительный рост микроэлектроники также значительно повлиял на развитие алгоритмов обработки сигналов и в другом отношении. Например, на заре цифровой обработки сигналов в режиме реального времени память была относительно дорогостояща, и одним из важнейших показателей разрабатываемых алгоритмов было эффективное использование памяти. В наше время память настолько дешевая, что многие алгоритмы пред-

намеренно используют больший объем памяти, чем это минимально необходимо, чтобы снизить энергопотребление процессора. Еще одна область, где технические ограничения поставили серьезную преграду быстрому развитию ЦОС, — это преобразование сигналов из аналоговой формы в цифровую. Первые АЦП и ЦАП представляли собой автономные устройства стоимостью в тысячи долларов. Благодаря объединению теории ЦОС и микроэлектроники появились дешевые преобразователи, с помощью которых стало возможно решать множество практических задач в реальном времени.

Подобным образом уменьшение числа арифметических операций, таких как умножение и сложение с плавающей запятой, теперь не так существенно, поскольку многоядерные процессоры часто имеют несколько доступных умножителей, и теперь становится важным уменьшить обмен данными между ядрами, даже если в результате потребуются большее число умножений. В многоядерном варианте, например, прямое вычисление ДПФ (или использование алгоритма Герцеля) более эффективно, нежели использование БПФ, поскольку, хотя и требуется много умножений, необходимость в обмене данными значительно меньше, так как обработку можно эффективно распределить между несколькими процессорами или ядрами. В более широком смысле изменение структуры алгоритмов и разработка новых алгоритмов, ориентированных на параллельную или распределенную обработку сигналов, становится новым перспективным направлением развития алгоритмов обработки сигналов.

Прогнозы на будущее

Инженеры продолжают исследования, направленные на увеличение плотности микросхем и объемов их производства, и, как результат, сложность микроэлектронных схем постоянно возрастает. Действительно, сложность, скорость и возможности цифровых сигнальных процессоров экспоненциально растут начиная с 1980-х годов, и пока нет никаких признаков замедления темпов развития. Пока техника интегральных схем ускоренно развивается, можно создавать все более сложные, но дешевые системы обработки дискретных сигналов с миниатюрными размерами и низкой потребляемой мощностью. Следовательно, значение обработки дискретных сигналов будет постоянно повышаться, и будущее развитие этой области будет еще более впечатляющим, чем то течение событий, которое мы только что описали.

Техника обработки дискретных сигналов уже содействует революционному прорыву в некоторых областях приложений. Примечательный пример лежит в области телекоммуникаций, где техника обработки дискретных сигналов, технологии микроэлектроники и волоконно-оптическая передача данных комбинируются для поистине революционного изменения природы систем связи. Подобные процессы можно ожидать и во многих других областях. Действительно, ЦОС всегда была, есть и будет областью, которая развивается благодаря новым практическим применениям. Иногда для новой прикладной задачи могут быть адаптированы достижения из других областей, но зачастую новое практическое применение стимулирует появление новых алгоритмов и нового «железа» для их реализации. Ранее развитию многих ключевых концепций ЦОС, которые рассматриваются в настоящем издании, способствовали прикладные задачи сейсмологии, радарной и телекоммуникационной техники. Разумеется, обработка сигналов всегда будет занимать видное место в

национальной обороне, индустрии развлечений, связи и медицине. В последнее время методы ЦОС стали использовать в таких полярных областях, как финансы и анализ ДНК.

Хотя предсказать новые области применения ЦОС весьма затруднительно, нет сомнения в том, что они будут очевидны для того, кто готов их распознать. Ключ к готовности решать проблемы цифровой обработки сигналов всегда был и будет в глубоком понимании фундаментальной математики сигналов и систем, а также неразрывно связанных с ними алгоритмов проектирования и обработки. В то время как обработка дискретных сигналов динамично развивается, ее фундаментальные принципы остаются неизменными. Наша цель в этой книге состоит в обеспечении логически связанной трактовки теории дискретных линейных систем, фильтрации, дискретизации, дискретного анализа Фурье и моделирования сигналов. Представленный материал должен наделить читателя знанием, необходимым для понимания широких возможностей приложения обработки дискретных сигналов и основ для вклада в будущее развитие этой удивительной области техники.

ГЛАВА 2

ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

2.1. Введение

Сигналом обычно называют то, что несет в себе какие-то данные. Сигналы могут, например, передавать информацию о состоянии или поведении физической системы и часто синтезируются в целях обмена информацией между людьми, а также между людьми и механизмами. Хотя сигналы могут быть представлены многими способами, во всех случаях информацию несут некие изменения. На математическом языке сигналы — это функции одной или нескольких независимых переменных. Например, речевой сигнал представляется как функция времени, а фотографический образ — как функция яркости от двух пространственных переменных. По общему соглашению (чего мы, как правило, будем придерживаться в этой книге) независимой переменной в математическом представлении сигнала выступает время, хотя в отдельных примерах независимая переменная в сигнале фактически временем не является.

Независимая переменная в математической реализации сигнала может быть как непрерывной, так и дискретной. Сигналы с непрерывным временем определяются на непрерывных промежутках, зависят от непрерывной переменной и обычно называются *аналоговыми*. *Сигналы с дискретным временем*, или просто *дискретные сигналы*, определены в дискретные моменты времени и, как следствие, имеют независимую переменную с дискретными значениями. Тем самым они отождествляются с числовыми последовательностями. Такие сигналы, как речь или изображение, могут иметь как непрерывное, так и дискретное представление, и при выполнении определенных условий эти представления полностью эквивалентны. Кроме независимой переменной, дискретным или непрерывным может быть уровень (величина) сигнала. К *цифровым сигналам* относят те, у которых дискретны как переменная, так и уровень.

Аналогично и системы обработки сигналов могут быть разбиты на два класса. *Системой, непрерывной по времени*, или просто *непрерывной системой*, принято называть такую систему, у которой как входной сигнал, так и реакция на него — непрерывные сигналы, а *дискретной по времени (дискретной)* называют систему, у которой входной и выходной сигналы дискретны. *Цифровой* системой называют систему, перерабатывающую цифровой сигнал в цифровой же. Таким образом, цифровая обработка сигналов имеет дело с преобразованием сигналов, дискретных как по времени, так и по уровню. Основное внимание в этой книге уделено дискретным (а не цифровым) сигналам и системам. Однако теория дискретных сигналов

и систем чрезвычайно полезна для исследования цифровых сигналов и систем, особенно когда шаг квантования мал. Эффект квантования (дискретизации) сигналов по уровню разбирается в § 4.9, 6.9–6.11 и 9.8.

В этой главе мы даем основные определения, систему обозначений, а также рассматриваем основные понятия, связанные с дискретными сигналами и системами. Изложение материала подразумевает, что читатель уже знаком с данным материалом хотя бы в каком-либо объеме и, вероятно, в другой системе обозначений. Таким образом, эта глава в первую очередь предназначена для подготовки читателя к освоению материала, заключенного в последующих главах. В разделе 2.2 мы обсуждаем дискретные сигналы как последовательности и описываем основные последовательности, например единичный импульс, единичный скачок и комплексную экспоненту, которые играют ключевую роль и представляют собой строительный материал для более общих последовательностей. В разделе 2.3 представлены основные свойства и простые примеры дискретных систем. Разделы 2.4 и 2.5 посвящены важному классу стационарных ЛС-систем и их представлению во времени с помощью сверточной суммы, а в разделе 2.6 рассматривается класс ЛС-систем, представленных линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами. В разделе 2.7 дискретные системы представлены в частотной области через понятие комплексных экспонент как собственных функций, а в разделах 2.8, 2.9 и 2.10 дискретные сигналы рассматриваются с помощью преобразования Фурье как линейные комбинации комплексных экспонент. В разделе 2.11 дано краткое введение к случайным дискретным сигналам.

2.2. Дискретные сигналы

Математически дискретные сигналы представляются последовательностями чисел. Числовая последовательность x , n -й член в которой обозначают через¹ $x[n]$, формально записывается как

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.1)$$

где n — целое число. На практике такие последовательности возникают, например, при преобразовании аналогового (т. е. непрерывного) сигнала в дискретную форму. В этом случае численное значение n -го члена последовательности равно величине аналогового сигнала $x_a(t)$ в момент времени nT , т. е.

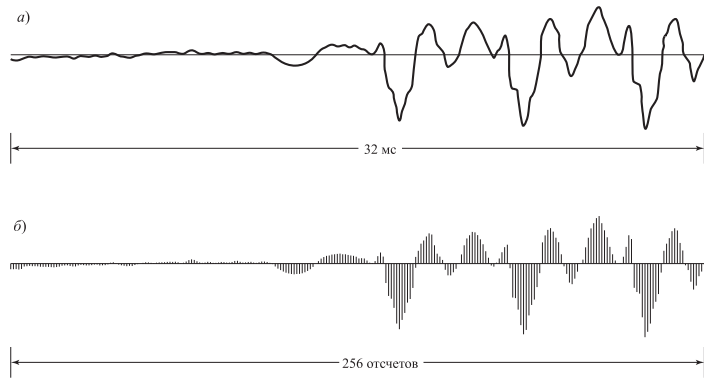
$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.2)$$

Число T называют *шагом дискретизации*, а обратное к нему — *частотой дискретизации*. Хотя последовательность может возникать не только при преобразовании аналоговых сигналов, ее член $x[n]$ удобно называть n -м отсчетом. Кроме того, обозначение последовательности (2.1) довольно громоздко, и мы будем говорить о «последовательности $x[n]$ », подобно выражению «аналоговый сигнал $x_a(t)$ », хотя запись $x[n]$, строго говоря, относится к отдельному члену последовательности. Дискретные сигналы (т. е. последовательности) обычно изображают, как показано на рис. 2.1. Абсцисса графика показана в виде непрерывной прямой, но важно отдавать себе отчет, что величина $x[n]$ определена только при целых значениях аргумента n .

¹Заметим, что мы используем квадратные скобки для обозначения независимой переменной дискретной функции, а аргумент непрерывной функции заключается в круглые скобки.

Неверно думать, что $x[n]$ равно нулю, если n не является целым числом, просто при таких аргументах $x[n]$ не определено.

Рис. 2.1. Графическое представление дискретного сигнала



В качестве примера последовательности, полученной в результате дискретизации, на рис. 2.2, *а* показан фрагмент речевого сигнала, соответствующего вариациям акустического давления, в виде функции времени, а на рис. 2.2, *б* приведена последовательность отсчетов этого сигнала. В то время как исходный речевой сигнал определен в любой момент времени t , последовательность несет информацию об этом сигнале только в определенные моменты времени. Из теоремы о дискретном представлении (Котельникова–Найквиста), обсуждаемой в гл. 4, следует, что исходный сигнал можно восстановить из последовательности отсчетов с любой желаемой степенью точности, если отсчеты были произведены с достаточной частотой.

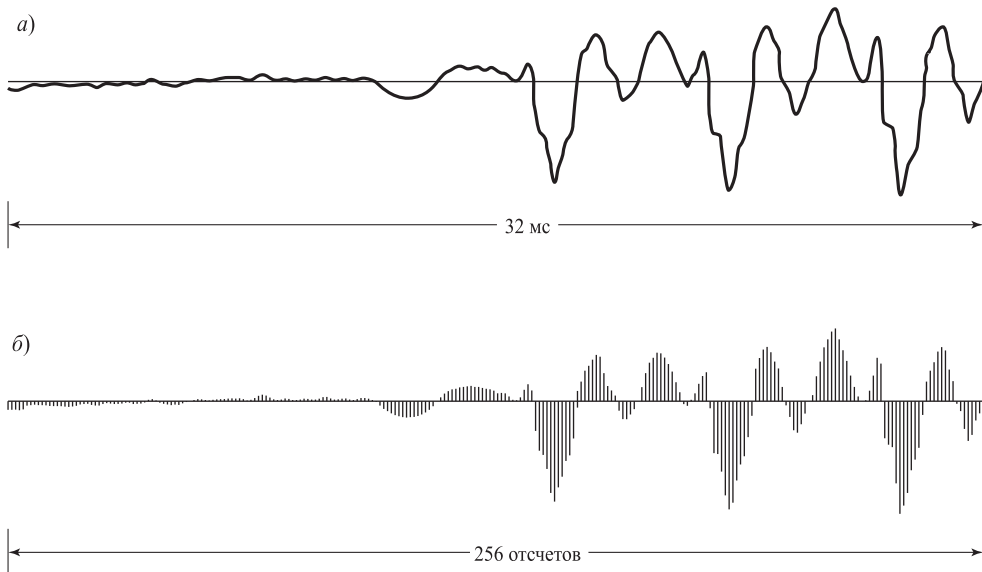


Рис. 2.2. *а*) Фрагмент непрерывного речевого сигнала ($x_a(t)$); *б*) последовательность отсчетов $x[n] = x_a(nT)$, полученная из фрагмента *а*, при шаге $T = 125$ мкс

Некоторые из последовательностей особо важны при обсуждении теории дискретных сигналов и систем. Они представлены на рис. 2.3 и описываются ниже.

Единичный импульс (рис. 2.3, а) определяется как

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Единичный импульс играет ту же роль в теории дискретных сигналов, что и дельта-функция Дирака в теории непрерывных сигналов. Последовательность с единственным ненулевым отсчетом удобно называть *дискретным импульсом* или просто *импульсом*. Стоит отметить, что дискретный импульс — понятие существенно более простое и понятное, чем дельта-функция.

К одному из важных свойств единичного импульса относится тот факт, что любая последовательность может быть выражена в виде линейной комбинации сдвинутых импульсов. Например, последовательность $p[n]$ из рис. 2.4 представляется в виде

$$p[n] = a_{-3}\delta[n + 3] + a_1\delta[n - 1] + a_2\delta[n - 2] + a_7\delta[n - 7], \quad (2.4)$$

а для произвольной последовательности справедливо соотношение

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - k]. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) будет использована для представления дискретных линейных систем.

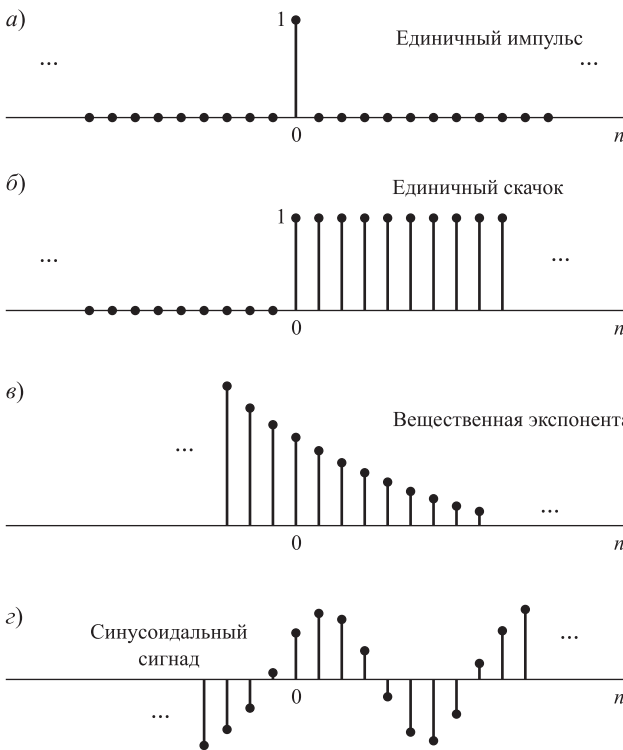


Рис. 2.3. Некоторые стандартные последовательности

Единичный скачок (рис. 2.3, б) определяется формулой

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Единичный скачок выражается через импульс как

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k], \quad (2.7)$$

т. е. n -й отсчет единичного скачка равен сумме всех членов импульсной последовательности вплоть до n -го. Альтернативное представление единичного скачка в терминах импульса получается в результате суммы сдвинутых импульсов, как в уравнении (2.5). Все ненулевые члены единичного скачка равны 1, поэтому

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]. \quad (2.8)$$

Импульсная последовательность может быть выражена через единичный скачок как разность:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]. \quad (2.9)$$

Экспоненциальная последовательность наиболее важна при представлении и анализе линейных стационарных дискретных систем. В общем виде такие последовательности записываются как

$$x[n] = A\alpha^n. \quad (2.10)$$

Если A и α — вещественные числа, то соответствующая последовательность тоже называется вещественной. Если $0 < \alpha < 1$ и A положительно, то значения последовательности положительны и убывают с ростом n , как на рис. 2.3, в. Когда $-1 < \alpha < 0$, знаки членов последовательности чередуются, но их абсолютные значения все равно убывают. Наконец, при $|\alpha| > 1$ последовательность возрастает по абсолютной величине с ростом n .

Экспоненциальная последовательность $A\alpha^n$ с комплексным α имеет вещественную и мнимую части, являющиеся экспоненциально взвешенными синусоидами. Более точно, если¹ $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$ и $A = |A|e^{j\varphi}$, то последовательность $A\alpha^n$ может быть записана одним из следующих способов:

$$\begin{aligned} x[n] &= A\alpha^n = |A|e^{j\varphi} |\alpha|^n e^{j\omega_0 n} = |A| |\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = \\ &= |A| |\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A| |\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \varphi). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Эта последовательность осциллирует с экспоненциально растущей огибающей, если $|\alpha| > 1$, или с экспоненциально затухающей огибающей при $|\alpha| < 1$. (В качестве простейшего примера разберите случай $\omega_0 = \pi$.)

Когда $|\alpha| = 1$, последовательность выглядит как

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n + \varphi)} = |A| \cos(\omega_0 n + \varphi) + j|A| \sin(\omega_0 n + \varphi), \quad (2.12)$$

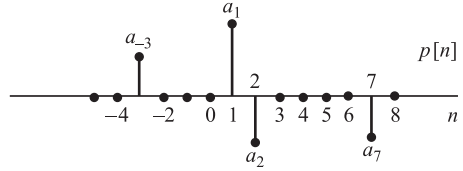


Рис. 2.4. Пример последовательности, представляющейся в виде конечной линейной комбинации сдвинутых импульсов

¹Символом j обозначается мнимая единица, т. е. $\sqrt{-1}$. — Примеч. перев.

т. е. как вещественная, так и мнимая часть последовательности меняется синусоидально в зависимости от n . По аналогии со случаем непрерывного времени величину ω_0 называют (круговой) *частотой* комплексной синусоиды или комплексной экспоненты, а φ — ее *фазой*. Однако n — безразмерное целое число, поскольку ω_0 измеряется в радианах. Если мы хотим проследивать тесную аналогию со случаем непрерывного времени, необходимо определить единицу частоты как радианы на отсчет, а дискретное время n измерять в отсчетах.

Тот факт, что переменная n в формуле (2.12) принимает только целые значения, подводит нас к некоторым важным отличиям в свойствах дискретных и непрерывных комплексных экспоненциальных и синусоидальных последовательностей. Рассмотрим, например, частоту $(\omega_0 + 2\pi)$. В этом случае

$$x[n] = Ae^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = Ae^{j\omega_0 n} e^{j2\pi n} = Ae^{j\omega_0 n}. \quad (2.13)$$

Комплексные экспоненциальные последовательности с частотами $(\omega_0 + 2\pi r)$ при $r \in \mathbb{Z}$ неотличимы друг от друга. Аналогичное утверждение справедливо для синусоидальных последовательностей:

$$x[n] = A \cos((\omega_0 + 2\pi r)n + \varphi) = A \cos(\omega_0 n + \varphi). \quad (2.14)$$

Следствия этого свойства для последовательностей, полученных дискретизацией синусоидальных и других сигналов, будут обсуждаться в гл. 4. На данный момент отметим, что при рассмотрении комплексных экспоненциальных сигналов вида $x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$ или вещественных синусоидальных сигналов типа $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ мы должны ограничиться частотами, лежащими в интервале длины 2π , например $-\pi < \omega_0 \leq \pi$ или $0 \leq \omega_0 < 2\pi$.

Следующее важное отличие дискретных комплексных экспонент и синусоид от непрерывных касается их периодичности. В непрерывном случае как синусоидальный, так и комплексный экспоненциальный сигнал являются периодической функцией, период которой равен 2π , деленному на частоту. В дискретном случае последовательность считают периодической, если

$$x[n] = x[n + N], \quad \forall n, \quad (2.15)$$

где период N — обязательно целое число. Проверяя это условие для дискретных синусоид, получим

$$A \cos(\omega_0 n + \varphi) = A \cos(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi), \quad (2.16)$$

откуда

$$\omega_0 N = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.17)$$

Аналогичное утверждение имеет место и для комплексной экспоненциальной последовательности $Ce^{j\omega_0 n}$. Она будет N -периодической, только если

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}. \quad (2.18)$$

Это равенство верно тогда и только тогда, когда $\omega_0 N = 2\pi k$, как в соотношении (2.17). Следовательно, комплексная экспоненциальная и синусоидальная последовательности не обязательно меняются периодически в зависимости от n с периодом $2\pi/\omega_0$. Свойство их периодичности зависит от значения частоты ω_0 .

Пример 2.1. Периодические и непериодические дискретные синусоиды

Рассмотрим сигнал $x_1[n] = \cos(\pi n/4)$. Его период равен $N = 8$. Для доказательства заметим, что равенства $x[n+8] = \cos(\pi(n+8)/4) = \cos(\pi n/4 + 2\pi) = \cos(\pi n/4) = x[n]$ справедливы для всех целых n , что и требуется в определении периодичности дискретных сигналов.

В отличие от того, что имеет место для непрерывных синусоидальных сигналов, увеличение частоты дискретной синусоиды не обязательно влечет уменьшение ее периода. Рассмотрим последовательность $x_2[n] = \cos(3\pi n/8)$, имеющую большую частоту, чем $x_1[n]$, и заметим, что период $x_2[n]$ отличен от 8. Действительно, $x_2[n+8] = \cos(3\pi(n+8)/8) = \cos(3\pi n/8 + 3\pi) = -x_2[n]$. Так же как и в случае последовательности $x_1[n]$, можно показать, что период сигнала $x_2[n]$ равен 16. Итак, увеличение частоты от $\omega_0 = 2\pi/8$ до $\omega_0 = 3\pi/8$ ведет к *увеличению* периода сигнала. Это происходит из-за того, что дискретный сигнал определен лишь при целых значениях n . \square

Комбинируя условие (2.17) с предыдущим наблюдением о неразличимости частот ω_0 и $(\omega_0 + 2\pi r)$, получим, что существует ровно N различных значений частоты, при которых соответствующая последовательность имеет период N , а именно $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Это свойство комплексных экспоненциальных и синусоидальных последовательностей носит основополагающий характер как для теории, так и для разработки численных алгоритмов в дискретном анализе Фурье. Оно будет подробно обсуждаться в гл. 8 и 9.

Возвращаясь к различиям между непрерывными и дискретными синусоидами, необходимо отметить, что верхние и нижние частоты также по-разному проявляются в непрерывном и дискретном случаях. При росте частоты Ω_0 непрерывный сигнал $x(t) = A \cos(\Omega_0 t + \varphi)$ осциллирует быстрее. Дискретный синусоидальный сигнал $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ тоже увеличивает скорость осциллирования при возрастании ω_0 от 0 до π . Однако при изменении частоты ω_0 от π до 2π его колебания замедляются, что отражено на рис. 2.5.

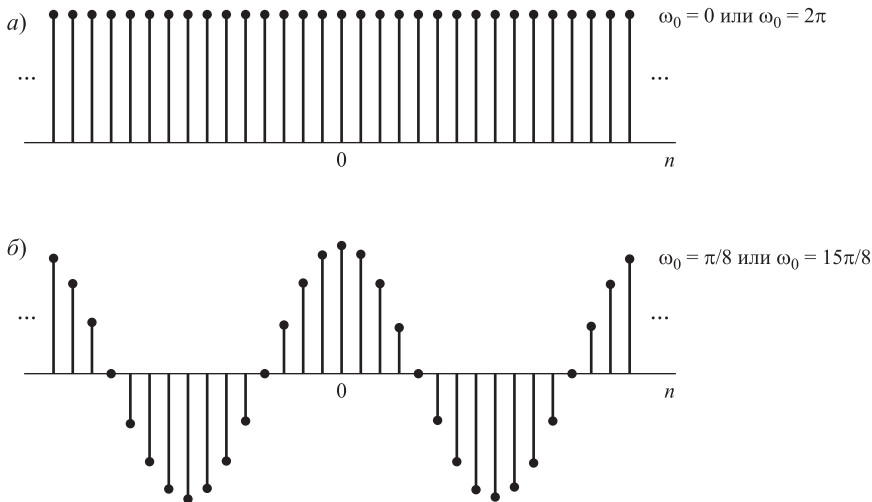


Рис. 2.5. Последовательности $\cos \omega_0 n$ для некоторых значений ω_0

Фактически ввиду периодичности синусоидального и комплексного экспоненциального сигналов относительно ω_0 частоты $\omega_0 = 0$ и $\omega_0 = 2\pi$ не отличаются друг

от друга. Таким образом, частоты, близкие к 0, ничем не отличаются от частот, близких к 2π . Как следствие, для синусоидальных и комплексных экспоненциальных сигналов значения ω_0 в окрестности $2\pi k$ при любом целом k принято называть *нижними* (соответственно медленно осциллирующими), в то время как ее значения в окрестности $(\pi + 2\pi k)$ называют *верхними* (соответственно быстро осциллирующими).

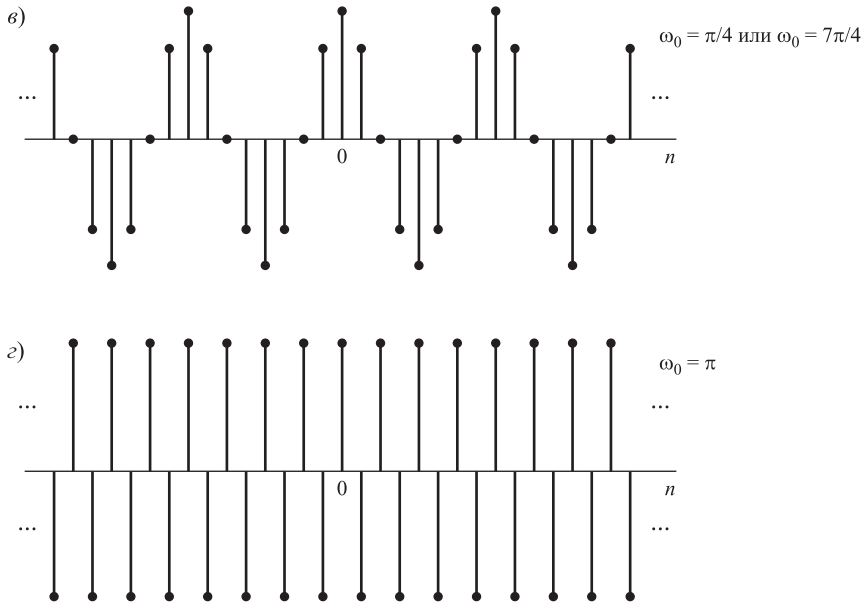


Рис. 2.5 (Окончание).

2.3. Дискретные системы

С точки зрения математики *система с дискретным временем* определяется как преобразование, или оператор, переводящий входную последовательность (*сигнал*) $x[n]$ в выходную последовательность $y[n]$ (*отклик*, или *реакцию системы*), что можно обозначить как

$$y[n] = T\{x[n]\} \tag{2.19}$$

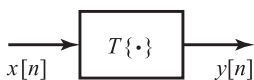


Рис. 2.6. Графическое представление дискретной системы

и изображать графически, как показано на рис. 2.6. Соотношение (2.19) — это правило или формула, по которой вычисляются значения реакции системы через отсчеты сигнала, поданного на ее вход.

Необходимо подчеркнуть, что отсчет реакции системы с индексом n может зависеть от всех отсчетов входного сигнала $x[n]$, т. е. y в момент n зависит от всей последовательности x или от ее части. Следующие примеры знакомят с некоторыми простыми, но полезными системами.

Пример 2.2. Идеальная система задержки

Идеальная система задержки (ИСЗ) определяется по формуле

$$y[n] = x[n - n_d], \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.20)$$

где n_d — фиксированное целое число, называемое *задержкой* системы. Иными словами, ИСЗ сдвигает входную последовательность вправо на n_d отсчетов. Если в формуле (2.20) взять в качестве n_d фиксированное отрицательное целое число, то система будет сдвигать входную последовательность влево на $|n_d|$ отсчетов, что соответствует опережению времени. □

В примере 2.2 для вычисления отсчета отклика системы используется единственный отсчет входной последовательности. В следующем примере это не так.

Пример 2.3. Скользящее среднее

Общая система скользящего среднего имеет вид

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \times \quad (2.21)$$

$$\times (x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \dots + x[n] + \dots + x[n - M_2]).$$

Она вычисляет n -й отсчет выходной последовательности как среднее арифметическое $(M_1 + M_2 + 1)$ входных отсчетов, расположенных вокруг n -го. На рис. 2.7 изображена входная последовательность как функция от переменной k и ее отсчеты, участвующие в вычислении выходного отсчета $y[n]$ при $n = 7$, $M_1 = 0$ и $M_2 = 5$. Получающийся отсчет $y[7]$ равен $1/6$ суммы всех отсчетов, лежащих между вертикальными пунктирными линиями. Для вычисления $y[8]$ обе пунктирные линии надо сдвинуть вправо на одну позицию. □

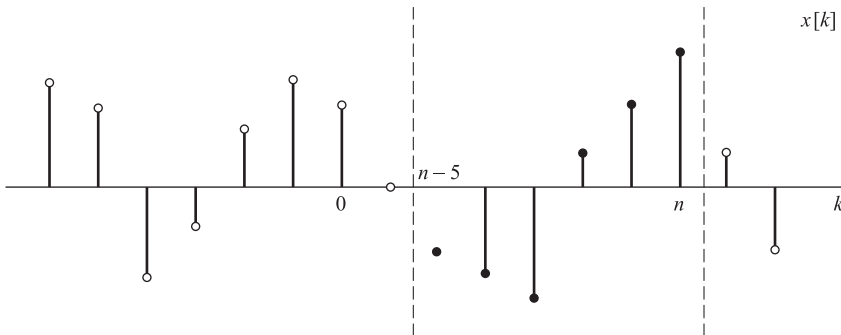


Рис. 2.7. Члены последовательности, участвующие в вычислении скользящего среднего при $M_1 = 0$ и $M_2 = 5$

Классы систем определяются наложением определенных ограничений на свойства преобразования T . Этот процесс, как мы сможем убедиться далее, часто ведет к самым общим математическим представлениям. Особое значение имеют системы, ограничения и свойства, обсуждаемые в подразделах 2.3.1–2.3.5.

2.3.1. Системы без памяти

Систему, n -й отсчет $y[n]$ реакции которой при каждом n зависит только от одного отсчета (с тем же самым индексом n) входного сигнала $x[n]$, называют *системой без памяти*.

Пример 2.4. Система без памяти

Примером может служить система, в которой

$$y[n] = (x[n])^2 \quad \forall n. \tag{2.22}$$

Система примера 2.2 относится к системам без памяти, только если $n_d = 0$. В частности, говорят, что система примера 2.2 имеет «память», если n_d положительно (задержка времени) или отрицательно (опережение времени). Система скользящего среднего примера 2.3 не имеет памяти, только когда $M_1 = M_2 = 0$. □

2.3.2. Линейные системы

Класс *линейных систем* определяется по принципу суперпозиции. Если $y_1[n]$ и $y_2[n]$ — отклики системы на сигналы $x_1[n]$ и $x_2[n]$, то систему называют *линейной* тогда и только тогда, когда

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} \quad \text{и} \quad T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\}, \tag{2.23}$$

где a — произвольная константа. Первое из свойств называют *аддитивностью*, а второе — *однородностью*. Оба свойства можно записать одной формулой по принципу суперпозиции:

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}, \tag{2.24}$$

где a и b — произвольные константы. Последнее соотношение легко может быть переписано для нескольких сигналов, а именно

$$\text{если } x[n] = \sum_k a_k x_k[n], \quad \text{то } y[n] = \sum_k a_k y_k[n],$$

где $y_k[n]$ — реакция системы на поданный сигнал $x_k[n]$.

Используя определение, легко проверить, что системы примеров 2.2 и 2.3 линейны (см. задачу 2.39). Образец нелинейной системы дан в примере 2.4.

Пример 2.5. Сумматор

Система, определяемая уравнением

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k], \tag{2.25}$$

называется *сумматором*, поскольку значение ее реакции в момент времени n равно сумме всех предыдущих отсчетов входной последовательности вплоть до n -го. Сумматор — это линейная система. Подадим на вход сумматора две произвольные последовательности $x_1[n]$, $x_2[n]$ и вычислим соответствующие отклики:

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_1[k], \tag{2.26}$$

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_2[k]. \tag{2.27}$$

Если теперь на вход сумматора подать сигнал $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, то по принципу суперпозиции вне зависимости от выбранных констант a и b мы должны получить равенство

$y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$. Проверим это, отталкиваясь от определения (2.25).

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_3[k] = \quad (2.28)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^n (ax_1[k] + bx_2[k]) = a \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] + b \sum_{k=-\infty}^n x_2[k] = \quad (2.29)$$

$$= ay_1[n] + by_2[n]. \quad (2.30)$$

Итак, сумматор действительно удовлетворяет принципу суперпозиции, т. е. является линейной системой. \square

Пример 2.6. Нелинейная система

Рассмотрим систему

$$w[n] = \log_{10} |x[n]|. \quad (2.31)$$

Эта система нелинейна. Для доказательства нам достаточно найти один контрпример, т. е. пару сигналов, для которой нарушается принцип суперпозиции (2.24). Возьмем сигналы $x_1[n] = 1$ и $x_2[n] = 10$. Соответствующие отклики — $w_1[n] = 0$ и $w_2[n] = 1$. Требование однородности в линейных системах в данной ситуации диктует соотношение $w_2[n] = 10w_1[n]$, поскольку $x_2[n] = 10x_1[n]$. Однако у нас это не выполнено. Значит, система (2.31) нелинейна. \square

2.3.3. Стационарные системы

К *стационарным* относят системы, для которых временной сдвиг (или задержка) входной последовательности вызывает соответствующий сдвиг выходной последовательности. Более формально определение выглядит так. Пусть дискретная система определена формулой $y[n] = T\{x[n]\}$. Она называется стационарной, если для любой входной последовательности $x[n]$ и произвольного целого числа n_0 выполнено соотношение $T\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$. Стационарные системы иногда еще называют системами, *инвариантными относительно сдвигов*.

Как и в случае с линейными системами, доказательство стационарности данной системы требует общего рассуждения, не допускающего каких-либо специфических предположений относительно входных сигналов. Все системы из примеров 2.2–2.6 стационарны. Принцип доказательства стационарности системы иллюстрируют примеры 2.7 и 2.8.

Пример 2.7. Стационарность сумматора

Рассмотрим сумматор из примера 2.5. Положим $x_1[n] = x[n - n_0]$. Для доказательства стационарности сумматора нам следует вычислить $y[n - n_0]$, $y_1[n]$ и сравнить результаты. По определению сумматора имеем

$$y[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k]; \quad (2.32)$$

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^n x_1[k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k - n_0]. \quad (2.33)$$

Поменяв в последней сумме параметр суммирования на $k_1 = k - n_0$, получим

$$y_1[n] = \sum_{k_1=-\infty}^{n-n_0} x[k_1] = y[n - n_0].$$

Таким образом, сумматор действительно является стационарной системой. \square

Следующий пример знакомит с нестационарной системой.

Пример 2.8. Уплотнитель

Система, определенная соотношением

$$y[n] = x[Mn], \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.34)$$

где M — натуральное число, называется *уплотнителем*. Эта система отбрасывает $M - 1$ из каждых M отсчетов входной последовательности, оставляя только M -й. Она, конечно, нестационарна, в чем легко убедиться, рассмотрев реакцию $y_1[n]$ системы на входной сигнал $x_1[n - n_0]$. Если бы наша система была стационарна, то выполнялось бы равенство $y_1[n] = y_1[n - n_0]$. Однако

$$y_1[n] = x_1[Mn] = x[Mn - n_0] \neq y_1[n - n_0] = x[M(n - n_0)].$$

Другой способ проверки нестационарности системы состоит в предъявлении контрпримера, т. е. входной последовательности, для которой нарушается условие стационарности. Пусть, например, $M = 2$, $x[n] = \delta[n]$ и $x_1[n] = \delta[n - 1]$. Тогда $y[n] = \delta[Mn] = \delta[n]$, но $y_1[n] = \delta[Mn - 1] = 0$. Следовательно, $y_1[n] \neq y_1[n - 1]$, что противоречит условию стационарности. \square

2.3.4. Причинность

Систему называют *причинной* (или каузальной), если член входной последовательности с номером n_0 зависит только от тех членов входной последовательности, номер которых не превышает n_0 . Отсюда следует, что если $x_1[n] = x_2[n]$ при $n \leq n_0$, то $y_1[n] = y_2[n]$ при $n \leq n_0$. Система примера 2.2 причинная, если $n_d \geq 0$, и не является таковой при $n_d < 0$. Система примера 2.3 причинная при $-M_1 \geq 0$ и $M_2 \geq 0$. В противном случае она не является причинной. Система примера 2.4 причинная, как и сумматор из примера 2.5, и нелинейная система примера 2.6. А вот система примера 2.8 — непричинная при $M > 1$, поскольку $y[1] = x[M]$. Еще одна непричинная система приведена в следующем примере.

Пример 2.9. Правая и левая разностные системы

Рассмотрим *правую разностную* систему, определенную по правилу

$$y[n] = x[n + 1] - x[n]. \quad (2.35)$$

Она не является причинной, так как каждый из членов выходной последовательности с номером n зависит как от $x[n]$, так и от $x[n + 1]$. Нарушение причинности легко заметить, взяв в качестве входных последовательностей $x_1[n] = \delta[n - 1]$ и $x_2[n] = 0$. Соответствующие отклики — $y_1[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]$ и $y_2[n] = 0$. Заметим, что $x_1[n] = x_2[n]$ при $n \leq 0$. Поэтому, по определению причинности, должно выполняться равенство $y_1[n] = y_2[n]$ для всех $n \leq 0$, которое нарушается при $n = 0$. Итак, предъявив контрпример, мы показали, что правая разностная система не является причинной.

Левая разностная система определяется как

$$y[n] = x[n] - x[n - 1]. \quad (2.36)$$

Каждый член выходной последовательности этой системы зависит от члена входной последовательности с тем же номером и одного предыдущего. Значит, она является причинной по определению. \square

2.3.5. Устойчивость

Есть несколько слегка отличающихся друг от друга определений устойчивости. Мы в этой книге придерживаемся понятия устойчивости в смысле «ограниченный вход — ограниченный выход».

Говорят, что система *устойчива*, если и только если ее реакция на любой ограниченный по амплитуде сигнал ограничена. Напомним, что последовательность $x[n]$ называется *ограниченной*, если найдется такое конечное положительное число B_x , для которого

$$\forall n \quad |x[n]| \leq B_x < \infty. \quad (2.37)$$

Таким образом, в устойчивой системе для каждой ограниченной входной последовательности найдется такая положительная константа B_y , что

$$\forall n \quad |y[n]| \leq B_y < \infty. \quad (2.38)$$

Важно осознать, что свойство, которое мы здесь определили, — это свойство системы, а не входных последовательностей. Иначе говоря, мы вполне можем предъявить пары сигнал–отклик, обладающие указанным свойством. Но наличие таких пар еще не означает устойчивости системы. Данная система будет устойчива только в том случае, когда этим свойством обладают *все* пары. Например, для неустойчивой системы мы можем найти ряд ограниченных сигналов, на которые наша система дает ограниченные отклики, однако результат применения устойчивой системы к *любой* ограниченной входной последовательности должен быть ограниченным. Поэтому, как только нам удалось найти хотя бы одну ограниченную последовательность, отклик на которую будет неограниченным, можно с уверенностью заключить, что эта система неустойчива. В следующем примере проверяется устойчивость уже знакомых нам систем.

Пример 2.10. Проверка устойчивости систем

Система примера 2.4 устойчива. Для доказательства этого факта предположим, что на вход системы подается сигнал $x[n]$ с верхней границей B_x , т. е. $|x[n]| \leq B_x$ для всех n . Тогда $|y[n]| = |x[n]|^2 \leq B_x^2$. Таким образом, $B_y = B_x^2$ — верхняя граница реакции системы $y[n]$, доказывающая ее ограниченность. Следовательно, проверяемая система устойчива.

Используя аналогичные рассуждения, можно доказать устойчивость систем примеров 2.2, 2.3, 2.8 и 2.9.

С другой стороны, легко убедиться в неустойчивости системы примера 2.6. Действительно, $y[n] = \log_{10}(x[n]) = -\infty$ для любого номера n , при котором $x[n] = 0$, хотя отсчеты отклика конечны для всех значений n , при которых $x[n] \neq 0$.

Сумматор, введенный в примере 2.5 формулой (2.25), также неустойчив. Рассмотрим, например, последовательность $x[n] = u[n]$. Ее ограниченность не вызывает сомнений, поскольку $B_x = 1$. Отклик сумматора на такой сигнал имеет вид

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ n + 1, & n \geq 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Последовательность $y[n]$ неограниченна, поскольку при любом выборе константы B_y неравенство $n + 1 \leq B_y < \infty$ нарушается при достаточно больших n . Следовательно, сумматор является неустойчивой системой. \square

2.4. Линейные стационарные системы

Особое значение имеет класс систем, являющихся одновременно как линейными, так и стационарными. Наличие этих свойств позволяет представить системы в удобном виде. Более того, они играют ведущую роль в приложениях обработки сигналов. Класс линейных систем определяется с помощью принципа суперпозиции уравнением (2.24). Учитывая свойство линейности и представление общей последовательности в виде линейной комбинации сдвинутых импульсов (2.5), можно заметить, что линейная система полностью определяется своей реакцией на сдвинутые импульсные последовательности. Более точно, пусть $h_k[n]$ — реакция системы на $\delta[n - k]$. Тогда согласно тождеству (2.5)

$$y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k] \right\} \quad (2.40)$$

и принципу суперпозиции (2.24) можно записать

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T \{ \delta[n - k] \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]. \quad (2.41)$$

Итак, мы получили, что реакция линейной системы на любую входную последовательность выражается в терминах откликов системы на сигналы $\delta[n - k]$. Если система всего лишь линейна, то отсчеты $h_k[n]$ зависят как от k , так и от n , и помощь, оказываемая уравнением (2.41) при вычислениях, относительно невысока. Однако можно получить более полезный результат, если к свойству линейности добавить условие стационарности.

Свойство стационарности подразумевает, что если $h[n]$ — реакция системы на $\delta[n]$ (называемая *импульсной характеристикой* системы), то ее реакция на сигнал $\delta[n - k]$ равна $h[n - k]$. Опираясь на этот факт, уравнение (2.41) можно переписать в виде

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k], \quad \forall n. \quad (2.42)$$

Как следствие этой формулы, отметим, что линейная стационарная система (ЛС-система) полностью определяется своей импульсной характеристикой $h[n]$ в том смысле, что при известной последовательности $h[n]$, опираясь на (2.42), можно вычислить любой отклик $y[n]$.

Последовательность $y[n]$ называют (дискретной) *сверткой* последовательностей $h[n]$ и $x[n]$ и употребляют обозначение

$$y[n] = x[n] * h[n]. \quad (2.43)$$

Операция дискретной свертки строит последовательность $y[n]$ по двум данным последовательностям $x[n]$ и $h[n]$. Уравнение (2.42) выражает каждый отсчет выходной последовательности через все отсчеты входной последовательности и импульсную характеристику.

Обозначение уравнения (2.43) для операции свертки представляет собой удобный компактный вариант записи уравнения (2.42), но пользоваться им следует с осторожностью. Основное определение свертки двух последовательностей имеет вид (2.42), и каждый раз, прибегая к компактной форме (2.43), следует сверяться

с (2.42). Например, рассмотрим $y[n - n_0]$. Из (2.42) очевидно, что

$$y[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - n_0 - k] \quad (2.44)$$

или, в компактной записи,

$$y[n - n_0] = x[n] * h[n - n_0]. \quad (2.45)$$

Заменив $(n - n_0)$ в (2.42) на n , мы получим верный результат и сделаем правильный вывод, что не получится, если попробовать произвести ту же замену в (2.43). В сущности, $x[n - n_0] * h[n - n_0]$ приводит к $y[n - 2n_0]$.

Формула (2.42) наводит на мысль, что отсчет входной последовательности с номером $n = k$, представленный как $x[k]\delta[n - k]$, преобразуется системой в выходную последовательность $x[k]h[n - k]$ для $-\infty < n < \infty$, и что для каждого k эти последовательности комбинируются для формирования абсолютно всех выходных последовательностей. Эта интерпретация иллюстрируется рис. 2.8, где показаны импульсная характеристика, простая входная последовательность с тремя ненулевыми отсчетами, индивидуальные реакции на каждый такой отсчет и их комбинация, дающая отклик системы. Более конкретно $x[n]$ можно представить в виде суммы трех последовательностей $x[-2]\delta[n + 2]$, $x[0]\delta[n]$ и $x[3]\delta[n - 3]$, представляющих три ненулевых отсчета последовательности $x[n]$. Последовательности $x[-2]h[n + 2]$, $x[0]h[n]$ и $x[3]h[n - 3]$ — отклики системы на входные сигналы $x[-2]\delta[n + 2]$, $x[0]\delta[n]$ и $x[3]\delta[n - 3]$ соответственно. После этого реакция системы на сигнал $x[n]$ получается в виде суммы этих индивидуальных откликов.

Хотя дискретная свертка напоминает свертку функций из теории непрерывных линейных систем, определенную с помощью интеграла, ее не следует воспринимать как аппроксимацию интегральной свертки. Последняя свертка играет в основном теоретическую роль в непрерывных линейных системах, в то время как дискретная свертка, в дополнение к своей теоретической ценности, часто служит для явной реализации дискретных линейных систем. Поэтому очень важно наработать некоторую интуицию о свойствах дискретной свертки в реальных вычислениях.

Изложенная интерпретация уравнения (2.42) заключается в том, что дискретная свертка является прямым следствием линейности и стационарности системы. Однако несколько иной взгляд на эту формулу подводит нас к весьма важной вычислительной интерпретации. Когда мы смотрим на соотношение (2.42) как на формулу, вычисляющую отдельный отсчет выходной последовательности, замечаем, что $y[n]$ (т. е. n -й член выходной последовательности) получается в результате умножения входной последовательности (записанной как функция от k) на последовательность $h[n - k]$, $-\infty < k < \infty$, а затем при каждом фиксированном n суммируются все произведения $x[k]h[n - k]$ с переменной k в качестве параметра суммирования. Следовательно, при свертке двух последовательностей для вычисления n -го члена результата используются все отсчеты обеих последовательностей. Ключ к полному пониманию формулы (2.42) состоит в осознании процесса образования последовательности $h[n - k]$, $-\infty < k < \infty$, для всех значений n , которые представляют интерес. Чтобы закончить это осмысление свертки, полезно заметить, что

$$h[n - k] = h[-(k - n)]. \quad (2.46)$$

Интерпретацию формулы (2.46) лучше всего посмотреть на примере.

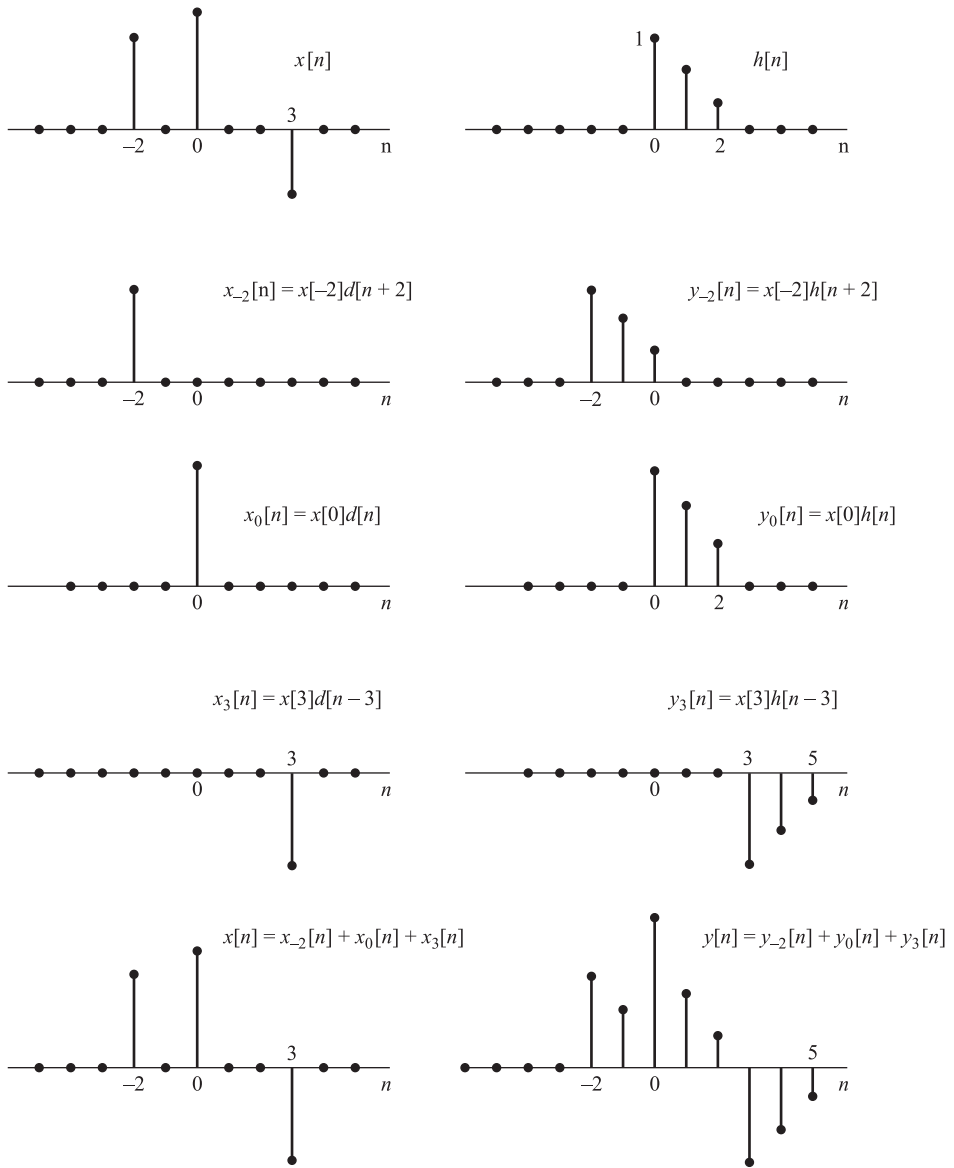


Рис. 2.8. Представление выходной последовательности линейной стационарной системы в виде суперпозиции откликов на индивидуальные отсчеты

Предположим, что $h[k]$ — последовательность, изображенная на рис. 2.9, *a*, а нам нужно найти $h[n-k] = h[-(k-n)]$. Определим $h_1[k]$ как $h[-k]$ (рис. 2.9, *б*). Затем зададим $h_2[k]$ как последовательность $h_1[k]$, задержанную на n отсчетов по оси k , т. е. $h_2[k] = h_1[k-n]$. На рис. 2.9, *в* изображена последовательность, полученная из последовательности рисунка 2.9, *б* сдвигом на n отсчетов вправо. Опираясь на связь между $h_1[k]$ и $h[k]$, можно показать, что $h_2[k] = h_1[k-n] = h[-(k-n)] = h[n-k]$, и, таким образом, нижняя последовательность рисунка является искомым сигналом. Подводя итог, скажем, что для вычисления $h[n-k]$ нам нужно обратить по

времени последовательность $h[k]$ относительно $k = 0$, а затем сдвинуть полученный результат на n отсчетов вправо.

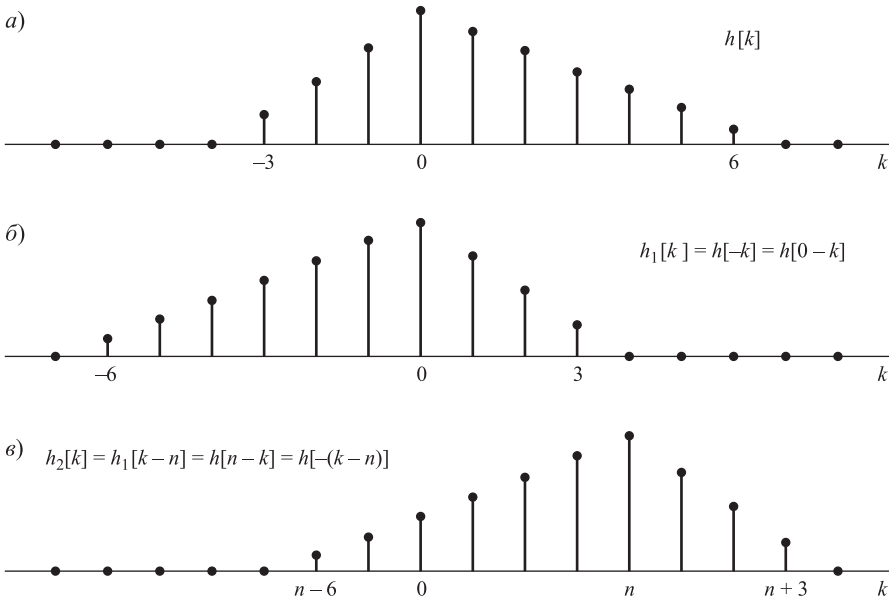


Рис. 2.9. Получение последовательности $h[n-k]$: а) последовательность $h[k]$; б) последовательность $h[-k]$; в) последовательность $h[-(k-n)]$ при $n = 4$

Как уже отмечалось, для вычисления свертки последовательности $x[k]$ и $h[n-k]$ перемножаются, а затем произведения суммируются и получается отсчет $y[n]$ выходной последовательности. Чтобы найти другой отсчет свертки, начало отсчета (нулевой момент времени) последовательности $h[-k]$ сдвигается на новую позицию, и процесс повторяется. Эта процедура применяется как при численной обработке отсчетов, полученных при дискретизации сигналов, так и при аналитических вычислениях, когда отсчеты поддаются описанию простой формулой. Следующий пример иллюстрирует дискретную свертку в последнем случае.

Пример 2.11. Аналитическое вычисление свертки

Рассмотрим систему с импульсной характеристикой

$$h[n] = u[n] - u[n - N] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть входная последовательность имеет вид

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases}$$

т. е.

$$x[n] = a^n u[n].$$

Чтобы найти n -й отсчет соответствующей входной последовательности, нам нужно просуммировать произведения $x[k]h[n-k]$ по всем k . В этом случае мы можем найти формулы

для $y[n]$ при различных значениях n . Например, рис. 2.10, а показывает последовательности $x[k]$ и $h[n-k]$ при некотором отрицательном значении n . Очевидно, все отрицательные числа n дают одну и ту же картинку, т. е. ненулевые части последовательностей $x[k]$ и $h[n-k]$ не перекрываются. Следовательно,

$$y[n] = 0 \quad \text{при } n < 0.$$

На рис. 2.10, б показаны последовательности при $0 \leq n$ и $n - N + 1 \leq 0$. Эти ограничения на n можно записать одним двойным неравенством: $0 \leq n \leq N - 1$. Исследуя рис. 2.10, б, мы видим, что

$$x[k]h[n-k] = a^k \quad \text{при } 0 \leq k \leq N - 1,$$

поэтому

$$y[n] = \sum_{k=0}^n a^k \quad \text{при } 0 \leq n \leq N - 1. \tag{2.47}$$

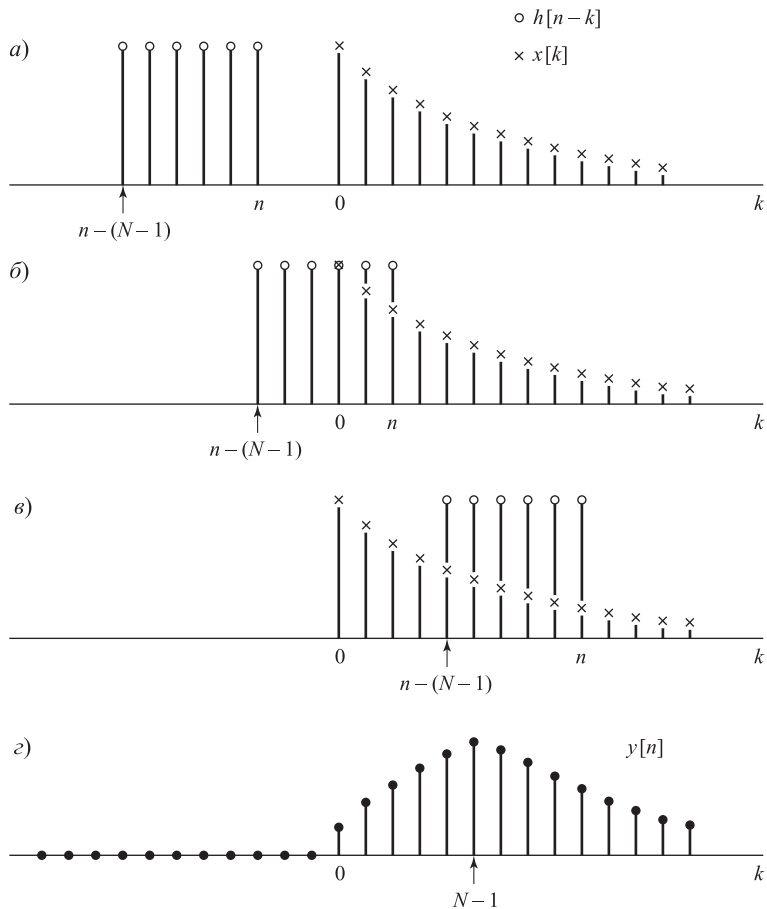


Рис. 2.10. Последовательности, участвующие в вычислении дискретной свертки: а-в — ненулевые части последовательностей $x[k]$ и $h[n-k]$ при различных значениях n ; г) выходная последовательность $y[n]$

Пределы суммирования в этой формуле непосредственно следуют из рис. 2.10, б). Формула (2.47) говорит о том, что $y[n]$ равен сумме $n + 1$ члена геометрической прогрессии со

знаменателем a , которая может быть выражена по известной формуле:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha^k = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1 - \alpha}, \quad N_2 \geq N_1. \quad (2.48)$$

Используя эту формулу, получаем

$$y[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (2.49)$$

Наконец, на рис. 2.10, в изображены две последовательности с $0 < n - N + 1$ (или $N - 1 < n$). Как и раньше,

$$x[k]h[n - k] = a^k, \quad n - N + 1 \leq k \leq n,$$

но теперь нижний предел суммирования равен $n - N + 1$ (см. рис. 2.10, в). Таким образом,

$$\text{при } N - 1 < n \quad y[n] = \sum_{k=n-N+1}^n a^k. \quad (2.50)$$

Вновь применяя соотношение (2.48), находим

$$y[n] = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1 - a} = a^{n-N+1} \frac{1 - a^N}{1 - a}. \quad (2.51)$$

Итак, благодаря кусочно-экспоненциальной природе как входной последовательности, так и импульсной характеристики мы смогли получить выражение для $y[n]$ как функцию от n :

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, & 0 \leq n \leq N - 1, \\ a^{n-N+1} \frac{1 - a^N}{1 - a}, & N - 1 < n. \end{cases} \quad (2.52)$$

Результирующая последовательность представлена на рис. 2.10, г. \square

Пример 2.11 демонстрирует, как можно аналитически вычислить свертку, если входная последовательность и импульсная характеристика заданы простыми формулами. В этих случаях свертка может быть выражена в компактном виде, если использовать формулу суммы членов геометрической прогрессии или другие удобные формулы¹. Когда компактная форма записи недоступна, свертка может быть выражена и конечной суммой, как это показано в примере 2.11, если входная последовательность или импульсная характеристика — сигнал ограниченной длительности, т. е. имеют конечное число ненулевых отсчетов.

2.5. Свойства линейных стационарных систем

Поскольку линейные стационарные системы описываются сверткой (2.42), свойства этого класса систем определяются свойствами дискретной свертки. Следовательно, импульсная характеристика линейной стационарной системы является полным описанием ее свойств.

¹Такого сорта результаты обсуждаются, например, в [77].

Некоторые общие свойства класса линейных стационарных систем можно обнаружить, изучая свойства операции свертки. Например, свертка — коммутативная операция:

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]. \tag{2.53}$$

Коммутативность можно доказать, осуществив замену параметра суммирования в формуле (2.42). Более точно, если $m = n - k$, то

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{-\infty} x[n - m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n - m] = h[n] * x[n], \tag{2.54}$$

и роли последовательностей $x[n]$ и $h[n]$ поменялись. Таким образом, порядок последовательностей в свертке несуществен, т. е. реакция системы не изменится, если поменять местами входную последовательность и отклик системы на единичный импульс. Иными словами, отклик системы на сигнал $x[n]$ при импульсной характеристике $h[n]$ будет тем же, что и реакция на сигнал $h[n]$ при импульсной характеристике $x[n]$.

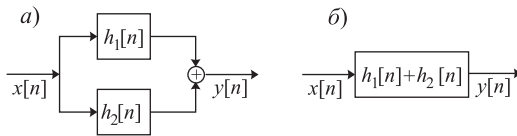


Рис. 2.11. а) Параллельное соединение линейных стационарных систем; б) система, эквивалентная системе а

Свертка удовлетворяет свойству дистрибутивности относительно сложения, а именно

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]. \tag{2.55}$$

Это свойство непосредственно вытекает из формулы (2.42) и является прямым следствием линейности и коммутативности свертки. Формула (2.55)

графически представлена на рис. 2.11: правая часть (2.55) — это а, левая — это б. Свертка удовлетворяет свойству ассоциативности, а именно:

$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]). \tag{2.56}$$

А поскольку свертка обладает коммутативностью, формула (2.56) эквивалентна

$$y[n] = x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]. \tag{2.57}$$

Графически это представлено на рис. 2.12. Кроме того, из (2.56) и (2.57) очевидно, что если две ЛС-системы с импульсными характеристиками $h_1[n]$ и $h_2[n]$ соединяются каскадно в любом порядке, импульсная характеристика каскада систем $h[n]$ имеет вид

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]. \tag{2.58}$$

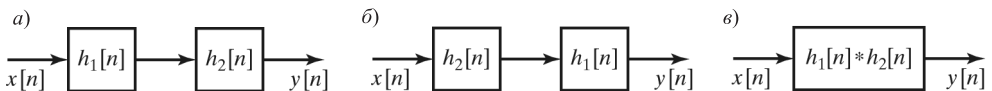


Рис. 2.12. а) Каскадное соединение двух ЛС-систем; б) эквивалентный каскад систем; в) общая эквивалентная система а

При параллельном соединении системы имеют общий вход, а их выходные последовательности складываются и дают реакцию всего соединения. Как следует из дистрибутивности свертки, параллельное соединение двух линейных стационарных

систем можно заменить одной линейной стационарной системой, чья импульсная характеристика равна сумме импульсных характеристик отдельных компонентов, т. е.

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]. \quad (2.59)$$

Требования линейности и стационарности выделяют класс систем с весьма специфическими свойствами. Устойчивость и причинность предоставляют вспомогательные свойства, и часто бывает важно знать, является ли данная линейная стационарная система устойчивой или причинной. Напомним (подраздел 2.3.5), что устойчивой системой называют систему с ограниченной реакцией на каждый ограниченный входной сигнал. Линейная стационарная система является устойчивой тогда и только тогда, когда ее импульсная характеристика — абсолютно суммируемая последовательность, т. е. если

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty. \quad (2.60)$$

Это можно обосновать следующим образом. Из формулы (2.54) имеем

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]|. \quad (2.61)$$

Если $x[n]$ ограничена, то найдется константа B_x , для которой

$$\forall k \quad |x[n]| \leq B_x.$$

Поэтому для всех k верно неравенство $|x[n-k]| \leq B_x$. Следовательно,

$$|y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|. \quad (2.62)$$

Итак, $y[n]$ — ограниченная последовательность, если выполнено условие (2.60), что дает *достаточное* условие устойчивости. Чтобы доказать необходимость этого условия, нам нужно показать, что если $B_h = \infty$, то найдется ограниченная входная последовательность, реакция на которую будет неограниченна. Таким входом является последовательность

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0, \\ 0, & h[n] = 0, \end{cases} \quad (2.63)$$

где $h^*[n]$ — комплексное сопряжение отсчета $h[n]$. Очевидно, последовательность $x[n]$ ограничена единицей. Однако отсчет выходной последовательности при $n = 0$ равен

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = B_h. \quad (2.64)$$

Значит, если $B_h = \infty$, то существует неограниченный отклик на ограниченный сигнал, что доказывает неустойчивость системы в этом случае.

Причинная система определена в подразделе 2.3.4 как система, отсчет $y[n_0]$ реакции которой зависит только от отсчетов $x[n]$ сигнала с $n \leq n_0$. Ввиду (2.42) и (2.54) это определение влечет утверждение: импульсная характеристика причинной линейной стационарной системы должна удовлетворять условию

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \quad (2.65)$$

(см. задачу 2.69). По этой причине последовательность с нулевыми членами $h[n]$ при $n < 0$ удобно иногда называть *причинной*, подразумевая, что она является откликом на единичный импульс причинной линейной стационарной системы.

Для иллюстрации свойств линейной стационарной системы в отклике на единичный импульс вновь обратимся к примерам 2.2–2.9. Прежде всего заметим, что только системы из примеров 2.2, 2.3, 2.5 и 2.9 являются линейными и стационарными. Хотя для нелинейных или нестационарных систем импульсная характеристика тоже может быть вычислена, она представляет лишь ограниченный интерес, поскольку формула свертки, а также условия (2.60) и (2.65), обеспечивающие устойчивость и причинность, неприменимы к таким системам.

Найдем сначала реакцию систем примеров 2.2, 2.3, 2.5 и 2.9 на единичный импульс. Мы можем это сделать, опираясь непосредственно на формулы, задающие соответствующие системы.

Идеальная система задержки (пример 2.2)

$$h[n] = \delta[n - n_d], \quad n_d \text{ — фиксированное натуральное число.} \quad (2.66)$$

Скольльзящее среднее (пример 2.3)

$$h[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n - k] = \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.67)$$

Сумматор (пример 2.5)

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0 \end{cases} = u[n]. \quad (2.68)$$

Правая разностная система (пример 2.9)

$$h[n] = \delta[n + 1] - \delta[n]. \quad (2.69)$$

Левая разностная система (пример 2.9)

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n - 1]. \quad (2.70)$$

Зная импульсные характеристики стационарных систем ((2.66)–(2.70)), мы можем проверить системы на устойчивость, вычислив

$$B_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|.$$

Ясно, что для систем идеальной задержки, скользящего среднего, правой и левой разностных систем указанная сумма меньше бесконечности, поскольку в этих случаях импульсная характеристика имеет лишь конечное число ненулевых отсчетов. Такие системы называют *системами с конечной импульсной характеристикой* (КИХ-системами). Ясно, что КИХ-системы будут устойчивыми тогда и только тогда, когда их отклики на единичный импульс конечны по абсолютной величине. С другой стороны, сумматор не является устойчивой системой, так как

$$B_h = \sum_{n=0}^{\infty} u[n] = \infty.$$

В подразделе 2.3.5 мы уже доказали неустойчивость сумматора, предъявив пример ограниченного сигнала (единичный скачок), реакция на который неограниченна.

Импульсная характеристика сумматора неограниченна по длительности. Сумматор — пример класса систем, которые называют *системами с бесконечной импульсной характеристикой* (БИХ-системами). Примером устойчивой БИХ-системы служит такая система, импульсная характеристика которой имеет вид $h[n] = a^n u[n]$ с $|a| < 1$. В этом случае

$$B_h = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n. \quad (2.71)$$

Если $|a| < 1$, то формула суммы членов бесконечной геометрической прогрессии дает

$$B_h = \frac{1}{1 - |a|} < \infty. \quad (2.72)$$

С другой стороны, если $|a| \geq 1$, то соответствующая сумма бесконечна и система неустойчива.

Для проверки причинности линейных стационарных систем примеров 2.2, 2.3, 2.5 и 2.9 нам нужно убедиться, что $h[n] = 0$ при $n < 0$. Как было выяснено в подразделе 2.3.4, ИСЗ причинна при $n_d \geq 0$ (см. формулу (2.20)). Если $n_d < 0$, эта система не причинна. В случае скользящего среднего свойство причинности накладывает ограничения: $-M_1 \geq 0$ и $M_2 \geq 0$. Сумматор и левая разностная система являются причинными системами, а правая разностная система не причинна.

Концепция свертки как операции над двумя последовательностями подводит нас к упрощению многих задач, связанных с системами. Особенно полезный результат можно сформулировать относительно ИСЗ. Поскольку отклик этой системы имеет вид $y[n] = x[n - n_d]$, а ее импульсная характеристика равна $h[n] = \delta[n - n_d]$, то

$$x[n] * \delta[n - n_d] = \delta[n - n_d] * x[n] = x[n - n_d]. \quad (2.73)$$

Иными словами, свертка сдвинутого на n_d позиций единичного импульса с сигналом $x[n]$ приводит к задержке сигнала на то же число n_d .

Так как задержка является одной из основных операций при реализации линейных систем, предыдущий результат полезен при анализе и упрощении комплексов линейных стационарных систем. В качестве примера рассмотрим систему, изображенную на рис. 2.13, а, которая состоит из правой разностной системы, последовательно соединенной с одношаговой задержкой.

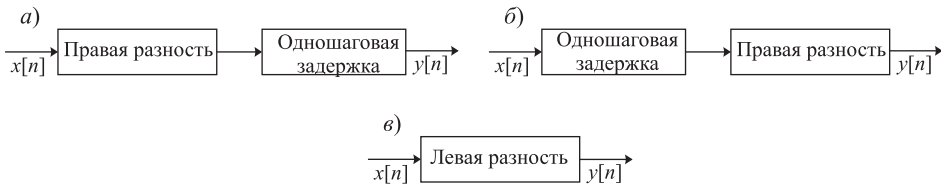


Рис. 2.13. Эквивалентные системы, получающиеся друг из друга благодаря коммутативности свертки

Ввиду коммутативности свертки порядок включения систем в каскадной схеме несуществен, поскольку они линейны и стационарны. Следовательно, поменяв местами одношаговую задержку и правую разностную систему (рис. 2.13, а), мы получим ту же результирующую систему (рис. 2.13, б). Кроме того, из формулы (2.56) и рис. 2.12. следует, что импульсная характеристика всей цепи систем совпадает со

сверткой импульсных характеристик каждой из составных частей. Поэтому

$$\begin{aligned}
 h[n] &= (\delta[n + 1] - \delta[n]) * \delta[n - 1] = \delta[n - 1] * (\delta[n + 1] - \delta[n]) = \\
 &= \delta[n] - \delta[n - 1].
 \end{aligned}
 \tag{2.74}$$

Мы видим, что $h[n]$ тождественна импульсной характеристике левой разностной системы, т. е. каскадные схемы, изображенные на рис. 2.13, *а* и *б*, можно заменить левой разностной системой, как показано на рис. 2.13, *в*.

Заметим, что непричинная правая разностная система, будучи последовательно соединена с задержкой (рис. 2.13, *а* и *б*), превращается в причинную систему. В общем случае непричинная КИХ-система может быть преобразована в причинную систему, если к ней присоединить достаточно большую задержку.

Другой пример каскада систем вводит понятие *обратной системы*. Рассмотрим каскад систем (рис. 2.14). Его импульсная характеристика вычисляется по правилу

$$h[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n - 1]) = u[n] - u[n - 1] = \delta[n].
 \tag{2.75}$$

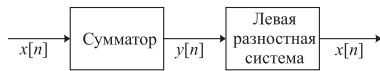


Рис. 2.14. Каскад сумматора и левой разностной системы. Поскольку левая разностная система является для сумматора обратной, каскадное соединение эквивалентно идентичной системе

То есть каскадная комбинация сумматора с левой разностной системой (в любом порядке) дает систему, чья импульсная характеристика совпадает с единичным импульсом. Таким образом, выход этой каскадной комбинации будет всегда совпадать со входом, поскольку $x[n] * \delta[n] = x[n]$. В этом случае действие левой разностной системы полностью компенсируется (или обращается) действием сумматора. При этом говорят, что левая разностная система — обратная система по отношению к сумматору.

Благодаря коммутативности свертки сумматор служит обратной системой для левой разностной системы. Заметим, что этот пример иллюстрирует представление системы, определяемой формулами (2.7) и (2.8). В общем случае, если импульсная характеристика ЛС-системы — $h[n]$, то ее обратная система (если она существует) реагирует на единичный импульс последовательностью $h_i[n]$, определенной соотношением

$$h[n] * h_i[n] = h_i[n] * h[n] = \delta[n].
 \tag{2.76}$$

Обратные системы полезны в ситуациях, когда необходимо компенсировать эффект линейной системы. В общем случае разрешить уравнение (2.76) относительно $h_i[n]$ очень трудно. Однако в гл. 3 мы увидим, что z -преобразование дает прямой метод построения обратной системы.

2.6. Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами

Важный подкласс линейных стационарных систем состоит из таких систем, у которых пара сигнал–отклик связана *линейным разностным уравнением* порядка N с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{m=0}^M b_m x[n - m].
 \tag{2.77}$$

Свойства, обсуждаемые в § 2.5, и некоторая техника, введенная там, позволяют найти разностные уравнения для отдельных линейных стационарных систем, которые мы уже определили.

Пример 2.12. Разностное уравнение сумматора

Сумматор определяется формулой

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]. \quad (2.78)$$

Чтобы показать, что вход и выход сумматора удовлетворяют уравнению вида (2.77), перепишем отклик системы в виде

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]. \quad (2.79)$$

Выделяя член $x[n]$ из суммы, получаем

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]. \quad (2.80)$$

Подстановка соотношения (2.79) в (2.80) дает

$$y[n] = x[n] + y[n-1], \quad (2.81)$$

следовательно,

$$y[n] - y[n-1] = x[n]. \quad (2.82)$$

Итак, вход и выход сумматора связаны линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами вида (2.77) с $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $M = 0$ и $b_0 = 1$.

Разностное уравнение (2.81) дает простой способ реализации сумматора. Согласно этому уравнению при каждом значении n мы складываем отсчет входной последовательности $x[n]$ с предыдущим отсчетом выхода сумматора $y[n-1]$, что иллюстрируется блок-схемой на рис. 2.15.

Уравнение (2.81) и блок-схему рис. 2.15 называют *рекурсивным представлением* системы, поскольку каждый отсчет реакции системы вычисляется с помощью найденных ранее отсчетов. Более общее понятие рекурсивной системы будет обсуждаться в этом параграфе несколько позже. □

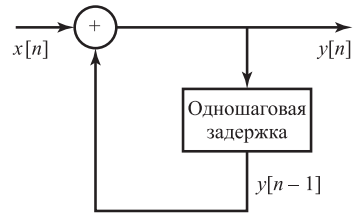


Рис. 2.15. Блок-схема рекурсивного разностного уравнения, представляющего сумматор

Пример 2.13. Разностное уравнение скользящего среднего

Рассмотрим систему скользящего среднего (пример 2.3) с $M_1 = 0$, при котором система становится причинной. В этом случае по формуле (2.67) импульсная реакция имеет вид

$$h[n] = \frac{1}{M_2 + 1} (u[n] - u[n - M_2 - 1]), \quad (2.83)$$

откуда

$$y[n] = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{k=0}^{M_2} x[n - k], \quad (2.84)$$

что является частным случаем формулы (2.77) с $N = 0$, $a_0 = 1$, $M = M_2$ и $b_k = \frac{1}{M_2+1}$ при $0 \leq k \leq M_2$.

Кроме того, импульсную реакцию можно представить в виде

$$h[n] = \frac{1}{M_2 + 1} (\delta[n] - \delta[n - M_2 - 1]) * u[n], \tag{2.85}$$

что говорит о возможности представления причинного скользящего среднего как каскада систем (рис. 2.16). Можно получить разностное уравнение для этой блок-схемы, заметив сначала (см. рис. 2.16), что

$$x_1[n] = \frac{1}{M_2 + 1} (x[n] - x[n - M_2 - 1]). \tag{2.86}$$

С другой стороны, по формуле (2.82) выход сумматора удовлетворяет уравнению

$$y[n] - y[n - 1] = x_1[n],$$

следовательно,

$$y[n] - y[n - 1] = \frac{1}{M_2 - 1} (x[n] - x[n - M_2 - 1]). \tag{2.87}$$

Мы снова приходим к разностному уравнению вида (2.77), но теперь $N = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $M = M_2 + 1$ и $b_0 = -b_{M_2+1} = \frac{1}{M_2-1}$ с нулевыми коэффициентами b_k при $k \neq 0$ и $k \neq M_2 + 1$. □

В примере 2.13 мы вывели два разных уравнения, характеризующих скользящее среднее. В главе 6 мы убедимся, что одна и та же линейная стационарная система может быть описана неограниченным числом разностных уравнений.

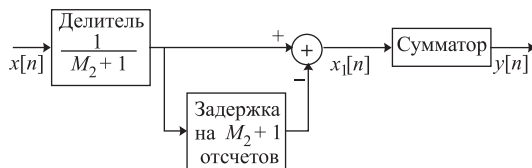


Рис. 2.16. Блок-схема рекурсивной формы скользящего среднего

Так же, как в случае линейных дифференциальных уравнений, описывающих поведение систем с непрерывным временем, разностные линейные уравнения определяют реакции системы на поданный сигнал не однозначно, если не наложить вспомогательных ограничивающих условий.

Более точно предположим, что для данного входа $x_p[n]$ мы смогли каким-то способом определить один выход $y_p[n]$, так что пара $(x_p[n], y_p[n])$ будет удовлетворять уравнению (2.77). Тогда этому же уравнению с тем же самым входом будет удовлетворять выходная последовательность вида

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n], \tag{2.88}$$

где $y_h[n]$ — любое решение этого уравнения с $x[n] = 0$, т. е. решение уравнения

$$\sum_{k=0}^N a_k y_h[n - k] = 0. \tag{2.89}$$

Уравнение (2.89) называют *однородным*, а его решение — *однородным решением*. Фактически последовательность $y_h[n]$ является членом семейства решений вида

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^N A_m z_m^n, \tag{2.90}$$

где коэффициенты A_m можно выбрать таким образом, чтобы они удовлетворяли дополнительным условиям $y[n]$.

Подстановка соотношения (2.90) в уравнение (2.89) показывает, что комплексные числа z_m — корни многочлена

$$A(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k}, \quad (2.91)$$

т. е. $A(z_m) = 0$ для $m = 1, 2, \dots, N$. Запись (2.90) однородного решения предполагает, что все N корней многочлена (2.91) различны. Вид членов, ассоциированных с кратными корнями многочлена, несколько иной, но в любом случае общий вид однородного решения содержит N неопределенных коэффициентов. Пример однородного решения с кратными корнями рассматривается в задаче 2.50.

Поскольку $y_h[n]$ содержит N неопределенных коэффициентов, необходимо еще N вспомогательных условий, с помощью которых решение $y[n]$ уравнения однозначно восстанавливается по последовательности $x[n]$. Эти условия могут состоять в конкретных значениях $y[n]$ при фиксированном значении параметра n , например $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$. Наложение таких вспомогательных ограничений приводит к системе N линейных алгебраических уравнений, решая которую, можно найти неопределенные коэффициенты.

С другой стороны, если мы каким-то способом найдем эти требуемые вспомогательные значения последовательности $y[n]$, то остальные отсчеты последовательности получаются по рекуррентной формуле, непосредственно вытекающей из уравнения (2.77):

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k]. \quad (2.92)$$

Если дана входная последовательность $x[n]$ вместе с вспомогательными данными, скажем, $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$, то $y[0]$ можно найти по формуле (2.92). Имея значения $y[0], y[-1], \dots, y[1-N]$, легко отыскать $y[1]$ и т. д. Когда $y[n]$ получается такой процедурой, говорят, что последовательность вычисляется *рекурсивно*, т. е. вычисления отсчетов выхода опираются не только на отсчеты входа, но и на определенные ранее члены выходной последовательности.

Чтобы найти значения $y[n]$ при $n < -N$ (снова предполагаем, что нам даны вспомогательные данные $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$), перепишем формулу (2.77) в виде

$$y[n-N] = - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_N} x[n-k]. \quad (2.93)$$

Теперь $y[-N-1], y[-N-2], \dots$ тоже можно определить рекурсивно в обратном направлении.

Наш главный интерес связан с системами, которые как линейны, так и стационарны. В этом случае вспомогательные условия должны согласовываться с требованиями линейности и стационарности. В гл. 3 при обсуждении решений разностных уравнений с использованием z -преобразования мы полностью учтем эти требования. Как мы увидим при этом обсуждении, даже налагая требования линейности и стационарности системы, невозможно гарантировать единственность решения разностного уравнения, и, следовательно, сама система не является однозначно определенной. В частности, можно найти как причинные, так и не причинные линейные стационарные системы, согласующиеся с данным разностным уравнением.

Если на систему, характеризующуюся линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами, наложить дополнительные ограничения: линейность, стационарность и причинность, то решение уравнения будет единственным. В этом случае вспомогательные данные часто называют *начальным состоянием покоя*. Иначе говоря, из вспомогательной информации о $x[n] = 0$ при $n < n_0$ (для некоторого n_0) должны вытекать равенства $y[n] = 0$ при $n < n_0$. Все это дает достаточные условия, при которых $y[n]$ для $n \geq n_0$ вычисляются единственным образом по формуле (2.92).

Подведем итог всему сказанному относительно систем, чей вход и выход удовлетворяют линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами.

- Выходная последовательность определена входной последовательностью неоднозначно. Для однозначности необходима вспомогательная информация.
- Если вспомогательная информация дана в виде N последовательных значений выходной последовательности, отсчеты выхода с большими номерами можно найти, переписав уравнение в виде рекуррентного соотношения, выражающего $y[n]$ через $y[k]$ с меньшими номерами, а отсчеты с меньшими номерами получаются из уравнения, переписанного как рекуррентное соотношение, выражающее $y[n]$ через $y[k]$ с большими номерами.
- Линейность, стационарность и причинность системы зависят от вспомогательных условий. Если дополнительно предполагать, что система первоначально находится в состоянии покоя, то она будет линейной, стационарной и причинной.

Обсуждая разностные уравнения, мы неявно предполагали, что константа N в уравнении (2.77) больше нуля. Если положить $N = 0$, то получим

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) x[n-k], \quad (2.94)$$

т. е. $y[n]$ выражается явно через отсчеты входной последовательности и никакого рекурсивного решения для вычисления выходной последовательности не требуется, а значит, и вспомогательная информация не нужна.

Нетрудно заметить, что формула (2.94) записана в виде свертки, и, положив $x[n] = \delta[n]$, найти, что импульсная характеристика равна

$$h[n] = \sum_{k=0}^M \left(\frac{b_k}{a_0} \right) \delta[n-k],$$

$$\text{или } h[n] = \begin{cases} \left(\frac{b_k}{a_0} \right), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.95)$$

Очевидно, импульсная характеристика в этом случае — сигнал ограниченной длительности. Действительно, выходную последовательность любой КИХ-системы можно вычислить нерекурсивным (прямым) способом, если коэффициенты — суть значения импульсной характеристики. Скользящее среднее (пример 2.13) с $M_1 = 0$ является примером причинной КИХ-системы. Интересно, что для отклика такой системы мы можем найти и рекурсивные соотношения. В главе 6 мы покажем, что существует множество способов реализации требуемого преобразования сигналов с использованием разностных уравнений. Преимущество одного метода перед другим

зависит от практических целей, стоящих перед разработчиком, таких как точность вычисления, объем промежуточных данных, который надо хранить, и число умножений и сложений, требуемых для вычисления каждого отсчета отклика.

2.7. Представление сигналов и систем в частотной области

В предыдущих параграфах мы определили некоторые из основных понятий теории дискретных сигналов и систем. Мы видели, что представление входного сигнала в виде взвешенной суммы сдвинутых импульсов позволяет интерпретировать выходной сигнал линейной стационарной системы в виде линейной комбинации сдвинутых импульсных характеристик. Как и непрерывные, дискретные сигналы можно представлять различными способами. Например, синусоидальные и комплексные экспоненциальные сигналы играют особенно важную роль в представлении дискретных сигналов. Это происходит в связи с тем, что комплексные экспоненциальные последовательности являются собственными функциями линейных стационарных систем, а реакция этой системы на синусоидальную последовательность остается синусоидальной последовательностью с той же частотой, фаза и амплитуда которой полностью определяются системой. Эти фундаментальные свойства линейных стационарных систем делают представление сигналов в терминах синусоидальных или комплексных экспоненциальных последовательностей (т. е. представление Фурье) весьма полезным в теории линейных систем.

2.7.1. Собственные функции линейных стационарных систем

Главное свойство комплексных экспонент в теории дискретных систем можно вывести из формулы (2.54). В частности, для входной последовательности $x[n] = e^{j\omega n}$, $-\infty < n < \infty$ соответствующая реакция линейной стационарной системы с импульсной характеристикой $h[n]$ имеет вид

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}, \quad (2.96)$$

где

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}. \quad (2.97)$$

Следовательно, $e^{j\omega n}$ — собственная функция системы с собственным числом $H(e^{j\omega})$. Из формулы (2.96) вытекает, что $H(e^{j\omega})$ описывает функциональную зависимость изменения комплексной амплитуды входного сигнала от частоты ω . Собственное число $H(e^{j\omega})$ называют *комплексной частотной характеристикой* (КЧХ) системы (или просто частотной характеристикой), поскольку в общей ситуации величина $H(e^{j\omega})$ комплексная и может быть выписана в алгебраической форме через свою вещественную и мнимую части:

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}), \quad (2.98)$$

или в показательном виде в терминах модуля и аргумента (фазы):

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})}. \quad (2.99)$$

Пример 2.14. Частотная характеристика ИСЗ

Найдем КЧХ идеальной системы задержки, определенной формулой

$$y[n] = x[n - n_d], \quad (2.100)$$

где n_d — фиксированное целое число. Если $x[n] = e^{j\omega n}$ — сигнал, поданный на вход системы, то по формуле (2.100) получаем

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n}.$$

Следовательно, КЧХ ИСЗ равна

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}. \quad (2.101)$$

Можно и по-другому определить КЧХ системы, для чего напомним, что $h[n] = \delta[n - n_d]$ — импульсная характеристика ИСЗ. Учитывая (2.97), имеем

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_d] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}.$$

Вещественная и мнимая части КЧХ определяются по формулам Эйлера

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d), \quad (2.102)$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin(\omega n_d). \quad (2.103)$$

Ее модуль и фаза равны:

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad (2.104)$$

$$\angle H_I(e^{j\omega}) = -\omega n_d. \quad (2.105)$$

В § 2.8 мы покажем, что сигнал из обширного класса последовательностей может быть представлен в виде линейной комбинации комплексных экспонент:

$$x[n] = \sum_k \alpha_k e^{j\omega_k n}. \quad (2.106)$$

По принципу суперпозиции и формуле (2.96) соответствующий отклик линейной стационарной системы равен

$$y[n] = \sum_k \alpha_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n}. \quad (2.107)$$

Итак, если нам удалось представить $x[n]$ в виде линейной комбинации экспоненциальных последовательностей, как в (2.106), то выходная последовательность определяется суммой (2.107) с помощью КЧХ системы для всех частот ω_k . Следующий простой пример иллюстрирует это фундаментальное свойство линейных стационарных систем.

Пример 2.15. Синусоидальное представление ЛС-систем

Рассмотрим синусоидальный вход

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (2.108)$$

Согласно (2.96), реакцией системы на сигнал $x_1[n] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}$ служит

$$y_1[n] = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}, \quad (2.109)$$

а на сигнал $x_2[n] = \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{j\omega_0 n}$ —

$$y_2[n] = H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}. \quad (2.110)$$

Следовательно, выходная последовательность имеет вид

$$y[n] = \frac{A}{2} \left(H(e^{j\omega_0}) e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n} \right). \quad (2.111)$$

Если отсчеты последовательности $h[n]$ вещественны, то можно доказать (см. задачу 2.78), что $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$. Следовательно,

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \varphi + \theta), \quad (2.112)$$

где $\theta = \angle H(e^{j\omega_0})$ — фаза КЧХ системы при частоте ω_0 , или значение фазо-частотной характеристики (ФЧХ) при $\omega = \omega_0$.

В случае идеальной задержки $|H(e^{j\omega_0})| = 1$ и $\theta = -\omega_0 n_d$, как мы убедились в примере 2.14. Следовательно,

$$y[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi - \omega_0 n_d) = A \cos(\omega_0(n - n_d) + \varphi), \quad (2.113)$$

что согласуется с результатом, непосредственно полученным из определения ИСЗ. \square

По существу, понятие КЧХ для непрерывных и дискретных линейных стационарных систем одно и то же. Однако имеет место и яркое отличие, которое заключается в том, что КЧХ дискретных линейных стационарных систем — *всегда* 2π -периодичная функция частоты ω . Чтобы осознать этот факт, подставим $\omega + 2\pi$ в уравнение (2.97).

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j(\omega+2\pi)n}. \quad (2.114)$$

Учитывая, что $e^{\pm j2\pi n} = 1$ при целых n , получаем

$$e^{-j(\omega+2\pi)n} = e^{-j\omega n} e^{-j2\pi n} = e^{-j\omega n}.$$

Следовательно,

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega}) \quad (2.115)$$

и, в более общем виде,

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}), \quad r \in \mathbb{Z}. \quad (2.116)$$

Иными словами, $H(e^{j\omega})$ — 2π -периодическая функция. Заметим, что этот факт очевиден в случае ИСЗ, поскольку $e^{-j(\omega+2\pi)n_d} = e^{-j\omega n_d}$ при целом n_d .

Причина периодичности непосредственно связана с нашим предыдущим замечанием о том, что последовательности

$$\{e^{j\omega n}\} \quad \text{и} \quad \{e^{j(\omega+2\pi)n}\}, \quad -\infty < n < \infty,$$

неотличимы друг от друга. Поскольку значения этих последовательностей совпадают при всех целых n , система должна на них реагировать одинаково. Именно поэтому выполняется равенство (2.115).

Так как функция $H(e^{j\omega})$ 2π -периодична, а частоты ω и $\omega + 2\pi$ неотличимы друг от друга, нам достаточно выяснить значения $H(e^{j\omega})$ на интервале длины 2π , например $0 \leq \omega < 2\pi$ или $-\pi < \omega \leq \pi$, и по периодичности определить КЧХ всюду вне указанного интервала. Для простоты и согласованности с непрерывным случаем функцию $H(e^{j\omega})$ удобно задавать на интервале $-\pi < \omega \leq \pi$. При таком выборе

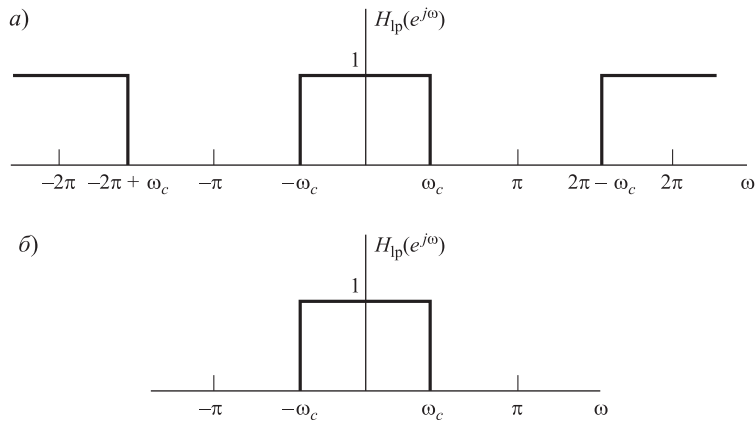


Рис. 2.17. Идеальный фильтр нижних частот: а) периодичность; б) один период КЧХ

периода *нижними частотами* называются частоты, близкие к нулю, а *верхними* — частоты, лежащие около $\pm\pi$. Вспоминая, что частоты, отличающиеся на величины, кратные 2π , неотличимы друг от друга, предыдущее утверждение можно сформулировать следующим образом: нижние частоты близки четным кратным π , в то время как верхние — к нечетным кратным π , что согласуется с обсуждением этого вопроса на с. 42.

Важный класс линейных стационарных систем включает в себя системы, для которых импульсная характеристика равна единице в определенных диапазонах частот и нулю в остальной области. Такую характеристику имеют идеальные частотно-избирательные фильтры. КЧХ идеального фильтра нижних частот показана на рис. 2.17, а. Ввиду естественной периодичности она имеет вид характеристики многополосного фильтра, поскольку частоты, близкие к нулю, невозможно отличить от тех, которые близки к 2π . В действительности, фильтр пропускает только нижние частоты и задерживает верхние. Поскольку КЧХ полностью определяется своим поведением на интервале $-\pi < \omega \leq \pi$, характеристику идеального фильтра нижних частот более правильно показывать только на этом интервале, как на рис. 2.17, б. Ясно, что вне этого интервала КЧХ повторяется периодически с периодом 2π . КЧХ идеальных фильтров (верхних частот, полосно-задерживающего и полосового) представлены на рис. 2.18.

Пример 2.16. КЧХ скользящего среднего

Импульсная реакция скользящего среднего из примера 2.3 равна

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, его КЧХ имеет вид

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n}. \quad (2.117)$$

Для причинной системы скользящего среднего $M_1 = 0$ и формулу (2.117) можно предста-

вить в виде

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{n=0}^{M_2} e^{-j\omega n}. \quad (2.118)$$

Используя формулу (2.48), выражение (2.118) можно записать как

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M_2 + 1} \left(\frac{1 - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \right) = \\ &= \frac{1}{M_2 + 1} \frac{\left(e^{j\omega(M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_2+1)/2} \right) e^{-j\omega(M_2+1)/2}}{\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2} \right) e^{-j\omega/2}} = \\ &= \frac{1}{M_2 + 1} \frac{\sin[\omega(M_2 + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M_2/2}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Модуль и фаза $H(e^{j\omega})$ для этого случая, при $M_2 = 4$, представлены на рис. 2.19.

Рис. 2.18. Идеальные частотно-избирательные фильтры: а) фильтр верхних частот; б) полосоно-задерживающий фильтр; в) полосовой фильтр

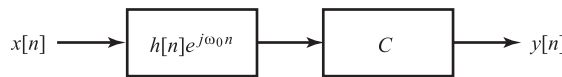
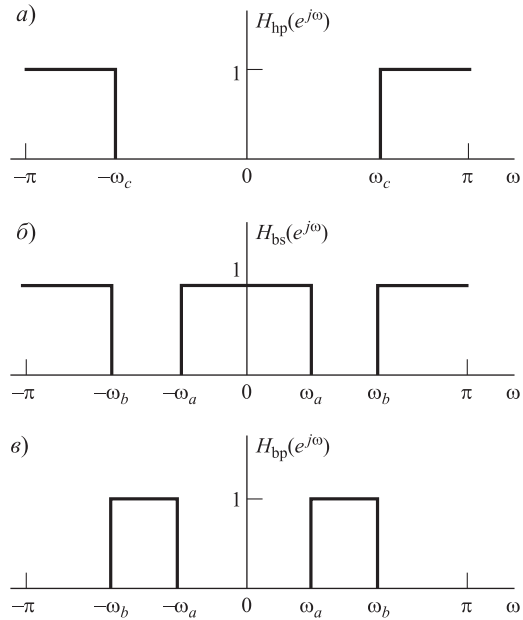


Рис. 2.19. КЧХ скользящего среднего при $M_1 = 0$ и $M_2 = 4$: а) модуль (АЧХ); б) аргумент (ФЧХ)

Если фильтр скользящего среднего симметричен, т.е. если $M_1 = M_2$, то формула (2.119) превращается в

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2M_2 + 1} \frac{\sin[\omega(2M_2 + 1)/2]}{\sin(\omega/2)}. \quad (2.120)$$

Заметим, что $H(e^{j\omega})$ периодична, как и должно быть в случае дискретных систем. Кроме того, модуль $|H(e^{j\omega})|$ резко уменьшается к «верхним частотам», а $\angle H(e^{j\omega})$, т.е. ФЧХ,

ведет себя кусочно-линейно с изменением ω . Ослабление верхних частот говорит о том, что система является грубым приближением к фильтру нижних частот, что согласуется с интуитивным представлением о поведении скользящего среднего. \square

2.7.2. Мгновенно поданный экспоненциальный сигнал

Мы видели, что комплексная экспоненциальная последовательность вида $e^{j\omega n}$, $-\infty < n < \infty$, поданная на вход линейной стационарной системы, порождает выходную последовательность $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$. Последовательности такого типа имеют большое значение для математического описания широкого множества сигналов, включая и те, которые определены только для конечного набора значений n . Мы сможем получить дополнительную информацию о линейных стационарных системах, рассматривая входные последовательности, приближенные к возникающим на практике сигналам

$$x[n] = e^{j\omega n}u[n], \quad (2.121)$$

т. е. комплексные экспоненты, мгновенно применяемые в произвольный момент времени, который в целях удобства мы положим здесь равным нулю. Учитывая свертку (2.54), мы видим, что соответствующая реакция линейной стационарной детерминированной системы с импульсной характеристикой $h[n]$ имеет вид

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \left(\sum_{k=0}^n h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}, & n \geq 0. \end{cases}$$

При $n \geq 0$ выходную последовательность можно переписать как

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} = \\ &= H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Таким образом, $y[n]$ — сумма двух последовательностей $y_{ss}[n]$ и $y_t[n]$, где

$$y_{ss}[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n},$$

называется *установившейся реакцией* системы, которая идентична отклику системы на входную последовательность $e^{j\omega n}$, определенную при всех n . Второе слагаемое,

$$y_t[n] = - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n},$$

показывает, насколько выходной сигнал отличается от собственной функции системы. Оно соответствует *переходному процессу* системы, поскольку ясно, что в некоторых случаях оно может стремиться к нулю. Чтобы найти условия, при которых наше замечание верно, рассмотрим величину второго слагаемого. Его модуль ограничен сверху:

$$|y_t[n]| = \left| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]|. \quad (2.123)$$

Отсюда при ограниченной длительности импульсной характеристики (т. е. если

$h[n] = 0$ всюду, кроме отрезка $0 \leq n \leq M$) мы получим $y_t[n] = 0$ при $n > M - 1$ и

$$y[n] = y_{ss}[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad \text{при } n > M - 1.$$

Когда импульсная характеристика имеет неограниченную длительность, переходный процесс системы не исчезает мгновенно, но если отсчеты импульсной характеристики стремятся к нулю при возрастании n , то $y_t[n]$ тоже будет стремиться к нулю. Заметим, что неравенство (2.123) можно переписать в виде

$$|y_t[n]| = \left| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|. \quad (2.124)$$

Таким образом, модуль переходного процесса ограничен суммой *всех* отсчетов импульсной характеристики. Если сумма в правой части этого неравенства ограничена, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty,$$

то система устойчива. Из соотношения (2.124) следует, что у устойчивых систем переходный процесс должен быть бесконечно малым при $n \rightarrow \infty$. Итак, достаточным условием затухания переходного процесса является устойчивость системы.

На рис. 2.20 показана вещественная часть комплексного экспоненциального сигнала с частотой $\omega = 2\pi/10$. Темными кружочками обозначены отсчеты $x[n]$ мгновенно примененной комплексной экспоненты, а маленькими кружочками — «отсутствующие» отсчеты ее продолжения влево. Серые кружочки обозначают отсчеты импульсной характеристики $h[n-k]$, рассматриваемой как функция от k при $n = 8$. Ясно, что в случае конечности импульсной характеристики (рис. 2.20, а) отклик системы при $n \geq 8$ будет состоять только из установившейся компоненты реакции, в то время как при бесконечной импульсной характеристике влияние «отсутствующих» отсчетов будет становиться все слабее при возрастании n , благодаря затухающей природе импульсной реакции.

Кроме того, устойчивость системы является достаточным условием существования КЧХ. Действительно, в общей ситуации

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]e^{-j\omega k}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|.$$

Поэтому неравенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

обеспечивает сходимость ряда при вычислении $H(e^{j\omega})$. Неудивительно, что условие существования КЧХ совпадает с условием доминирования установившейся реакции системы. Действительно, комплексную экспоненту, определенную при всех n , можно представлять себе как сигнал, примененный в момент $n = -\infty$. Экспонента является собственной функцией только для устойчивой системы, поскольку при конечных n переходный процесс должен быть равен нулю, чтобы мы видели только установившуюся реакцию $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ для всех конечных n .

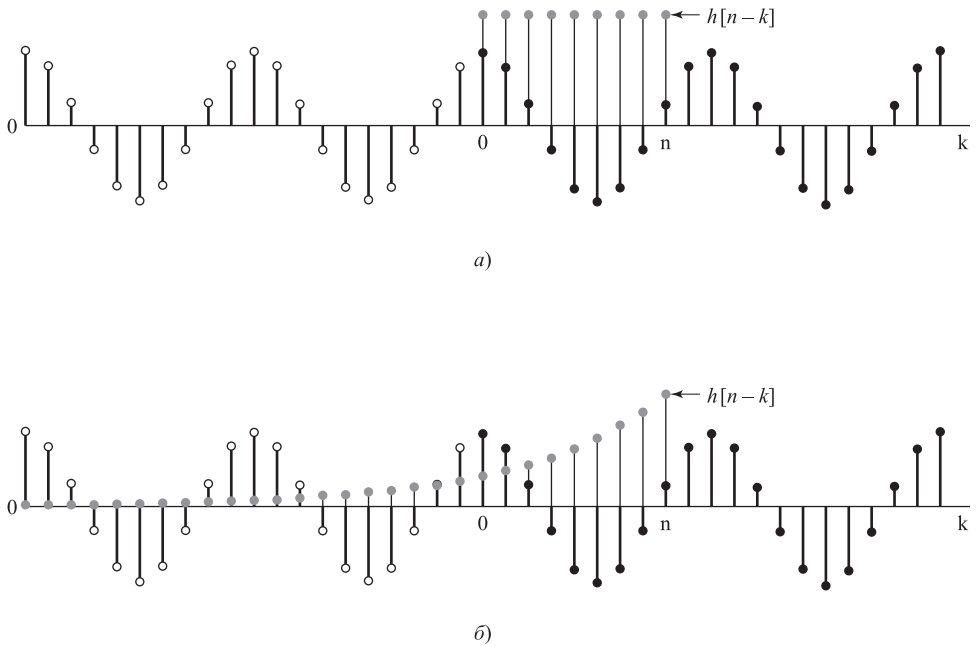


Рис. 2.20. Вещественная часть мгновенно примененной комплексной экспоненциальной последовательности: а) с импульсной характеристикой ограниченной длительности; б) с импульсной характеристикой неограниченной длительности

2.8. Преобразование Фурье

Одно из преимуществ частотного представления линейных стационарных систем заключается в том, что интерпретация их поведения, аналогичная сделанной в примере 2.16, обычно получается довольно легко. Мы детально исследуем этот вопрос в гл. 5, а сейчас вернемся к задаче о представлении (2.106) произвольного сигнала.

Многие из последовательностей выражаются через интеграл Фурье вида

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \quad (2.125)$$

где

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}. \quad (2.126)$$

Формулы (2.125) и (2.126) называют *представлением*, или *преобразованием Фурье*, а саму функцию $X(e^{j\omega})$ часто называют *Фурье-образом* последовательности $x[n]$. Формула (2.125), *обратное преобразование Фурье*, представляет $x[n]$ как суперпозицию бесконечно малых комплексных синусоид

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega,$$

где ω принимает значения на интервале длины 2π , а $X(e^{j\omega})$ определяется тем, какой вклад в суперпозицию вносит каждая синусоидальная компонента. Хотя ω в соотношении (2.125) изменяется в промежутке от $-\pi$ до $+\pi$, вместо этого мож-

но использовать любой сегмент длины 2π . Преобразование Фурье¹ (2.126) задает правило, вычисляющее $X(e^{j\omega})$ по отсчетам последовательности $x[n]$, т. е. позволяет анализировать $x[n]$ с учетом вклада каждой частотной компоненты, формирующей последовательность посредством (2.125).

Фурье-образ — комплекснозначная функция ω . Как и КЧХ, ее можно записать в алгебраической или показательной форме:

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \quad (2.127)$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}. \quad (2.128)$$

Величины $|X(e^{j\omega})|$ и $\angle X(e^{j\omega})$ — соответственно *модуль* и *фаза* Фурье-образа. Первую из них называют иногда *амплитудным спектром*, а вторую — *фазовым спектром*. Фурье-образ часто также называют *спектром Фурье* или просто *спектром*².

Равенство (2.128) неоднозначно определяет фазовый спектр, так как при любом ω к фазе можно добавить $2\pi k$ с $k \in \mathbb{Z}$, не меняя значений комплексной экспоненты. Если нам важна однозначность, то будем считать, что $\angle X(e^{j\omega})$ лежит между $-\pi$ и π , и обозначать этот угол через $\text{ARG}[X(e^{j\omega})]$. В том случае, когда нам предпочтительнее рассматривать фазу как непрерывную функцию ω , без приведения к интервалу $(0, 2\pi)$, мы будем обозначать ее через $\text{arg}[X(e^{j\omega})]$.

Сравнивая формулы (2.97) и (2.126), можно увидеть, что КЧХ линейной стационарной системы — не что иное, как Фурье-образ ее импульсной характеристики. Импульсная характеристика восстанавливается из КЧХ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.129)$$

Как уже было отмечено, КЧХ является периодической функцией. Аналогично результат преобразования Фурье — тоже 2π -периодическая функция. Действительно, уравнение (2.126) записано в виде ряда Фурье непрерывной периодической функции $X(e^{j\omega})$, а соотношение (2.125), выражающее последовательность $x[n]$ через периодическую функцию $X(e^{j\omega})$, является интегралом, который используется для определения коэффициентов ряда Фурье. Уравнения (2.125) и (2.126) фокусируют наше внимание на представлении последовательности $x[n]$. Тем не менее полезно знать об эквивалентности между рядом Фурье, представляющим непрерывную периодическую функцию, и преобразованием Фурье, представляющим дискретный сигнал, поскольку все известные свойства ряда Фурье можно легко переформулировать для Фурье-образа последовательности [156].

Вопрос о представимости сигнала формулой (2.125) равносильен вопросу о сходимости ряда (2.126), точнее, нас интересуют условия, при которых ряд (2.126) сходится, т. е.

$$|X(e^{j\omega})| < \infty, \quad \forall \omega,$$

где $X(e^{j\omega})$ — предел при $M \rightarrow \infty$ конечных сумм

¹Иногда мы будем называть формулу (2.126) дискретизованным по времени преобразованием Фурье (ДВПФ), что является более точным термином, особенно когда его необходимо отличить от непрерывного преобразования Фурье.

²Левую часть формулы (2.126) в российской традиции называют спектральной функцией. — *Примеч. перев.*

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n}. \quad (2.130)$$

Достаточное условие сходимости можно найти следующим образом:

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty.$$

Таким образом, для абсолютно суммируемой последовательности $x[n]$ Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ определен на всей числовой прямой. Более того, в этом случае по признаку Вейерштрасса можно показать, что соответствующий ряд равномерно сходится к непрерывной функции частоты [121]. Поскольку устойчивые последовательности абсолютно суммируемы по определению, для них преобразование Фурье имеет смысл. Кроме того, отсюда следует, что любая устойчивая система (т. е. система с абсолютно суммируемой импульсной характеристикой) имеет конечную непрерывную КЧХ.

Итак, абсолютная суммируемость последовательности является достаточным условием существования преобразования Фурье. В примерах 2.14 и 2.16 мы уже нашли дискретизованное по времени преобразование Фурье импульсной характеристики системы задержки и системы скользящего среднего. Эти импульсные характеристики абсолютно суммируемы, поскольку имеют лишь конечное число ненулевых членов. Ясно, что любая последовательность конечной длины (с конечным числом ненулевых членов) абсолютно суммируема, и для нее можно найти Фурье-образ. В контексте линейных стационарных систем любая КИХ-система должна быть устойчивой, и потому она имеет конечную непрерывную КЧХ. Если же последовательность имеет бесконечную длину (т. е. бесконечное число ненулевых членов), нам необходимо исследовать сходимость бесконечного ряда. Следующий пример иллюстрирует этот случай.

Пример 2.17. Абсолютная суммируемость мгновенно примененной экспоненты

Пусть $x[n] = a^n u[n]$. Фурье-образ этой последовательности имеет вид

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}},$$

если $|a| < 1$. Очевидно, это неравенство является критерием абсолютной суммируемости последовательности $x[n]$, т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1 - |a|} < \infty, \quad \text{если и только если } |a| < 1. \quad (2.131)$$

Абсолютная суммируемость — достаточное условие для существования преобразования Фурье, которое также гарантирует равномерную сходимость. Некоторые последовательности не принадлежат к классу абсолютно суммируемых, но являются квадратично-суммируемыми:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty. \quad (2.132)$$

Такие последовательности можно представлять с помощью преобразования Фурье, если мы откажемся от равномерной сходимости ряда, определяющего $X(e^{j\omega})$. Более точно, в этом случае мы имеем сходимость в среднеквадратичном, т. е. если

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (2.133)$$

и

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n}, \quad (2.134)$$

то сходимость в среднеквадратичном означает, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0. \quad (2.135)$$

Другими словами, погрешность $|X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|$ может и не стремиться к нулю при $M \rightarrow \infty$ при каких-то конкретных значениях ω , но общая «энергия» погрешности убывает до нуля при неограниченном росте M .

Пример 2.18. Квадратичная суммируемость для идеального фильтра нижних частот

В этом примере мы определим импульсную характеристику идеального фильтра нижних частот из § 2.7. Его КЧХ, равная на промежутке $[-\pi, \pi]$

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi, \end{cases} \quad (2.136)$$

вне этого интервала вычисляется по периодичности. Импульсная характеристика $h_{lp}[n]$ находится с помощью преобразования Фурье (2.125):

$$\begin{aligned} h_{lp}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi j n} e^{j\omega n} \Big|_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi j n} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) = \\ &= \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Заметим, что, поскольку $h_{lp}[n] \neq 0$ при $n < 0$, идеальный фильтр нижних частот не является причинным. Кроме того, последовательность $h_{lp}[n]$ не является абсолютно суммируемой. Члены последовательности, конечно, стремятся к нулю при неограниченном возрастании n , но не быстрее, чем $\frac{1}{n}$. Это происходит в результате разрыва функции $H_{lp}(e^{j\omega})$ в точке $\omega = \omega_c$. Поскольку последовательность $h_{lp}[n]$ не является абсолютно суммируемой, ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

на всей числовой прямой сходится неравномерно. Чтобы лучше прочувствовать этот факт, рассмотрим

$$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}. \quad (2.138)$$

График функции $H_M(e^{j\omega})$ представлен на рис. 2.21 для нескольких значений M . Заметим, что при возрастании M графики заметно пульсируют в окрестности ω_c (такое

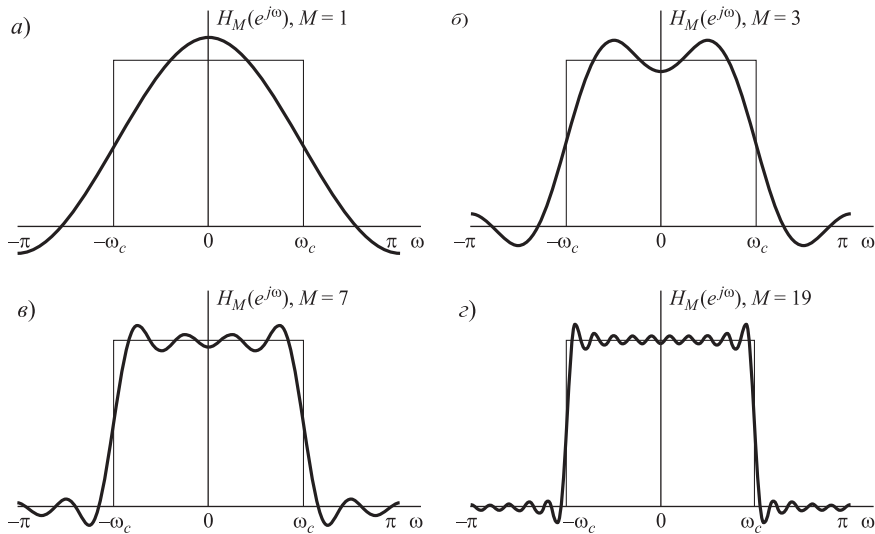


Рис. 2.21. Графики частичных сумм преобразования Фурье

явление часто называют эффектом Гиббса), но амплитуда пульсаций не уменьшается с ростом M . Фактически можно показать, что максимальная амплитуда пульсаций не стремится к нулю при $M \rightarrow \infty$, но пульсации сжимаются по горизонтали к вертикальному отрезку, проведенному в точке ω_c . Итак, наш ряд сходится к разрывной функции $H_{1p}(e^{j\omega})$, но неравномерно. Однако $h_{1p}[n]$, определенная уравнением (2.137), квадратично суммируема, и, соответственно, $H_M(e^{j\omega})$ сходится в среднеквадратичном к $H_{1p}(e^{j\omega})$, т. е.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{1p}(e^{j\omega}) - H_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0.$$

Хотя разница между $H_M(e^{j\omega})$ и $H_{1p}(e^{j\omega})$ при $M \rightarrow \infty$ может показаться несущественной, поскольку эти функции отличаются лишь в точках $\omega = \pm\omega_c$, в гл. 7 мы увидим, что поведение конечных сумм (таких как в формуле (2.138)) имеет важное значение при разработке дискретных фильтров. \square

Иногда полезно иметь что-то похожее на преобразование Фурье для последовательностей, которые не являются ни абсолютно суммируемыми, ни квадратично суммируемыми. Некоторые из таких последовательностей приводятся в следующем примере.

Пример 2.19. Фурье-образ постоянной последовательности

Рассмотрим последовательность $x[n] = 1$ при всех n . Она не суммируется ни абсолютно, ни квадратично, и ряд в формуле (2.126) в этом случае не сходится ни равномерно, ни в среднеквадратичном. Однако можно и нужно определить Фурье-образ последовательности $x[n]$ как периодическую последовательность импульсов:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r). \quad (2.139)$$

Импульсы здесь — функции от непрерывной переменной и поэтому имеют «бесконечную высоту, нулевую ширину и единичную площадь под графиком», что согласуется с тем, что

ряд (2.126) расходится. (Определение и свойства импульсной функции см. в [156].) Формулу (2.139) обоснованно можно называть Фурье-образом, поскольку формальная подстановка (2.139) в (2.125) дает корректный результат¹. Пример 2.20 обобщает эту формулу. □

Пример 2.20. Преобразование Фурье комплексных экспоненциальных последовательностей

Рассмотрим последовательность $x[n]$, чье преобразование Фурье — периодическая последовательность импульсов

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r). \quad (2.140)$$

Покажем, что $x[n]$ — комплексная экспонента $e^{j\omega_0 n}$ для $-\pi < \omega_0 \leq \pi$.

Последовательность $x[n]$ можно вычислить, применив к $X(e^{j\omega})$ обратное преобразование Фурье (2.125). Интегрирование в этой формуле происходит по отрезку $[-\pi, \pi]$, следовательно, в формуле (2.140) можно ограничиться членом с $r = 0$ и записать

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.141)$$

Из определения δ -функции вытекает, что

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad \forall n.$$

При $\omega_0 = 0$ получается постоянная последовательность примера 2.19. □

Ясно, что последовательность примера 2.20 не относится ни к абсолютно суммируемым, ни к квадратично суммируемым, и «функция» $X(e^{j\omega})$ в этом случае принимает и бесконечные значения. Поэтому формула

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \quad (2.142)$$

нуждается в специфической интерпретации, которая приводится в теории обобщенных функций ([124]). Опираясь на эту теорию, можно строго обобщить понятие преобразования Фурье на класс последовательностей, являющихся суммой отдельных гармоник

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}, \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.143)$$

Из примера 2.20 вытекает, что функция

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_k 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_k + 2\pi r) \quad (2.144)$$

служит логичным Фурье-образом последовательности $x[n]$.

Другая последовательность, не относящаяся ни к абсолютно суммируемым, ни к квадратично суммируемым, — это единичный скачок $u[n]$. Ее Фурье-образ имеет

¹Функция Дирака в теории обобщенных функций вводится как предел бесконечной последовательности прямоугольных импульсов единичной площади с возрастающей высотой и убывающей шириной. Поэтому, используя предельный переход, формулу (2.139) можно доказать вполне корректно. — *Примеч. перев.*

вид

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi r). \quad (2.145)$$

Обоснование этого факта мы опустим.

2.9. Симметрии преобразования Фурье

При работе с преобразованием Фурье полезно знать о том, как свойства последовательности проявляются в соответствующем Фурье-образе, и наоборот. В этом и следующем параграфах мы как раз это и будем исследовать.

Симметрии преобразования Фурье часто упрощают решение конкретных задач. Сейчас мы обсудим эти важные свойства, а их доказательствам посвящены задачи 2.79 и 2.80. Однако сначала мы сформулируем необходимые определения.

Сопряженно-симметричной последовательностью называется последовательность со свойством $x_e[n] = x_e^*[-n]$, а *сопряженно-антисимметричной* — последовательность, удовлетворяющая условию $x_o[n] = -x_o^*[-n]$, где * обозначает комплексное сопряжение. Любая последовательность представляется в виде суммы сопряженно-симметричной и сопряженно-антисимметричной последовательностей:

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n], \quad (2.146)$$

где

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n], \quad (2.147)$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) = -x_o^*[-n]. \quad (2.148)$$

Суммирование формул (2.147) и (2.148) подтверждает верность формулы (2.146). Вещественнозначную сопряженно-симметричную последовательность, т. е. последовательность со свойством $x_e[n] = x_e[-n]$, называют *четной*, а вещественнозначную сопряженно-антисимметричную ($x_o[n] = -x_o[-n]$) — *нечетной*.

Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ тоже можно разложить в сумму сопряженно-симметричной и сопряженно-антисимметричной частей:

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}), \quad (2.149)$$

где

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})), \quad (2.150)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})). \quad (2.151)$$

Подставляя $-\omega$ вместо ω в формулы (2.150) и (2.151), убеждаемся, что $X_e(e^{j\omega})$ — сопряженно-антисимметричная, а $X_o(e^{j\omega})$ — сопряженно-симметричная функции, т. е.

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}), \quad (2.152)$$

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}). \quad (2.153)$$

Вещественнозначную сопряженно-симметричную функцию называют *четной*, а сопряженно-антисимметричную — *нечетной*.

Свойства симметрии преобразования Фурье сведены в табл. 2.1. Первые шесть свойств таблицы справедливы для общих последовательностей $x[n]$ с Фурье-образом $X(e^{j\omega})$. Свойства 1 и 2 рассматриваются в задаче 2.79. Свойство 3 следует из первых двух и из того факта, что Фурье-образ суммы последовательностей равен сумме Фурье-образов слагаемых. Более конкретно, Фурье-образ последовательности $\text{Re}\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[n])$ является сопряженно-симметричной частью функции $X(e^{j\omega})$, или $X_e(e^{j\omega})$. Аналогично Фурье-образ $j \text{Im}\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[n])$ является сопряженно-антисимметричной частью $X_o(e^{j\omega})$, что отмечено в свойстве 4. Исследуя преобразование Фурье сопряженно-симметричной и сопряженно-антисимметричной частей последовательности $x[n]$, можно легко проверить свойства 5 и 6.

Для вещественнозначных последовательностей $x[n]$ перечисленные в табл. 2.1 свойства получаются особенно просто и очень полезны. Более конкретно, Фурье-образ вещественнозначной последовательности сопряженно-симметричен, т. е. $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (свойство 7). Выразив $X(e^{j\omega})$ через вещественную и мнимую части

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}), \quad (2.154)$$

мы получим свойства 8 и 9 из свойства 7:

$$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}), \quad (2.155)$$

$$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega}). \quad (2.156)$$

Таким образом, вещественная часть Фурье-образа вещественнозначной последовательности — четная функция, а мнимая — нечетная. Аналогично, записывая $X(e^{j\omega})$ в показательной форме

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}, \quad (2.157)$$

можно показать, что модуль Фурье-образа $|X(e^{j\omega})|$ вещественнозначной последовательности является четной функцией от ω , а его фаза $\angle X(e^{j\omega})$ — нечетной (свойства 10 и 11). Кроме того, при преобразовании Фурье вещественнозначных последовательностей четная часть $x[n]$ переходит в $X_R(e^{j\omega})$, а нечетная — в $jX_I(e^{j\omega})$ (свойства 12 и 13).

Таблица 2.1. Свойства симметрии преобразования Фурье

Последовательность $x[n]$	Фурье-образ $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\text{Re}\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega}))$
4. $j \text{Im}\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega}))$
5. $x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$	$X_R(e^{j\omega}) = \text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$	$jX_I(e^{j\omega}) = j \text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$
Следующие свойства справедливы лишь для вещественных последовательностей	
7. Произвольная $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
8. Произвольная $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$
9. Произвольная $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$
10. Произвольная $x[n]$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
11. Произвольная $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$
12. $x_e[n]$	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$	$jX_I(e^{j\omega})$

Пример 2.21. Иллюстрация симметрий преобразования Фурье

Вернемся к примеру 2.17, где мы показали, что Фурье-образ вещественной последовательности $x[n] = a^n u[n]$ при $|a| < 1$ равен

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \tag{2.158}$$

Из свойств комплексных чисел вытекают соотношения:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X^*(e^{-j\omega}) \tag{свойство 7);}$$

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a \cos \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} = X_R(e^{-j\omega}) \tag{свойство 8);}$$

$$X_I(e^{j\omega}) = \frac{-a \sin \omega}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} = -X_I(e^{-j\omega}) \tag{свойство 9);}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}} = |X(e^{-j\omega})| \tag{свойство 10);}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = \text{arctg} \left(\frac{-a \sin \omega}{1 - a \cos \omega} \right) = -\angle X(e^{-j\omega}) \tag{свойство 11).}$$

Эти функции изображены на рис.2.22 при $a > 0$, а именно при $a = 0,75$ и $a = 0,5$. В задаче 2.32 мы будем исследовать графики этих функций при $a < 0$. □

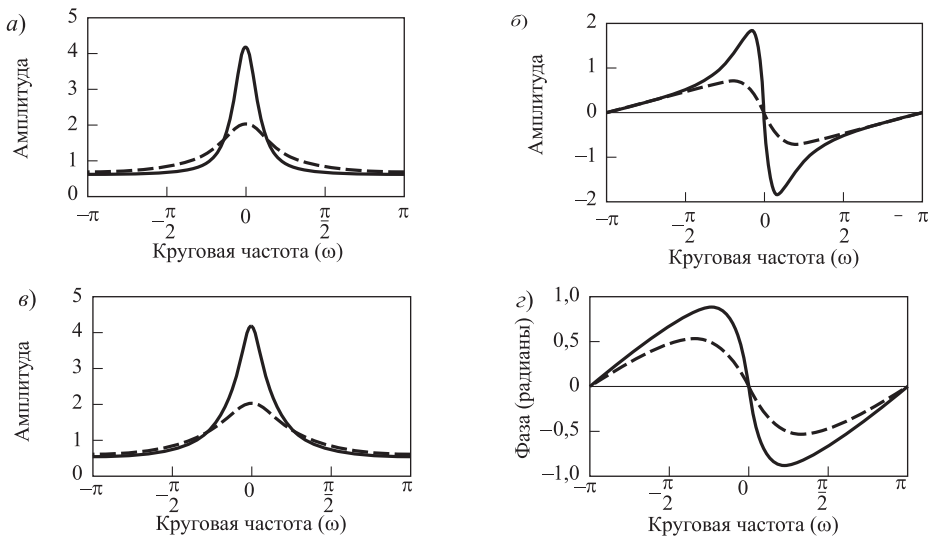


Рис. 2.22. КЧХ системы с импульсной характеристикой $h[n] = a^n u[n]$ при $a > 0$, $a = 0,75$ (сплошная кривая) и $a = 0,5$ (штриховая кривая): а) вещественная часть; б) мнимая часть; в) амплитуда; г) фаза

2.10. Теоремы о преобразовании Фурье

Существует ряд полезных теорем, говорящих о соотношениях между операциями над последовательностями и их Фурье-образами. Как мы увидим, по большей части эти утверждения аналогичны соответствующим теоремам о непрерывных сигналах и их Фурье-образах. Для облегчения формулировок введем следующие обозначения:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}; \quad x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}; \quad x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}).$$

Иными словами, буквой \mathcal{F} мы будем обозначать операцию преобразования Фурье, а символом \mathcal{F}^{-1} — обратную операцию. Некоторые факты мы сформулируем без доказательства, оставив их проверку в качестве упражнения (задача 2.81), поскольку оно, как правило, использует простейшие преобразования сумм и интегралов. Теоремы этого параграфа сведены в табл. 2.2.

2.10.1. Линейность преобразования Фурье

Если $x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(e^{j\omega})$ и $x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(e^{j\omega})$, то непосредственно из определения преобразования Фурье следует, что

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}). \quad (2.159)$$

2.10.2. Временной и частотный сдвиги

Если $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, то при временной задержке сигнала преобразование Фурье последовательности меняется по следующему правилу:

$$x[n - n_d] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega}), \quad (2.160)$$

что легко проверяется простой заменой параметра суммирования. Прямая подстановка доказывает следующий результат о частотном сдвиге:

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega - \omega_0)}). \quad (2.161)$$

Таблица 2.2. Теоремы о преобразовании Фурье

Последовательности $x[n]$ и $y[n]$	Фурье-образ $X(e^{j\omega})$ и $Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
2. $x[n - n_d], n_d \in \mathbb{Z}$	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
5. $nx[n]$	$X^*(e^{j\omega})$, если $x[n]$ — вещественная $j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$
Теоремы Парсеваля	
8.	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$
9.	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega}) d\omega$

2.10.3. Обращение времени

Если $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, то при симметричном отражении последовательности относительно нуля имеем

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega}). \quad (2.162)$$

Для вещественнозначной последовательности эту формулу можно переписать в виде

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(e^{j\omega}). \quad (2.163)$$

2.10.4. Дифференцирование по частоте

Пусть $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$. Тогда взяв производную интеграла Фурье по частоте, получим

$$nx[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}. \quad (2.164)$$

2.10.5. Теорема Парсеваля

Пусть $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$. Тогда

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (2.165)$$

Функция $|X(e^{j\omega})|^2$ называется *спектральной плотностью энергии*, поскольку она показывает, как энергия распределена по частотной области. Конечно, спектральная плотность энергии определена лишь для сигналов с конечной энергией. Более общая формулировка теоремы Парсеваля приведена в задаче 2.84.

2.10.6. Теорема о свертке

Пусть $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$ и $h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(e^{j\omega})$. Тогда, если

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n], \quad (2.166)$$

то

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}). \quad (2.167)$$

Иначе говоря, Фурье-образ свертки последовательностей равен произведению Фурье-образов сворачиваемых компонент. Заметим, что утверждение о временном сдвиге является частным случаем теоремы о свертке, поскольку

$$\delta[n - n_d] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_d}, \quad (2.168)$$

и если $h[n] = \delta[n - n_d]$, то $y[n] = x[n] * \delta[n - n_d] = x[n - n_d]$. Следовательно,

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad \text{и} \quad Y(e^{j\omega}) = (e^{-j\omega n_d})X(e^{j\omega}).$$

Формальный вывод теоремы о свертке легко получается применением определения преобразования Фурье к $y[n]$ в формуле (2.166). Этот же результат можно интерпретировать как прямое следствие того факта, что комплексные экспоненты являются собственными функциями линейных стационарных систем. Напомним, что $H(e^{j\omega})$ — КЧХ линейной стационарной системы с импульсной характеристикой

$h[n]$. Кроме того, если $x[n] = e^{j\omega n}$, то $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$. Иными словами, комплексные экспоненты — собственные функции линейных стационарных систем, а соответствующие собственные значения равны $H(e^{j\omega})$, т. е. Фурье-образу последовательности $h[n]$. По определению интеграла дискретизованное по времени преобразование Фурье — это представление последовательности $x[n]$ в виде суперпозиции бесконечного числа бесконечно малых комплексных экспонент, т. е.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_k X(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega.$$

По определению собственных функций с учетом принципа суперпозиции, соответствующая реакция системы имеет вид

$$\begin{aligned} y[n] &= \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_k H(e^{jk\Delta\omega}) X(e^{jk\Delta\omega}) e^{jk\Delta\omega n} \Delta\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega, \end{aligned}$$

откуда

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}),$$

что и утверждается в теореме.

2.10.7. Модуляция, или теорема о произведении сигналов

Если $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$ и $w[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} W(e^{j\omega})$, а

$$y[n] = x[n]w[n], \quad (2.169)$$

то

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta. \quad (2.170)$$

Правая часть уравнения (2.170) является *периодической сверткой*, т. е. сверткой двух периодических функций, промежуток интегрирования в которой совпадает с периодом подынтегральной функции.

Дуальность в большинстве теорем, касающихся преобразования Фурье, особенно бросается в глаза при сравнении теоремы о свертке с теоремой о модуляции. Однако, в отличие от случая непрерывного времени, где эта дуальность является полной, в дискретном варианте возникают фундаментальные отличия, так как прямое преобразование Фурье выражается в виде суммы, а обратное — в виде интеграла от периодической функции. При непрерывном времени мы можем сказать, что свертка во временной области соответствует произведению в частотной, и наоборот, но при дискретном времени это утверждение должно быть несколько видоизменено. Более точно, дискретная свертка последовательностей (сверточная сумма) эквивалентна произведению соответствующих периодических Фурье-образов, а произведение последовательностей — *периодической* свертке их преобразований Фурье.

Теоремы этого параграфа и несколько стандартных пар, связанных преобразованием Фурье, представлены в табл. 2.2 и 2.3. Таблицы очень полезны при вычи-

слении прямого и обратного преобразования Фурье. Зачастую последовательность можно представить в виде комбинации таких последовательностей, Фурье-образ которых известен, а затем, опираясь на теоремы и известные пары, можно вычислить преобразование исходной последовательности. Примеры 2.22–2.26 иллюстрируют этот метод.

Пример 2.22. Вычисление преобразования Фурье с использованием таблиц 2.2 и 2.3

Допустим, нам нужно найти Фурье-образ последовательности $x[n] = a^n u[n-5]$. Это можно сделать с помощью теорем 1 и 2 табл. 2.2 и пары 4 из табл. 2.3. Начнем с сигнала $x_1[n] = a^n u[n]$, поскольку, с одной стороны, он присутствует в табл. 2.3, а с другой, — довольно близок к исходному. Согласно таблице

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}. \tag{2.171}$$

Далее задержим сигнал $x_1[n]$ на 5 отсчетов, т. е. положим $x_2[n] = x_1[n-5]$. По теореме 2 из табл. 2.2 соответствующие Фурье-образы связаны соотношением $X_2(e^{j\omega}) = e^{-j5\omega} X_1(e^{j\omega})$. Значит,

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}. \tag{2.172}$$

Теперь, умножая $x_2[n]$ на константу a^5 , мы приходим к исходному сигналу, то есть $x[n] = a^5 x_2[n]$. Линейность преобразования Фурье (теорема 1 из табл. 2.2) позволяет вычислить искомым ответ:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a^5 e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}. \quad \square \tag{2.173}$$

Таблица 2.3. Пары, связанные преобразованием Фурье

Последовательность	Фурье-образ
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
6. $(n + 1)a^n u[n] \quad (a < 1)$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin \omega_p (n + 1)}{\sin \omega_p} u[n] \quad (r < 1)$	$\frac{1}{1 - 2r \cos \omega_p e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\frac{\sin(\omega(M + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n + \varphi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pi e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\varphi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k))$

Пример 2.23. Поиск обратного преобразования Фурье по таблицам 2.2 и 2.3

Предположим, что

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})}. \quad (2.174)$$

Можно было бы воспользоваться формулой (2.125) обратного преобразования Фурье, подставив в нее данную нам функцию $X(e^{j\omega})$, но, к сожалению, при этом получается довольно сложный интеграл. Однако, используя разложение рациональной дроби в сумму простейших, что мы подробно будем изучать в главе 3, можно представить $X(e^{j\omega})$ в виде

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} - \frac{b}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - be^{-j\omega}}. \quad (2.175)$$

Из теоремы линейности и строки 4 табл. 2.3 следует, что

$$x[n] = \left(\frac{a}{a-b}\right) a^n u[n] - \left(\frac{b}{a-b}\right) b^n u[n]. \quad \square \quad (2.176)$$

Пример 2.24. Определение импульсной характеристики по КЧХ

С учетом 2π -периодичности КЧХ фильтра верхних частот с задержкой равна

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & \omega_c < |\omega| < \pi, \\ 0, & |\omega| < \omega_c. \end{cases} \quad (2.177)$$

Перепишем ее как

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} (1 - H_{lp}(e^{j\omega})) = e^{-j\omega n_d} - e^{-j\omega n_d} H_{lp}(e^{j\omega}),$$

где $H_{lp}(e^{j\omega})$ — 2π -периодическая функция, равная

$$\begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi. \end{cases}$$

Используя результат примера 2.18, где получено обратное преобразование Фурье от $H_{lp}(e^{j\omega})$, и свойства 1 и 2 табл. 2.2, находим

$$h[n] = \delta[n - n_d] - h_{lp}[n - n_d] = \delta[n - n_d] - \frac{\sin \omega_c(n - n_d)}{\pi(n - n_d)}. \quad \square$$

Пример 2.25. Определение импульсной характеристики разностного уравнения

Здесь мы найдем импульсную характеристику устойчивой линейной стационарной системы, сигнал которой, поданный на вход, связан с соответствующей реакцией линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]. \quad (2.178)$$

В главе 3 мы познакомимся с z -преобразованием, более удобным для работы с разностными уравнениями. Однако в этом примере демонстрируется единый подход различных

преобразований к анализу линейных систем. Для определения импульсной характеристики положим $x[n] = \delta[n]$, а через $h[n]$ обозначим импульсную характеристику, после чего уравнение (2.178) переписется в виде

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]. \quad (2.179)$$

Применяя преобразование Фурье к обеим частям этого уравнения с учетом свойств 1 и 2 табл. 2.2, получим

$$H(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}, \quad (2.180)$$

что равносильно соотношению

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (2.181)$$

Теперь для определения $h[n]$ нам достаточно найти обратное преобразование Фурье для $H(e^{j\omega})$. Представим соотношение (2.181) в более удобной для этой цели форме

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (2.182)$$

Из строки 4 табл. 2.3 следует, что

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

Комбинируя это соответствие со свойством 3 табл. 2.2, находим:

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \quad (2.183)$$

И наконец, по линейности приходим к окончательному ответу:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]. \quad (2.184)$$

2.11. Случайные дискретные сигналы

В предыдущих параграфах наше внимание было сосредоточено на математическом представлении дискретных сигналов и систем, а также следствиях, вытекающих из такого представления. Дискретные сигналы и системы имеют представление как во временной, так и в частотной области, причем каждое из этих представлений занимает важное место в теории и практике дискретных систем обработки сигналов. До сих пор мы предполагали, что сигналы детерминированы, т. е. каждый член последовательности однозначно определен математическим выражением, таблицей данных или каким-либо другим правилом.

Во многих ситуациях процессы, генерирующие сигналы, настолько сложны, что дать точное описание получаемого сигнала невероятно трудно или неудобно, если вообще возможно. В таких случаях полезнее¹ моделировать сигнал как случайный

¹В литературе по обработке сигналов не принято различать термины «случайный» и «стохастический». В этой книге мы будем называть этот класс случайными сигналами или случайными процессами.

процесс. В качестве примера в главе 6 мы увидим, что многие эффекты, встречающиеся при реализации алгоритмов обработки цифровых сигналов с конечной длиной регистра, могут быть представлены аддитивным шумом, т. е. случайной последовательностью. Многие механические системы генерируют акустические или вибрационные сигналы, которые затем обрабатываются для диагностики вероятных неполадок. И такие сигналы обычно лучше всего моделируются в терминах случайных сигналов. Речевые сигналы, обрабатываемые для автоматического распознавания или сжатия полосы частот, а также музыка, обрабатываемая для улучшения качества, — вот еще два из большого числа примеров.

Случайный сигнал рассматривается как член ансамбля дискретных сигналов, характеризующегося множеством плотностей вероятности. Более конкретно, для определенного сигнала в фиксированный момент времени амплитуда отсчета сигнала определяется некоторой схемой вероятностей. То есть каждый индивидуальный отсчет $x[n]$ конкретного сигнала считается значением некоторой случайной величины x_n . Весь сигнал представляется совокупностью случайных величин, по одной на каждый момент времени n , $-\infty < n < \infty$. Такой набор случайных величин называют *случайным процессом*, и мы считаем, что конкретная последовательность отсчетов $x[n]$, для $-\infty < n < \infty$, генерируется¹ случайным процессом, соответствующим сигналу. Для полного описания случайного процесса нам необходимо конкретизировать индивидуальные и совокупные распределения вероятностей всех случайных величин, участвующих в процессе.

Ключ к получению полезных результатов в рамках таких моделей сигналов лежит в описании случайных процессов в терминах средних значений, которые могут быть вычислены из предполагаемых вероятностных законов или установлены из наблюдения за конкретными сигналами. Поскольку случайные сигналы не являются ни абсолютно суммируемыми, ни суммируемыми с квадратом, то напрямую преобразование Фурье к ним не применимо. Многие (хотя и не все) свойства таких сигналов могут быть выражены в терминах *автокорреляционной* и *автоковариационной* последовательностей, для которых преобразование Фурье, как правило, существует. Как мы убедимся в этом параграфе, преобразование Фурье автокорреляционной последовательности имеет полезную интерпретацию в терминах частотного распределения мощности в сигнале. Применение автокорреляционной последовательности и ее преобразования обладает и другим преимуществом: эффект обработки случайного сигнала линейной дискретной системой может быть легко описан в терминах отклика системы на автокорреляционную последовательность.

Далее мы будем предполагать, что читатель знаком с основными понятиями случайных процессов, такими как математическое ожидание, корреляционная и ковариационная функции, а также спектральная плотность мощности. Короткий обзор соответствующих понятий приведен в приложении А. Более детальное изложение теории случайных сигналов можно найти в большом количестве превосходных книг, например [52, 162, 69, 115 и 11].

Главная цель этого параграфа — сформулировать конкретные результаты, которые потребуются в следующих главах. Мы сфокусируем внимание на стационарных в широком смысле случайных сигналах и их представлениях в контексте обработки сигналов линейными стационарными системами. Хотя для простоты мы будем предполагать, что $x[n]$ и $h[n]$ — вещественнозначные последовательности, все сформулированные ниже результаты можно обобщить на комплексный случай.

¹Иными словами, конкретный сигнал является *реализацией* случайного процесса. — *Примеч. перев.*

Рассмотрим устойчивую стационарную линейную систему с вещественнозначной импульсной характеристикой $h[n]$. Пусть $x[n]$ — вещественнозначная последовательность, т. е. последовательность отсчетов стационарного в широком смысле дискретного случайного процесса. Тогда отклик линейной системы на такую входную последовательность тоже является реализацией случайного процесса, связанной с поданной на вход последовательностью линейным соотношением:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

Поскольку система устойчива, то, как мы уже показали, значения $y[n]$ будут ограничены, если ограничены отсчеты $x[n]$. Вскоре мы увидим, что отклик на стационарный¹ сигнал такой системы тоже является стационарным. Входной сигнал может характеризоваться своим математическим ожиданием m_x и автокорреляционной функцией $\varphi_{xx}[m]$, либо мы можем иметь информацию о распределении вероятностей первого или даже второго порядка. Для многих приложений как входной, так и выходной сигнал достаточно описывать в терминах простых средних, таких как математическое ожидание, дисперсия и автокорреляция. Следовательно, нам нужно вывести соотношения между этими величинами для входного и выходного сигналов.

Средние значения (математическое ожидание) входного и выходного процессов определяются как

$$m_{x_n} = \mathcal{E}\{\mathbf{x}_n\}, \quad m_{y_n} = \mathcal{E}\{\mathbf{y}_n\}, \quad (2.185)$$

где $\mathcal{E}\{\cdot\}$ — математическое ожидание случайной величины. Как правило, нам не нужно будет проводить резкую грань между случайными величинами \mathbf{x}_n и \mathbf{y}_n и их конкретными значениями $x[n]$ и $y[n]$, что существенно упростит математические обозначения. Например, выражения (2.185) можно переписать в виде

$$m_x[n] = \mathcal{E}\{x[n]\}, \quad m_y[n] = \mathcal{E}\{y[n]\}. \quad (2.186)$$

Для стационарного процесса $x[n]$ математическое ожидание $m_x[n]$ реально не зависит от n , и мы будем обозначать его как m_x . Аналогично будем употреблять обозначение m_y для математического ожидания стационарного процесса $y[n]$.

Математическое ожидание выходного процесса рассчитывается по формуле

$$m_y[n] = \mathcal{E}\{y[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\mathcal{E}\{x[n-k]\},$$

в которой мы учитываем, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме соответствующих математических ожиданий. Так как входной процесс стационарен, то $m_x[n-k] = m_x$, и, следовательно,

$$m_y[n] = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]. \quad (2.187)$$

Из этой формулы видно, что математическое ожидание выходного процесса тоже постоянно. Соотношение (2.187) эквивалентным образом переписывается в терминах КЧХ:

$$m_y = H(e^{j0})m_x. \quad (2.188)$$

Временно предположив, что выходной процесс нестационарен, выпишем его *авто-*

¹Далее мы будем использовать термин «стационарный» вместо «стационарный в широком смысле».

корреляционную функцию, считая, что входной процесс вещественен и стационарен:

$$\begin{aligned}\varphi_{yy}[n, n+m] &= \mathcal{E}\{y[n]y[n+m]\} = \mathcal{E}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}h[k]h[r]x[n-k]x[n+m-r]\right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\sum_{r=-\infty}^{\infty}h[r]\mathcal{E}\{x[n-k]x[n+m-r]\}.\end{aligned}$$

Учитывая стационарность входного процесса, получаем, что величина $\mathcal{E}\{x[n-k]x[n+m-r]\}$ зависит только от разности $(n+m-r) - (n-k) = m+k-r$. Поэтому

$$\varphi_{yy}[n, n+m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\sum_{r=-\infty}^{\infty}h[r]\varphi_{xx}[m+k-r] = \varphi_{yy}[m]. \quad (2.189)$$

Таким образом, автокорреляционная функция выходного процесса тоже зависит лишь от разности $(n+m) - n = m$, т. е. реакция линейной стационарной системы на стационарный в широком смысле сигнал является стационарной в широком смысле.

Подставив $\ell = r - k$ в равенство (2.189), получим

$$\begin{aligned}\varphi_{yy}[m] &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\varphi_{xx}[m-\ell]\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]h[\ell+k] = \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\varphi_{xx}[m-\ell]c_{hh}[\ell],\end{aligned} \quad (2.190)$$

где использовано обозначение

$$c_{hh}[\ell] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]h[\ell+k]. \quad (2.191)$$

Последовательность вида $c_{hh}[\ell]$ называется *детерминированной автокорреляционной последовательностью* или просто *автокорреляционной последовательностью* $h[n]$. Стоит подчеркнуть, что $c_{hh}[\ell]$ — автокорреляция аperiodической последовательности, т. е. последовательности с конечной энергией. Ее не следует путать с автокорреляцией случайной последовательности с бесконечной энергией. Действительно, можно показать, что $c_{hh}[\ell]$ — это просто дискретная свертка последовательностей $h[n]$ и $h[-n]$. Итак, формулу (2.190) можно интерпретировать следующим образом: автокорреляция выходного сигнала линейной системы равна свертке автокорреляции поданного на вход сигнала и аperiodической автокорреляции импульсной характеристики системы.

Формула (2.190) наводит на мысль, что преобразование Фурье может оказаться полезным при описании отклика линейной стационарной системы на стохастический сигнал. Предположим для простоты, что $m_x = 0$, т. е. автокорреляционная и автоковариационная последовательности совпадают. Тогда, обозначив через $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, $\Phi_{yy}(e^{j\omega})$ и $C_{hh}(e^{j\omega})$ Фурье-образы последовательностей $\varphi_{xx}[m]$, $\varphi_{yy}[m]$ и $c_{hh}[\ell]$ соответственно, из формулы (2.190) получим

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = C_{hh}(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (2.192)$$

Кроме того, формула (2.191) дает $C_{hh}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2$ или

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (2.193)$$

Уравнение (2.193) обосновывает термин *спектральной плотности мощности*:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{y^2[n]\} &= \varphi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{yy}(e^{j\omega}) d\omega = \\ &= \text{средняя мощность на выходе.} \end{aligned} \quad (2.194)$$

Подставляя равенство (2.193) в формулу (2.194), имеем

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \varphi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega. \quad (2.195)$$

Предположим, что $H(e^{j\omega})$ — идеальный полосовой фильтр, АЧХ которого была изображена на рис. 2.18, в. Поскольку $\varphi_{xx}[m]$ — вещественная четная последовательность, ее преобразование Фурье также вещественное и четное, т. е.

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Phi_{xx}(e^{-j\omega}).$$

Аналогично $|H(e^{j\omega})|^2$ — четная функция ω . Следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} \varphi_{yy}[0] &= \text{средняя мощность на выходе} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_a}^{\omega_b} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_b}^{-\omega_a} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega. \end{aligned} \quad (2.196)$$

Таким образом, площадь под графиком функции $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ на промежутке $\omega_a \leq \omega \leq \omega_b$ можно интерпретировать как среднеквадратическое значение сигнала в этой полосе частот. Заметим, что мощность на выходе должна оставаться неотрицательной, поэтому

$$\lim_{(\omega_b - \omega_a) \rightarrow 0} \varphi_{yy}[0] \geq 0.$$

Этот результат вместе с соотношением (2.196) и тем фактом, что полоса $[\omega_a; \omega_b]$ может быть произвольно малой, влечет, что

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \forall \omega. \quad (2.197)$$

Следовательно, функция плотности мощности вещественного сигнала является вещественной, четной и неотрицательной.

Пример 2.26. Белый шум

Концепция белого шума чрезвычайно полезна в различных контекстах моделирования и анализа ЦОС и коммуникационных систем. Белым шумом называют сигнал, для которого $\varphi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$. В этом примере мы предполагаем, что сигнал имеет ненулевое математическое ожидание. Спектр мощности белого шума постоянен, т. е.

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 \quad \forall \omega.$$

Поэтому средняя мощность белого шума равна

$$\varphi_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_x^2 d\omega = \sigma_x^2.$$

Понятие белого шума также полезно при представлении случайных сигналов, чья мощность непостоянна относительно частоты. Например, случайный сигнал $y[n]$ со спектром мощности $\Phi_{yy}(e^{j\omega})$ можно считать реакцией линейной стационарной системы на белый шум.

Иначе говоря, мы используем формулу (2.193) для определения системы с КЧХ $H(e^{j\omega})$, удовлетворяющей уравнению

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \sigma_x^2,$$

где σ_x^2 — средняя мощность предполагаемого белого шума. Мы выбираем среднюю мощность такого входного сигнала для получения корректной средней мощности $y[n]$. Например, предположим, что $h[n] = a^n u[n]$. Тогда

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}},$$

и мы можем оперировать со случайными сигналами, чей спектр мощности имеет вид

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = \left| \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right|^2 \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{1 + a^2 - 2a \cos \omega}. \quad \square$$

Другим важным результатом, касающимся корреляции входного и выходного сигналов линейной стационарной системы, является следующая формула:

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}[m] &= \mathcal{E}\{x[n]y[n+m]\} = \mathcal{E}\left\{x[n] \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n+m-k]\right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\varphi_{xx}[m-k]. \end{aligned} \quad (2.198)$$

В этом случае взаимная корреляция между входным и выходным сигналами совпадает со сверткой импульсной характеристики и автокорреляционной последовательности входного сигнала.

Преобразование Фурье соотношения (2.198) выглядит как

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}). \quad (2.199)$$

Последняя формула имеет полезное приложение для входного сигнала, являющегося белым шумом, т. е. $\varphi_{xx}[m] = \sigma_x^2 \delta[m]$. Подставляя это равенство в выражение (2.198), получаем

$$\varphi_{xy}[m] = \sigma_x^2 h[m]. \quad (2.200)$$

Таким образом, когда на вход подается белый шум с нулевым математическим ожиданием, взаимная корреляция между входным сигналом линейной системы и ее откликом пропорциональна импульсной характеристике системы. Аналогично спектр мощности поданного на вход белого шума равен

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

Итак, из равенства (2.199) имеем

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 H(e^{j\omega}). \quad (2.201)$$

Другими словами, взаимный спектр мощности в этом случае пропорционален КЧХ системы. Формулы (2.200) и (2.201) могут служить основой для оценки импульсной или частотной характеристики линейных стационарных систем, если удастся определить реакцию системы на белый шум. В качестве примера практического использования такого метода можно привести измерение акустической импульсной характеристики помещения или концертного зала.

2.12. Краткое содержание главы

В этой главе мы рассмотрели и обсудили ряд основных определений, относящихся к дискретным сигналам и системам. Мы ввели некоторые стандартные последовательности, говорили о представлении линейной стационарной системы в терминах свертки и получили некоторые следствия устойчивости и детерминированности системы. Мы отметили, что системы, чьи входной и выходной сигналы связаны линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами, образуют важный подкласс линейных стационарных систем. Обсуждалось рекурсивное решение таких уравнений, и были введены понятия КИХ- и БИХ-систем.

Важный метод анализа и представления линейных стационарных систем связан с их представлением в частотной области. Была рассмотрена реакция системы на комплексную экспоненциальную последовательность, что позволило определить ее КЧХ. Соотношение между импульсной и частотной характеристиками мы интерпретировали как пару, связанную преобразованием Фурье.

Мы уделили внимание свойствам преобразования Фурье и свели в таблицу различные полезные пары, связанные этим преобразованием. Таблицы 2.1 и 2.2 содержат информацию о свойствах и теоремах преобразования Фурье, в то время как табл. 2.3 включает в себя Фурье-пары.

Глава заканчивается рассмотрением случайных дискретных сигналов. Основные идеи и результаты развиваются и используются в следующих главах.

Задачи

Обязательные задачи с ответами

- 2.1. Для каждой из следующих систем определите, является ли она (1) устойчивой, (2) причинной, (3) линейной, (4) стационарной, (5) системой без памяти:
- а) $T(x[n]) = g[n]x[n]$, где $g[n]$ известно; б) $T(x[n]) = e^{x[n]}$;
 в) $T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^n x[k]$, $n \neq 0$; г) $T(x[n]) = ax[n] + b$;
 д) $T(x[n]) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$; е) $T(x[n]) = x[-n]$;
 ж) $T(x[n]) = x[n - n_0]$; з) $T(x[n]) = x[n] + 3u[n + 1]$.
- 2.2. а) Известно, что импульсная характеристика $h[n]$ линейной стационарной системы (ЛС-системы) равна нулю всюду вне отрезка $N_0 \leq n \leq N_1$. Кроме того, ненулевые отсчеты поданного на вход сигнала $x[n]$ расположены в промежутке $N_2 \leq n \leq N_3$. Как следствие, реакция системы равна нулю всюду, кроме некоторого сегмента $N_4 \leq n \leq N_5$. Выразите N_4 и N_5 через N_0 , N_1 , N_2 и N_3 .
- б) Пусть $x[n]$ имеет нулевые значения, кроме N последовательных отсчетов, а $h[n] = 0$, кроме M последовательных членов. Что можно сказать о максимальном числе последовательных ненулевых отсчетов $y[n]$?
- 2.3. Вычисляя свертку, найдите реакцию ЛС-системы на единичный скачок ($x[n] = u[n]$), если ее импульсная характеристика равна $h[n] = a^{-n}u[-n]$, а $0 < a < 1$.
- 2.4. Рассмотрим линейное разностное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1].$$

Вычислите $y[n]$ при $n \geq 0$, если $x[n] = \delta[n]$ и $y[n] = 0$ при $n < 0$.

2.5. Причинная ЛС-система описывается разностным уравнением

$$y[n] - 5y[n - 1] + 6y[n - 2] = 2x[n - 1].$$

- а) Определите однородную реакцию системы, т. е. возможный отклик системы на сигнал $x[n] = 0$ для всех n .
- б) Найдите импульсную характеристику системы.
- в) Вычислите отклик системы на единичный скачок.

2.6. а) Определите КЧХ $H(e^{j\omega})$ ЛС-системы, у которой входной и выходной сигналы удовлетворяют разностному уравнению

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n - 1] = x[n] + 2x[n - 1] + x[n - 2].$$

б) Выпишите разностное уравнение, характеризующее систему с КЧХ

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}.$$

2.7. Определите, какие из сигналов являются периодическими, и установите их период.

- а) $(x[n]) = e^{j(\pi n/6)}$; б) $(x[n]) = e^{j(3\pi n/4)}$; в) $(x[n]) = \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n}$; г) $(x[n]) = e^{j\pi n/\sqrt{2}}$.

2.8. Импульсная характеристика ЛС-системы равна $h[n] = 5(-1/2)^n u[n]$. Используя преобразование Фурье, найдите отклик системы на сигнал $x[n] = (1/3)^n u[n]$.

2.9. Рассмотрите разностное уравнение

$$y[n] - \frac{5}{6}y[n - 1] + \frac{1}{6}y[n - 2] = \frac{1}{3}x[n - 1].$$

- а) Что можно сказать о частотной и импульсной характеристике, реакции на единичный скачок ЛС-системы, описываемой этим разностным уравнением?
- б) Что можно сказать об общем виде однородного решения этого разностного уравнения?
- в) Рассмотрите другую систему, удовлетворяющую этому же уравнению, но не относящуюся ни к причинным, ни к ЛС-системам. Найдите ее реакцию на сигнал $x[n] = \delta[n]$, если известно, что $y[0] = y[1] = 1$.

2.10. Определите отклик ЛС-системы с импульсной характеристикой $h[n]$ на сигнал $x[n]$, если

- а) $x[n] = u[n]$, $h[n] = a^n u[-n - 1]$, $a > 1$;
- б) $x[n] = u[n - 4]$, $h[n] = 2^n u[-n - 1]$;
- в) $x[n] = u[n]$, $h[n] = 2^{n-1} u[-n]$;
- г) $x[n] = u[n] - u[n - 10]$, $h[n] = 2^n u[-n - 1]$.

2.11. Рассмотрите ЛС-систему с КЧХ $H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\omega}}$, $-\pi < \omega \leq \pi$. Определите отклик $y[n]$ системы, если входной сигнал описывается последовательностью $x[n] = \sin(\pi n/4)$.

- 2.12. Рассмотрите систему, описываемую разностным уравнением

$$y[n] = ny[n-1] + x[n].$$

Известно, что она причинна и удовлетворяет условиям состояния покоя в начальном положении, т. е. если $x[n] = 0$ при $n < n_0$, то $y[n] = 0$ при $n < n_0$.

- а) Найдите все отсчеты $y[n]$, если $x[n] = \delta[n]$.
 б) Является ли эта система линейной? Ответ обоснуйте.
 в) Является ли эта система стационарной? Ответ обоснуйте.
- 2.13. Определите, какие из следующих дискретных сигналов являются собственными для устойчивой ЛС-системы:
- а) $e^{j2\pi n/3}$; б) 3^n ; в) $2^n u[-n-1]$;
 г) $\cos(\omega_0 n)$; д) $(1/4)^n$; е) $(1/4)^n u[n] + 4^n u[-n-1]$.
- 2.14. Для следующих трех систем дано по одной паре сигнал–отклик:
- а) система A : $x[n] = (1/3)^n$, $y[n] = 2(1/3)^n$;
 б) система B : $x[n] = (1/2)^n$, $y[n] = (1/4)^n$;
 в) система C : $x[n] = (2/3)^n u[n]$, $y[n] = 4(2/3)^n u[n] - 3(1/2)^n u[n]$.

Основываясь на этой информации, сделайте как можно более строгий вывод о системах, выбрав ответ из списка:

- (i) система не может относиться к классу ЛС-систем;
 (ii) система должна быть ЛС-системой;
 (iii) система может быть ЛС-системой, причем существует ровно одна ЛС-система, у которой есть такая пара сигнал–отклик;
 (iv) система может быть ЛС-системой, но такой парой сигнал–отклик она определена неоднозначно.

При выборе п. (iii) этого списка определите импульсную или частотную характеристику соответствующей системы.

- 2.15. Рассмотрите систему, изображенную на рис. 2.23. Отклик ЛС-системы с импульсной характеристикой $h[n] = \frac{1}{4^n} u[n+10]$ умножается на единичный скачок $u[n]$, и получается отклик большой системы. Ответьте на каждый из поставленных ниже вопросов, коротко обосновав свой ответ.
- а) Является ли большая система ЛС-системой?
 б) Является ли большая система причинной?
 в) Является ли большая система устойчивой?
- 2.16. Рассмотрите следующее разностное уравнение:

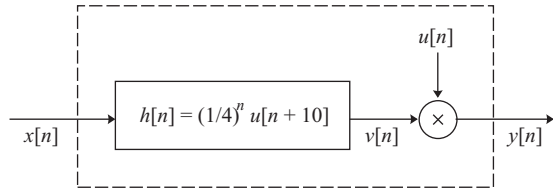
$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = 3x[n].$$

- а) Найдите общий вид однородного решения данного уравнения.
 б) Известно, что это уравнение характеризует как причинную, так и антипричинную¹ ЛС-систему; найдите импульсную характеристику обеих систем.

¹ Антипричинными называются системы, в которых выходной сигнал зависит только от текущего и будущих отсчетов входного сигнала. Импульсная характеристика $h[n]$ таких систем равна нулю при $n > 0$. — *Примеч. ред.*

- в) Покажите, что причинная ЛС-система устойчива, а антипричинная — нет.
 г) Найдите частное решение разностного уравнения, если $x[n] = \frac{1}{2^n} u[n]$.

Рис. 2.23



- 2.17. а) Найдите Фурье-образ последовательности

$$r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- б) Рассмотрите последовательность

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{M} \right) \right), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Изобразите последовательность $w[n]$ и запишите ее Фурье-образ $W(e^{j\omega})$ в терминах $R(e^{j\omega})$ — Фурье-образа последовательности $r[n]$.

Указание: выразите $w[n]$ через $r[n]$ и последовательности $e^{\pm j(2\pi n/M)}$.

- в) Начертите графики функций $|R(e^{j\omega})|$ и $|W(e^{j\omega})|$ в случае $M = 4$.
- 2.18. Определите, какая из ЛС-систем с перечисленными ниже импульсными характеристиками является причинной, а какая нет.
- | | |
|--|-----------------------------------|
| а) $h[n] = (1/2)^n u[n]$; | б) $h[n] = (1/2)^n u[n - 1]$; |
| в) $h[n] = (1/2)^{ n }$; | г) $h[n] = u[n + 2] - u[n - 2]$; |
| д) $h[n] = (1/3)^n u[n] + 3^n u[-n - 1]$. | |

- 2.19. Определите, какая из ЛС-систем с перечисленными ниже импульсными характеристиками является устойчивой, а какая нет.
- | | |
|---|---|
| а) $h[n] = 4^n u[n]$; | б) $h[n] = u[n - 1] - u[n - 10]$; |
| в) $h[n] = 3^n u[-n - 1]$; | г) $h[n] = \sin(\pi n/3) u[n]$; |
| д) $h[n] = (3/4)^{ n } \cos(\pi n/4 + \pi/4)$; | е) $h[n] = 2u[n + 5] - u[n] - u[n - 5]$. |

- 2.20. Рассмотрите разностное уравнение, представляющее причинную ЛС-систему:

$$y[n] + (1/a)y[n - 1] = x[n - 1].$$

- а) Выпишите импульсную характеристику этой системы как функцию от a .
 б) При каких значениях a эта система будет устойчивой?

Обязательные задачи без ответов

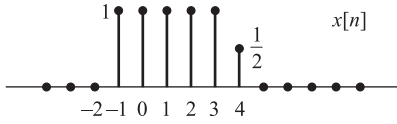


Рис. 2.24

2.21. Дискретный сигнал $x[n]$ показан на рис. 2.24. Изобразите каждый из следующих сигналов:

- а) $x[n-2]$; б) $x[4-n]$; в) $x[2n]$;
 г) $x[n]u[2-n]$; д) $x[n-1]\delta[n-3]$.

- 2.22. Рассмотрите дискретную ЛС-систему с импульсной характеристикой $h[n]$. Покажите, что если входной сигнал $x[n]$ представляет собой периодическую последовательность с периодом N (т. е. $x[n] = x[n+N]$), выходной сигнал $y[n]$ также является периодической с тем же периодом.
- 2.23. Для каждой из следующих систем определите, является ли она (1) устойчивой, (2) причинной, (3) линейной, (4) стационарной:
- а) $T(x[n]) = x[n] \cos \pi n$; б) $T(x[n]) = x[n^2]$;
 в) $T(x[n]) = x[n] \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$; г) $T(x[n]) = \sum_{k=n-1}^{\infty} x[k]$.
- 2.24. Пусть $x[n]$ — сигнал, поданный на вход линейной системы, а $y[n]$ — ее отклик на этот сигнал. Покажите, что если $x[n] = 0 \forall n$, то $y[n] = 0$ для всех n .
- 2.25. Рассмотрите систему, входной сигнал которой $x[n]$ и выходной сигнал $y[n]$ удовлетворяют следующему уравнению:

$$8y[n] + 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n]. \quad (2.202)$$

- а) Покажите, что если $x[n] = \delta[n]$, то примером последовательности, удовлетворяющей разностному уравнению, является

$$y_p[n] = \frac{3}{40} \left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n] + \frac{1}{20} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

- б) Найдите однородное решение (решения) разностного уравнения (2.202).
- в) Найдите $y[n]$ для $-2 \leq n \leq 2$ при условии, что в уравнении (2.202) $x[n] = \delta[n]$ и при решении разностного уравнения предполагается, что система удовлетворяет условиям покоя в начальном положении. Обратите внимание: состояние покоя в начальном положении подразумевает, что система, определяемая уравнением (2.202), причина.
- 2.26. Выберите для каждой из трех систем, представленных в (2.203) примерами входной и выходной последовательностей, как можно более строгий вывод из следующего списка:
- (i) система должна быть линейной, причем существует ровно одна ЛС-система, у которой есть такая пара сигнал-отклик;
- (ii) система должна быть линейной, но не может быть однозначно определена такой парой сигнал-отклик;
- (iii) система может быть линейной, и если она таковой является, то однозначно определена такой парой сигнал-отклик;
- (iv) система может быть линейной, но такой парой сигнал-отклик она определена неоднозначно;
- (v) система не может быть ЛС-системой.

При выборе пунктов (i) или (iii) приведите импульсную характеристику $x[n]$ для однозначно определяемой ЛС-системы.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^n &\longrightarrow \boxed{\text{Система А}} \longrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n, \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) &\longrightarrow \boxed{\text{Система Б}} \longrightarrow 3j \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right), \\ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)u[n] &\longrightarrow \boxed{\text{Система В}} \longrightarrow -6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 6\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]. \end{aligned} \tag{2.203}$$

2.27. Выберите для каждой из систем, представленных в (2.204) примерами входной и выходной последовательностей, как можно более строгий вывод из следующего списка:

- (i) система должна быть линейной, причем существует ровно одна ЛС-система, у которой есть такая пара сигнал-отклик;
- (ii) система должна быть линейной, но не может быть однозначно определена такой парой сигнал-отклик;
- (iii) система может быть линейной, и если она таковой является, то однозначно определена такой парой сигнал-отклик;
- (iv) система может быть линейной, но такой парой сигнал-отклик она определена неоднозначно;
- (v) система не может быть ЛС-системой.

При выборе пунктов (i) или (iii) приведите импульсную характеристику $x[n]$ для однозначно определяемой ЛС-системы.

$$\begin{aligned} \delta[n] &\longrightarrow \boxed{\text{Система А}} \longrightarrow 2e^{j\pi/4}u[n], \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] &\longrightarrow \boxed{\text{Система Б}} \longrightarrow \delta[n]. \end{aligned}$$

Для всех $x[n], y[n]$ и при постоянной α (2.204)

$$\begin{aligned} x[n] + \alpha y[n] &\longrightarrow \boxed{\text{Система В}} \longrightarrow T(x[n]) + \alpha T(y[n]), \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) &\longrightarrow \boxed{\text{Система Г}} \longrightarrow 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{5}\right), \\ x[n] &\longrightarrow \boxed{\text{Система Д}} \longrightarrow y[n] = 0, 2y[n+1] + x[n]. \end{aligned}$$

2.28. На рис. 2.25 показаны пары сигнал-отклик некой системы

- а) Может ли система S быть устойчивой? Обоснуйте свой ответ.
- б) Может ли система S быть линейной? Обоснуйте свой ответ.
- в) Допустим, (2) и (3) — пары сигнал-отклик некой системы S_2 , которая является ЛС-системой. Определите импульсную характеристику $h[n]$ системы.
- г) Допустим, (1) — пара сигнал-отклик ЛС-системы S_3 . Каков отклик этой системы на входной сигнал, показанный на рис. 2.26?

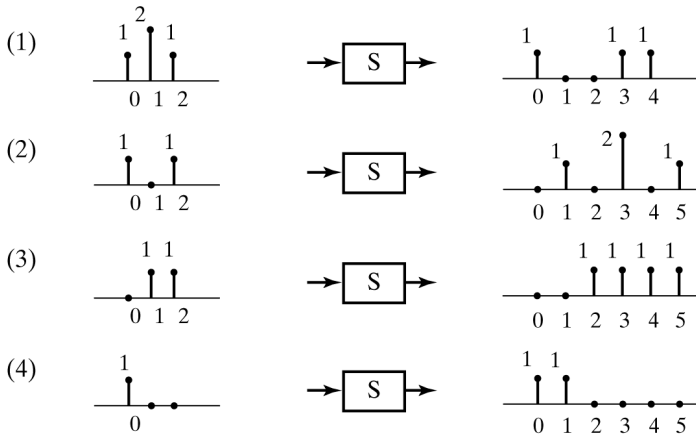


Рис. 2.25

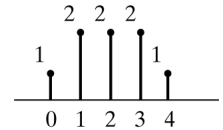


Рис. 2.26

2.29. Импульсная характеристика ЛС-системы $h[n]$ равна

$$h[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ 1, & n = 0, 1, 2, 3, \\ -2, & n = 4, 5, \\ 0, & n > 5. \end{cases}$$

Определите отклик системы $y[n]$ и нарисуйте график, если $x[n]$:

- а) $u[n]$; б) $u[n - 4]$; в) $u[n] - u[n - 4]$.

2.30. На рис. 2.27 изображен каскад двух ЛС-систем.

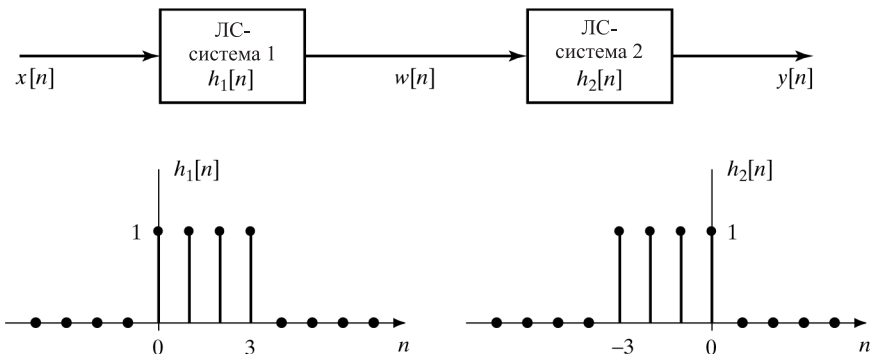


Рис. 2.27

- а) Определите и нарисуйте $w[n]$, если $x[n] = (-1)^n u[n]$. Определите также выходной сигнал $y[n]$.
 б) Определите и нарисуйте общую импульсную характеристику каскадной системы, т. е. нарисуйте выходной сигнал $y[n] = h[n]$, если $x[n] = \delta[n]$.
 в) Рассмотрите $x[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n - 4] - 2\delta[n - 12]$. Нарисуйте график $w[n]$.

г) Для входного сигнала п. «в» выразите выходной сигнал $y[n]$ через общую импульсную характеристику $h[n]$, определенную в п. «б». Поясните свой ответ графически.

2.31. Если пара сигнал-отклик причинной ЛС-системы удовлетворяет разностному уравнению

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n],$$

то импульсная характеристика системы равна $h[n] = a^n u[n]$.

а) Для каких значений a система является устойчивой?

б) Рассмотрите причинную ЛС-систему, для которой пара сигнал-отклик определяется разностным уравнением

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n] - a^N x[n - N],$$

где N — целое положительное число. Определите и нарисуйте импульсную характеристику этой системы.

Указание: для упрощения решения воспользуйтесь свойствами линейности и стационарности.

в) Система из п. «б» является КИХ-системой или БИХ-системой? Обоснуйте свой ответ.

г) Для каких значений a система из п. «б» является устойчивой? Обоснуйте свой ответ.

2.32. Пусть $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a - j\omega}$, где $-1 < a < 0$. Определите и начертите графики следующих функций частоты:

а) $\text{Re}(X(e^{j\omega}))$; б) $\text{Im}(X(e^{j\omega}))$; в) $|X(e^{j\omega})|$; г) $\angle X(e^{j\omega})$.

2.33. Рассмотрите ЛС-систему, определенную разностным уравнением

$$y[n] = -2x[n] + 4x[n - 1] - 2x[n - 2].$$

а) Определите импульсную характеристику этой системы.

б) Определите частотную характеристику системы. Выразите свой ответ в виде

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega n_d},$$

где $A(e^{j\omega})$ — вещественная функция ω . Явно укажите $A(e^{j\omega})$ и задержку n_d данной системы.

в) Нарисуйте графики амплитуды $|H(e^{j\omega})|$ и фазы $\angle H(e^{j\omega})$.

г) Допустим, что входной сигнал системы

$$x_1[n] = 1 + e^{j0,5\pi n}, \quad -\infty < n < \infty.$$

Используя частотную характеристику, определите выходной сигнал $y_1[n]$.

д) А теперь предположим, что входной сигнал системы

$$x_2[n] = (1 + e^{j0,5\pi n})u[n], \quad -\infty < n < \infty.$$

Используя определяющее разностное уравнение или дискретную свертку, определите соответствующий отклик $y_2[n]$ для $-\infty < n < \infty$. Сравните $y_1[n]$ и $y_2[n]$. Для какого диапазона значений n они равны?

2.34. ЛС-система имеет частотную характеристику

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - 1,25e^{-j\omega}}{1 - 0,8e^{-j\omega}} = 1 - \frac{0,45e^{-j\omega}}{1 - 0,8e^{-j\omega}}.$$

- Определите разностное уравнение, связывающее входной сигнал $x[n]$ и отклик $y[n]$.
- Используя одну из приведенных форм записи частотной характеристики, определите импульсную характеристику $h[n]$.
- Покажите, что $|H(e^{j\omega})|^2 = G^2$, где G — величина постоянная. Определите G . (Это пример всепропускающего (allpass) фильтра, который будет подробно рассмотрен в гл. 5.)
- Если входной сигнал вышеуказанной системы определяется формулой $x[n] = \cos(0,2\pi n)$, то выходной сигнал имеет вид $y[n] = A \cos(0,2\pi n + \theta)$. Чему равны A и θ ?

2.35. Импульсная характеристика ЛС-системы изображена на рис. 2.28.

Входной сигнал системы, $x[n]$, изображен на рис. 2.29.

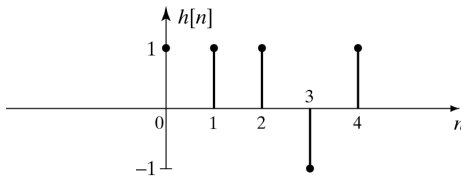


Рис. 2.28

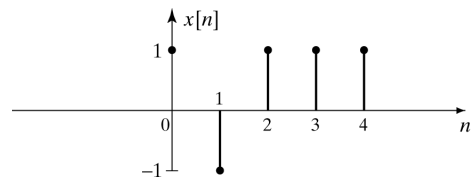


Рис. 2.29

- Используя дискретную свертку, определите выходной сигнал системы $y[n] = x[n] * h[n]$ для вышеуказанного входного сигнала. Обоснуйте свой ответ графически, показав $y[n]$ для достаточно большого диапазона значений.
- Автокорреляционная последовательность сигнала $x[n]$ определена уравнением (2.191) как $c_{xx}[n] = x[n] * x[-n]$. Система на рис. 2.28 является согласованным (matched) фильтром для входного сигнала на рис. 2.29. Выразите выходной сигнал из п. «а» через $c_{xx}[n]$ с учетом того, что $h[n] = x[-(n-4)]$.
- Определите выходной сигнал системы с импульсной характеристикой $h[n]$, если $x[n] = u[n+2]$. Обоснуйте свой ответ графически.

2.36. Частотная характеристика дискретной ЛС-системы определяется формулой

$$H(e^{j\omega}) = \frac{(1 - je^{-j\omega})(1 + je^{-j\omega})}{1 - 0,8e^{-j\omega}} = \frac{1 + e^{-j2\omega}}{1 - 0,8e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - 0,8e^{-j\omega}} + \frac{e^{-j2\omega}}{1 - 0,8e^{-j\omega}}.$$

- Используя одну из приведенных форм записи частотной характеристики, получите формулу для импульсной характеристики системы $h[n]$.
- По частотной характеристике определите разностное уравнение, связывающее входной сигнал системы $x[n]$ и выходной сигнал $y[n]$.
- Если входной сигнал системы имеет вид

$$x[n] = 4 + 2 \cos(\omega_0 n) \quad \text{для } -\infty < n < \infty,$$

то для каких значений ω_0 выходной сигнал имеет вид

$$y[n] = A = \text{const}$$

для $-\infty < n < \infty$? Чему равна постоянная A ?

2.37. Рассмотрите каскад дискретных ЛС-систем, показанный на рис. 2.30

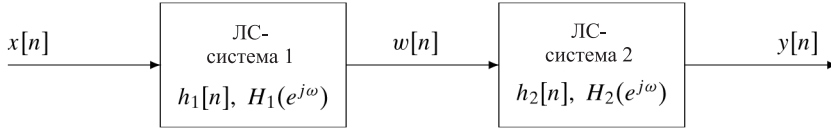


Рис. 2.30

Первую систему описывает частотная характеристика

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \begin{cases} 0, & |\omega| \leq 0,25\pi, \\ 1, & 0,25\pi < |\omega| \leq \pi, \end{cases}$$

а вторую — импульсная характеристика

$$h_2[n] = 2 \frac{\sin(0,5\pi n)}{\pi n}.$$

- Найдите формулу, которая описывает частотную характеристику $H(e^{j\omega})$ для диапазона $-\pi \leq \omega \leq \pi$.
- Нарисуйте графики частотной зависимости амплитуды $|H(e^{j\omega})|$ и фазы $\angle H(e^{j\omega})$ общей частотной характеристики в диапазоне $-\pi \leq \omega \leq \pi$.
- Используйте любой удобный способ для определения общей импульсной характеристики $h[n]$ каскада систем.

2.38. Рассмотрите каскад дискретных ЛС-систем, показанный на рис. 2.31.

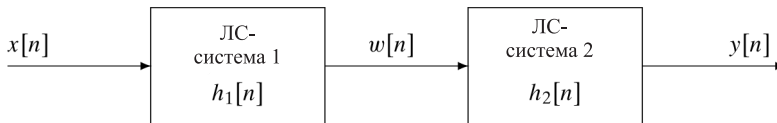


Рис. 2.31

Импульсные характеристики двух систем имеют вид:

$$h_1[n] = u[n - 5], \quad h_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

- Нарисуйте графики последовательностей $h_2[k]$ и $h_1[n - k]$ (для некоторого $n < 0$) как функций k .
- Определите $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$, импульсную характеристику всей системы. Дайте ответ в виде формулы (или формул), определяющих $h[n]$ для $-\infty < n < \infty$, или в виде подробного графика $h[n]$ для достаточно большого диапазона n .

- 2.39. Опираясь на определение линейности (формула (2.23) на с. 44), покажите, что ИСЗ (пример 2.2 на с. 43) и скользящее среднее (пример 2.3 на с. 43) являются линейными системами.
- 2.40. Выясните, какие из перечисленных ниже сигналов периодичны, и найдите их период.
- а) $x[n] = e^{j(2\pi n/5)}$; б) $\sin(\pi n/19)$; в) $ne^{j\pi n}$; г) e^{jn} .
- 2.41. Определите реакцию $y[n]$ ЛС-системы на сигнал

$$x[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right),$$

если $|H(e^{j\omega})| = 1$, а $\arg(H(e^{j\omega}))$ изображен на рис. 2.32.

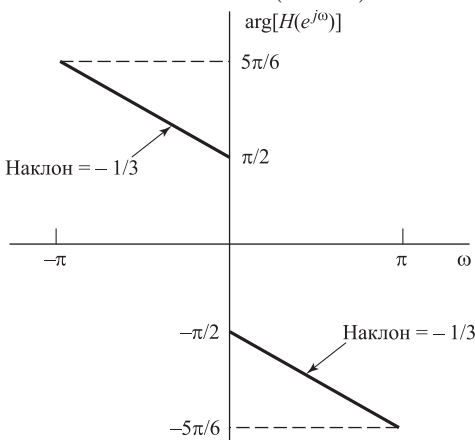


Рис. 2.32

- 2.42. Пусть $s[n]$, $x[n]$ и $w[n]$ — реализации стационарных случайных сигналов, причем $s[n] = x[n]w[n]$. Последовательности $x[n]$ и $w[n]$ статистически независимы и имеют нулевое математическое ожидание. Автокорреляционная функция последовательности $w[n]$ равна

$$E\{w[n]w[n+m]\} = \sigma_w^2 \delta[m],$$

а дисперсия $x[n]$ равна σ_x^2 . Покажите, что $s[n]$ — белый шум с дисперсией $\sigma_x^2 \sigma_w^2$.

Дополнительные задачи

- 2.43. Оператор T представляет ЛС-систему. Как видно из рис. 2.33, если входной сигнал системы — это $(\frac{1}{3})^n u[n]$, выходной сигнал равен $g[n]$, а если на входе последовательность $x[n]$, на выходе системы получается сигнал $y[n]$.



Рис. 2.33

Выразите $y[n]$ через $g[n]$ и $x[n]$.

- 2.44. Пусть $X(e^{j\omega})$ — Фурье-образ комплекснозначного сигнала $x[n]$, вещественная и