СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 8

Введение. Выбросы траекторий случайных процессов
и общая проблема «пересечений уровней» 11
Литература к введению 22

ГЛАВА 1.
СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ,
ПРОЦЕССЫ И ПОЛЯ 24
1.1. Определение и классификация случайных функций 24
1.2. Случайные последовательности и временные ряды 29
1.3. Случайные непрерывные процессы 40
1.4. Случайные потоки событий и точечные процессы 54
1.5. Случайные поля и изображения 64
Заключение 74

ГЛАВА 2.
ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ 77
2.1. Выбросы, превышения уровней, экстремальные значения 77
2.2. Вероятностные модели случайных последовательностей............. 81
2.3. Характеристики превышений заданных уровней 99
2.4. Случайные последовательности в случайных средах.................. 112
2.5. Точечные процессы превышений уровней 119
2.6. Характеристики экстремальных значений 129
2.7. Вероятностная структура векторных последовательностей 146
2.8. Вероятностные зависимости, диаграммы рассеяния
и парные сравнения 153
2.9. Дополнительные результаты 164
Заключение 169

ГЛАВА 3.
ВЫБРОСЫ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ........... 173
3.1. Особенности вероятностной структуры
непрерывных процессов.. 173
3.2. Непрерывность и дифференцируемость
случайных функций.. 176
3.3. Свойства производных случайного процесса........................... 182
3.4. Выбросы, пересечения уровней и экстремальные
значения 190

3.5. Выбросы случайных гауссовских процессов 193
3.6. Пересечения заданных уровней негауссовскими процессами... 200
3.7. Случайные процессы, порожденные квазигармоническим колебанием.. 214
3.8. Особенности модели «сигнал плюс шум»................................... 225
3.9. Распределение числа пересечений уровня 235
3.10. Экстремальные значения случайных процессов......................... 249
3.11. Распределение высоты абсолютного максимума 266
3.12. Характеристики длительностей временных интервалов 276
3.13. Фазовые траектории случайных процессов................................. 291
3.14. Вероятностная структура векторных процессов 311
3.15. Выбросы случайных процессов в случайно-неоднородных средах 326
3.16. Дополнительные результаты 345
Заключение 356

ГЛАВА 4.
ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ПРОЦЕССОВ................. 361
4.1. Вероятностное описание случайных потоков событий 361
4.2. Обобщения простых пуассоновских моделей 368
4.3. Характеристики превышений заданных уровней 375
4.4. Диаграммы рассеяния в анализе точечных процессов................. 383
4.5. Случайные точечные процессы в случайных средах.................... 392
4.6. Дополнительные результаты 415
Заключение 422

ГЛАВА 5.
ВЫБРОСЫ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ 425
5.1. Вероятностная структура случайных точечных полей 425
5.2. Случайные поля стохастической геометрии 437
5.3. Вероятностная структура изображений.. 449
5.4. Характеристики пересечений уровней в анализе изображений 470
5.5. Дополнительные результаты 477
Заключение 486

ГЛАВА 6.
ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫБРОСОВ
В РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ.. 489
6.1. Прикладные задачи теории выбросов 489
6.2. Особенности решения некоторых типовых задач 491
6.3. Оценивание неизвестных параметров на основе статистики пересечений уровней................................ 505

6.4. Знаковые функции непрерывных случайных процессов............. 516
6.5. Вероятностная структура оптических излучений в лазерных информационных системах....................................... 527
6.6. Вибрационные процессы и вибромониторинг............................. 538
6.7. Случайные процессы со случайными переходами между устойчивыми состояниями 547
Заключение 565

Литература 566

Перечень основных вероятностных моделей 575

Предметный указатель 576

Предисловие

Вот уже на протяжении нескольких десятилетий в прикладной теории случайных процессов проблема «пересечений уровней» или задачи исследования выбросов случайных процессов относятся к классу «постоянно актуальных» задач. Подобные задачи привлекают к себе особое внимание и математиков, и специалистов различных прикладных направлений. Причин для этого, безусловно, много, но наиболее важными, по-видимому, следует считать междисциплинарный характер теории, сложность аналитических исследований, широту и разнообразие практических приложений, в которых эта теория помогает решать новые задачи. Такие задачи характерны для статистической радиофизики и радиотехники, теории надежности и теории рисков, технической и медицинской диагностики, теории автоматического управления, телеметрии, локации и навигации, сейсмологии, метеорологии и многих других направлений исследований.

В 1987 году была издана монография В.И. Тихонова и В.И. Хименко «Выбросы траекторий случайных процессов» (М.: Наука, 1987. – 304 с.), в которой отражены основные результаты в области прикладной теории выбросов, полученные к 1985 году. В 1998 году в журнале «Радиотехника и электроника» была опубликована обзорная статья (Тихонов В.И., Хименко В.И. Проблема пересечений уровней случайными процессами. Радиофизические приложения// Радиотехника и электроника, 1998, том 43, № 5, с. 501–523), в которой предпринята попытка систематизации прикладных (в основном радиофизических) задач, решаемых на основе характеристик выбросов.

За прошедший после выхода этих работ период в исследованиях и практических применениях характеристик выбросов многое изменилось. Получены новые аналитические и расчетно-экспериментальные результаты, более отчетливо сформировался класс задач, которые по своему содержанию относятся к общей проблеме выбросов случайных процессов. Произошло существенное расширение областей практического использования характеристик выбросов и, одновременно с этим, из-за большого разнообразия приложений заметно увеличился разрыв между самой теорией и ее практическими применениями.

Основная цель предлагаемой книги – изложение современного состояния исследований в области прикладной теории выбросов. Здесь делается попытка обобщения и развития основных результатов, связанных с проблематикой выбросов, попытка рассмотрения характеристик пересечений уровней «в целом». При этом наряду с изложением уже устоявшихся определений и подходов значительное место в книге занимает новый материал, еще не излагавшийся в монографической литературе. Эти особенности можно заметить уже на этапе предварительного просмотра оглавления и кратких аннотаций, которыми открывается каждая глава.

Из наиболее важных для приложений новых результатов полезно здесь выделить:

- единое рассмотрение проблематики пересечений уровней для моделей случайных последовательностей, случайных процессов, случайных потоков событий и случайных пространственно-временных полей;
- исследования характеристик выбросов для негауссовских моделей случайных функций, моделей с неоднородной вероятностной структурой и моделей случайных процессов в условиях случайно-неоднородных сред;
- представления случайных функций на фазовой плоскости и исследования вероятностной структуры фазовых траекторий на основе характеристик пересечений уровней;
- исследования вероятностных характеристик выбросов векторных случайных последовательностей и векторных процессов;
- вероятностный анализ структуры случайных функций при их представлениях в виде диаграмм рассеяния;
- общая систематизация и рассмотрение особенностей разнообразных практических задач, решаемых на основе теории выбросов.

По своему содержанию основной материал книги условно можно разделить на три взаимосвязанные части. В первой части (Введение и глава 1) кратко отмечаются особенности развития исследований в области проблематики «пересечений уровней» и ее практических применений, дается общая классификация случайных функций и выделяются наиболее распространенные вероятностные модели. Вторая часть связана с рассмотрением основных результатов по анализу вероятностной структуры и исследованиям характеристик выбросов для различных классов случайных функций. Здесь выделяются результаты по анализу выбросов случайных последовательностей (глава 2), анализу непрерывных случайных процессов (глава 3), исследованиям вероятностной структуры случайных точечных процессов (глава 4) и анализу характеристик выбросов для некоторых моделей случайных полей (глава 5). Третья часть работы (глава 6) связана с рассмотрением прикладных задач, решение которых основано на использовании теории выбросов. Приведенные здесь примеры отражают характерные особенности практического применения характеристик пересечений уровней в различных областях исследований.

Полезно отметить, что основная структура книги такова, что совсем не обязательно рассматривать представленные в ней главы подряд. Каждая из них (кроме первой и шестой) посвящена одному из выделенных классов случайных функций, каждая обладает достаточной самостоятельностью и может рассматриваться независимо от других.

По своему общему содержанию данная работа наиболее близко примыкает к опубликованной в издательстве «ТЕХНОСФЕРА» работе В.И. Хименко «Случайные данные: структура и анализ» (М.: ТЕХНОСФЕРА, 2017. – 424 с.). Здесь используются одинаковые определения и обозначения, единая форма описания вероятностных моделей и одинаковый характер представления основных результатов. По существу, данная работа может рассматриваться как своеобразное продолжение исследований случайных функций (процессов, сигналов, наблюдений, экспериментальных данных...), но на новом, более высоком уровне – на уровне анализа детальной вероятностной структуры и на уровне формирования общей прикладной теории выбросов случайных процессов, случайных потоков событий и случайных полей.

В целом представленная книга подготавливалась так, чтобы ее результатами удобно было пользоваться при изучении, исследовании и практических применениях характеристик детальной вероятностной структуры различного класса случайных функций.

ВВЕДЕНИЕ

ВЫБРОСЫ ТРАЕКТОРИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ОБЩАЯ ПРОБЛЕМА «ПЕРЕСЕЧЕНИЙ УРОВНЕЙ»

В развитии каждого научного направления наступают определенные периоды, когда возникает необходимость (и появляется возможность) систематизации, обобщения и дальнейшего развития накопленных результатов. Если рассматривать подобные задачи применительно к проблемам исследования выбросов случайных процессов, то целесообразно прежде всего хотя бы приближенно очертить общие границы рассматриваемой области – определить класс изучаемых характеристик, особенности основных задач, связь этих задач со смежными направлениями исследований, основные области практических приложений.

Основные характеристики выбросов

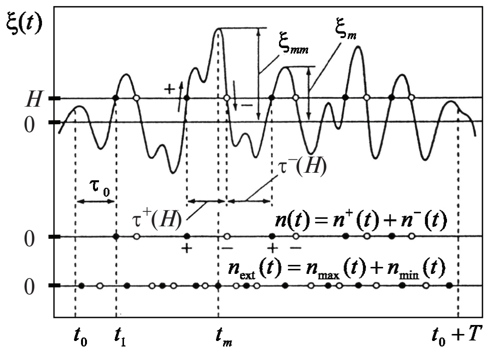
В различных областях физики, техники, биологии и общего естествознания при исследованиях динамических систем, рассмотрении информационных процессов, описании и анализе экспериментальных данных широко используются вероятностные модели, построенные на основе общей теории случайных функций.

1. Любая случайная функция определяется семейством своих реализаций – семейством выборочных функций. Если, в качестве примера, на некотором интервале времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ длительностью T рассмотреть отдельную реализацию (траекторию или выборочную функцию) $\xi(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ непрерывного случайного процесса $\xi(t) = \{\xi(t), t \in T\}$, то при описании ее поведения можно выделить совокупность «особых точек» и ввести физически наглядные числовые характеристики. Так, в частности, зафиксировав некоторый постоянный пороговый уровень H, поведение функции $\xi(t)$ можно характеризовать (схема 0.1) числом ее положительных выбросов $n^+(H, T)$ над этим уровнем H, числом отрицательных выбросов $n^-(H, T)$ или общим числом пересечений $n(H, T) = n^+(H, T) + n^-(H, T)$ уровня H реализацией $\xi(t)$ на интервале времени $t \in [t_0, t_0+T]$. Показанные на схеме 0.1 величины $\tau^+(H) = \tau_{+-}(H)$ и $\tau^-(H) = \tau_{-+}(H)$ соответствуют при этом длительностям положительных и отрицательных выбросов или

Схема 0.1

Выбросы траекторий случайных процессов и характеристики пересечений заданных уровней

- Характеристики выбросов, пересечения заданных уровней и экстремальные значения случайных процессов позволяют описывать поведение и вероятностную структуру случайных функций



Отдельная реализация (траектория, выборочная функция) непрерывного случайного процесса

$\xi(t)$ на интервале времени $t \in [t_0, t_0 + T]$ и реализации двух случайных точечных процессов: процесса $n(t)$, порожденного пересечениями уровня H и процесса $n_{ext}(t)$ экстремальных значений

- **Наиболее распространенные характеристики выбросов**

Число пересечений траекторией $\xi(t)$, $t \in T$ заданного уровня H (число выбросов)	$n(H, T)$, $n^{\pm}(H, T)$
Число экстремальных значений траектории (число максимумов, минимумов, ...)	$n_{ext}(T)$, $n_{\max}(T)$, $n_{\min}(T)$
Высота локальных максимумов	ξ_m
Высота абсолютного максимума — супремума	$\xi_{mm} = \xi_{\sup}$
Время первого достижения заданной границы	τ_0
Относительная длительность пребывания траектории $\xi(t)$ в заданной области $\xi \geq H$ или $\xi \in [H_1, H_2]$	$t^{+}(H)$, $t(H_1, H_2)$
Длительность выбросов траектории $\xi(t)$ на уровне H	$\tau^{+}(H)$, $\tau^{-}(H)$
Длительность интервалов между последовательными максимумом и минимумом траектории	τ_{M-m}

• • • Необходимо отметить, что все характеристики подобного типа являются функционалами, заданными на выборочных функциях случайного процесса, т. е. сами являются случайными величинами. При их анализе обычно рассматриваются математические ожидания, дисперсии или распределения соответствующих величин длительностям интервалов между последовательными положительными и отрицательными: (+ –) и (– +) пересечениями уровня H. В момент времени $t = t_1$ траектория $\xi(t)$ впервые выходит за уровень H и, следовательно, τ_0 – время первого достижения границы H.

Функция $\xi(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ на интервале $T < \infty$ имеет конечное число максимумов $n_{\max}(T)$ и минимумов $n_{\min}(T)$ с различными высотами ξ_m, причем в момент времени $t = t_m$ траектория $\xi(t)$ достигает наибольшего (абсолютного) максимума $\xi_{mm} = \xi(t_m)$. Следовательно, при описании реализации $\xi(t)$ можно воспользоваться числом ее экстремальных значений, величиной экстремальных значений, длительностью временных интервалов между отдельными экстремумами. В точках максимумов и минимумов функции $\xi(t)$ производная этой функции $\xi'(t)$ пересекает нулевой уровень $H = 0$. При учете этой особенности многие характеристики экстремумов принципиально могут быть также рассмотрены как характеристики типа «пересечений уровней».

Ясно, что перечисленные особенности поведения траекторий случайных процессов могут рассматриваться при различных значениях уровня H или при исследованиях пересечений траектории $\xi(t)$ с некоторой функцией $H(t)$. Помимо этого, интерес могут представлять относительные длительности нахождения реализаций $\xi(t)$ в заданных областях, вероятности выхода траектории $\xi(t)$ за границы допустимых значений, поведение производной $\xi'(t)$ в моменты выхода $\xi(t)$ за заданный уровень H и ряд других характеристик. На схеме 0.1 приведен перечень наиболее распространенных характеристик временной структуры для описания траекторий $\xi(t)$ непрерывных процессов.

• • • Необходимо подчеркнуть, что все характеристики подобного типа являются функционалами, заданными на выборочных функциях случайного процесса, т. е. сами являются случайными величинами. При их анализе обычно рассматриваются математические ожидания (средние значения) $M\{...\}$, дисперсии $D[...]$ или плотности вероятностей $p(...)$ соответствующих величин.

2. Вся совокупность перечисленных характеристик принципиально может быть отнесена к характеристикам выбросов случайного процесса $\xi(t)$, так как в той или иной мере они отражают особенности детальной временной структуры положительных и отрицательных выбросов траектории $\xi(t)$, $t \in T$ на уровне H. При иной интерпретации эти же характеристики можно отнести к характеристикам класса пересечений уровней. Более того, из рисунка на схеме 0.1 видно, что возможен и еще один полезный способ представления (а следовательно, описания и анализа) введенных характеристик. Последовательность особых точек траектории $\xi(t)$ можно рассматривать как случайную последовательность событий (выбросов, пересечений, максимумов, экстремумов, ...), происходящих во времени. Множество точек $\{t_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, случайно распределенных на оси времени, образуют при этом случайный поток событий, т. е. случайный точечный процесс, порожденный исследуемыми событиями.

• • • Выделенные особенности поясняют эквивалентность отдельных задач теории пересечений уровней [1–3], теории выбросов случайных процессов [4-6] и теории случайных точечных процессов [7–9].

3. Если теперь рассматривать теорию выбросов или теорию пересечений уровней как самостоятельное направление исследований, то к основным разделам этого направления можно отнести:

- исследование вероятностных характеристик выбросов для различных моделей случайных процессов;
- исследование вероятностных характеристик выбросов при линейных и нелинейных преобразованиях исходного процесса;
- исследование статистики выбросов (в частности, вопросов оценивания характеристик) и вероятностный анализ прикладных задач, решения которых основаны на использовании характеристик выбросов.

• • • Расширяя класс исходных моделей и изменяя в соответствии с этим некоторые определения, можно сформулировать аналогичные по содержанию задачи для случайных последовательностей [10, 11], случайных потоков событий [12, 13], векторных случайных процессов [13] и случайных полей и изображений [14–16].

Область практических приложений

Все основные этапы развития теории выбросов связаны с необходимостью исследования детальной вероятностной структуры случайных функций и решением практических задач. Характеристики выбросов обладают высокой информативностью и физической наглядностью, они достаточно просто измеряются аппаратурно, и во многих задачах позволяют одновременно с измерениями выполнять переход от аналоговой к цифровой форме представления информации.

Еще одна важная особенность связана здесь с тем, что на практике работа многих сложных динамических систем осуществляется с использованием предельных режимов. При этом требования безопасности, надежности и эффективности необходимо выполнять в условиях максимальных или минимальных значений нагрузок, скоростей и ускорений, токов и напряжений, температур и давлений, времени работы и уровней входных сигналов, помех, внешних воздействий.

Перечисленные факторы во многом объясняют широкое использование характеристик выбросов в самых различных областях физики, техники и естествознания — там, где исследуются модели случайных функций, где рассматриваются предельные режимы работы систем, критические состояния объектов, экстремальные значения параметров и где необходим «тонкий», детальный анализ вероятностной структуры процессов. Приведем здесь лишь несколько характерных примеров из различных областей практического использования отдельных характеристик выбросов или характеристик пересечений уровней.

- *Статистическая радиотехника.* Задачи анализа флуктуационных процессов, исследования вероятностной структуры сигналов и помех в системах радиосвязи и радиолокации, анализ релейных систем и пороговых элементов при воздействии помех, исследования эффектов срыва слежения в системах синхронизации, системах автоматического сопровождения и управления, вероятностный анализ помехоустойчивости систем передачи, приема и обработки информации.
- *Статистическая радиофизика.* Исследования вероятностных характеристик колебательных и волновых процессов в линейных и нелинейных системах, исследования эффектов замирания и рассеяния радиоволн при их распространении в случайно-неоднородных средах, описание и анализ случайных изменений интенсивности и спектральных характеристик радиоволн при зондировании околоземного пространства и при обработке данных радиолокационного исследования планет, извлечение информации из данных радиоинтерференционных наблюдений.
- *Информационно-измерительная техника.* Задачи вероятностного описания и измерения характеристик случайных функций, классификация исследуемых процессов и систем, выделение аномальных измерений, обработка наблюдений с пропусками данных, процедуры сравнений выборочных данных с пороговыми уровнями или эталонными значениями, исследования случайных погрешностей и анализ точности измерительных систем, исследования вероятностной структуры квазипериодических процессов, разработка вероятностных моделей измерительной информации, обработка информации в интеллектуальных измерительных системах.
- *Теория распознавания образов.* Исследования детальной вероятностной структуры случайных процессов и случайных полей, задачи выбора информативных признаков, разработка правил принятия решений, оптимизация выбора пороговых уровней, оценка вероятностей правильного и ошибочного принятия решений.

- *Фотоника и информационная оптика.* Задачи регистрации оптических полей и лазерных излучений в режиме счета фотонов, исследования детальной структуры оптических излучений в системах лазерной связи, локации и навигации, изучение структуры оптических полей в задачах физики атмосферы, исследования вероятностной структуры оптических полей в голографии и лазерной интерферометрии, вероятностный анализ спекл-эффектов.
- *Механика.* Расчеты на прочность строительных конструкций и сооружений при случайных нагрузках, расчеты конструкций на сейсмические воздействия, исследования статистических характеристик выбросов и экстремальных нагрузок в строительной механике, исследования шероховатых поверхностей при механической обработке деталей, оценка уровня и частотной структуры вибраций ракетных двигателей, вероятностный анализ воздействий случайно-неоднородных сред на летательные аппараты.
- *Техническая диагностика.* Анализ динамики линейных и нелинейных систем, исследования вероятностной структуры основных процессов, определение границ областей допустимых значений для отдельных параметров, задачи выбора диагностических признаков, оценка текущего состояния систем и агрегатов, исследования уровня износа отдельных элементов и узлов, прогноз остаточного ресурса оборудования, задачи вибродиагностики и вибромониторинга, задачи извлечения диагностической информации из вероятностной структуры вибрационных процессов.
- *Теория массового обслуживания.* Исследования вероятностной структуры случайных потоков событий, анализ случайных изменений интенсивности потоков, задачи описания вероятностной структуры очередей, распределения случайных длительностей обслуживания и длительностей ожидания, вероятностный анализ альтернирующих процессов, исследования структуры систем и сетей обслуживания со случайным множественным доступом.
- *Теория запасов.* Разработка вероятностных моделей в задачах теории запасов, задачи исследования динамики максимальных и минимальных уровней, определение границ областей допустимых значений, модели хранения со случайными входными и выходными процессами, оценка вероятностей достижения заданного уровня, анализ вероятностей разорения и вероятностей переполнения, оптимизация структуры процессов пополнения запасов.
- *Теория надежности.* Исследования вероятностной структуры исходных процессов и систем, анализ характеристик и показателей надежности, оценка вероятностей безотказной работы, задачи анализа частоты выхода устройств и элементов из режима нормального функционирования, исследования виброустойчивости сложных

динамических систем, исследования информационной структуры случайных потоков событий (отказов, восстановлений, ...).

- *Теория рисков.* Исследования предельных режимов работы систем и экстремальных значений процессов, определение областей допустимых значений параметров, анализ характеристик времени первого достижения границ, оценка вероятностей выхода основных параметров за границы заданной области, задачи анализа вероятностей разрушения, выхода объекта из строя или вероятностей разорения.
- *Экономика и социальная сфера.* Исследования вероятностной структуры временных рядов, вероятности достижения заданных уровней, вероятности разорения и переполнения, теория страхования и оценка рисков, обработка данных выборочных социологических исследований, изучение структуры случайных транспортных потоков, исследования динамики рынков, анализ вероятностных характеристик циклических процессов в экономике.
- *Биология и медицина.* Исследования нейронной активности, анализ ритмических процессов в биоритмологии, исследования диагностических признаков при распознавании образов в электрофизиологии, изучение структуры информационных процессов в медицинской диагностике, обработка данных в ультразвуковых исследованиях, регистрация и анализ электромагнитных излучений живого организма, экспресс-анализ биомедицинских сигналов в системах мониторинга и телеметрии, исследования вероятностной структуры процессов в экстремальной и космической медицине.
- *Сейсмология и геофизика.* Задачи обнаружения и исследования вероятностных характеристик сейсмических колебаний, анализ временной, частотной и пространственной структуры случайных волновых полей, изучение условий распространения сейсмических колебаний в случайно-неоднородных средах, исследования скоростей распространения упругих волн в неоднородных геологических средах, задачи извлечения информации из вероятностной структуры геофизических данных при малых объемах выборки.
- *Гидрология и океанология.* Анализ случайных изменений уровня рек, вероятностное описание процессов речного стока, максимальные и минимальные значения сезонных и годовых стоков рек, вероятности превышения расчетных значений, оценка вероятностей превышения объемов весенних половодий, оценка уровней максимальных и минимальных расходов водных ресурсов, исследования ветровых волнений, вероятностный анализ взволнованных поверхностей, нелинейные эффекты в динамике волновых полей, изучение временной, частотной и пространственной структуры

океанологических процессов, разработка вероятностных моделей метеорологических воздействий.

• • • Следует заметить, что приведенными примерами, конечно же, не исчерпывается область практического применения теории выбросов. Эти примеры позволяют лишь оценить прикладную значимость, разнообразие областей и спектр практических приложений, связанных с необходимостью исследований характеристик типа пересечений уровней. Из них, в частности, видно, что получение новых результатов, даже в изучении отдельных характеристик выбросов, представляет интерес для решения целой совокупности различных по своей содержательной постановке задач.

Особенности общего развития исследований

В общей теории вероятностей и теории случайных функций формирование любого самостоятельного направления исследований обычно связано с необходимостью решения практических задач, возможностями использования результатов при построении математических моделей, изучении новых физических явлений, процессов и систем. Такие особенности характерны для большинства математических дисциплин и приводят, с одной стороны, к развитию формализованной абстрактной теории и, с другой стороны, к формированию новых областей практических применений этой теории.

1. Интерес к исследованиям отдельных характеристик превышений уровней проявился достаточно давно. Первыми работами в этом направлении, по-видимому, можно считать работы, связанные с решением классических задач по вероятностному анализу игровых ситуаций, оценке вероятностей выигрыша, разорения или вероятностному анализу рисков. Подобные исследования относятся к ранним этапам общего развития теории вероятностей и, как правило, связаны с рассмотрением независимых, в основном гауссовских, случайных величин. Для исследования характеристик превышений уровней на этих этапах были получены важные результаты по анализу схемы Бернулли (независимые испытания с двумя исходами каждое – успех или неудача) и анализу случайных потоков событий с малыми вероятностями – потоков Пуассона [17, 18] .

В более поздние периоды был выполнен цикл теоретических и экспериментальных работ [19, 20] по рассмотрению динамических систем при случайных воздействиях. Исследуемые процессы описывались при этом стохастическими дифференциальными уравнениями, изучались характеристики времени первого достижения случайным процессом заданной границы, и были получены важные результаты для анализа вероятностной структуры марковских процессов.

Начало систематизированного изучения характеристик выбросов связано с началом активного использования вероятностных методов в задачах анализа электронных и радиотехнических систем. Первой основополагающей работой в этом направлении является работа С.О. Райса (1945 г.) [21]. В этой работе характеристики выбросов рассматривались как семейство числовых характеристик для описания и анализа флуктуационных шумов (моделей стационарных гауссовских процессов). Были получены общие формулы для среднего числа выбросов, рассмотрены вопросы вероятностного распределения числа максимальных значений, показаны возможности приближенного нахождения плотности вероятностей для длительностей выбросов.

Работа С.О. Райса [21] послужила хорошим стимулом для активных исследований по изучению детальной вероятностной структуры случайных процессов. Это относилось и к развитию математической теории, и к решению разнообразных прикладных задач. В работе [22] и обзорных статьях В.И. Тихонова [23, 24] наглядно отражены результаты таких исследований применительно к процессам статистической радиотехники и радиофизики.

2. Важным этапом в развитии теории выбросов явилось издание монографии Г. Крамера и М. Лидбеттера [1] и монографии В.И. Тихонова [5]. Первая из этих работ [1] посвящена математически строгому изложению результатов исследования выборочных функций гауссовских процессов и вопросам, связанным с характеристиками пересечений уровней. Эта работа, кроме того, снабжена специальным дополнением, которое подготовлено Ю.К. Беляевым [8] и в котором дается подробный анализ основных математических работ, выполненных по проблематике пересечений уровней. В монографии В.И. Тихонова [5] систематизированы научно-прикладные результаты, полученные к 1968 году по исследованию характеристик выбросов. В этой работе для непрерывных случайных процессов показаны методы вычислений среднего числа выбросов и дисперсии числа пересечений заданного уровня случайным процессом, рассмотрены вероятностные распределения максимальных значений и распределения длительностей выбросов, показаны примеры практического использования таких результатов в решении радиотехнических задач.

Издание монографий [1, 5], наряду с работой С.О. Райса [21], оказало существенное влияние на общее формирование и последующее развитие данного направления исследований.

3. В последующий период активно выполнялись исследования аналитических свойств выборочных функций, возросло количество работ по расчетно-экспериментальным исследованиям, значительно расширилась область практических приложений теории выбросов.

В серии «Математика. Новое в зарубежной науке» под редакцией Ю.К. Беляева был издан сборник переводных статей [25], который по содержанию являлся своеобразным продолжением монографии Г. Крамера и М. Лидбеттера [1]. В этом сборнике были отражены наиболее важные результаты зарубежных математиков по исследованиям локальных свойств (ограниченность, непрерывность) выборочных функций, рассмотрены особенности высоких выбросов и характеристики экстремумов гауссовского случайного процесса. Кроме того, сборник содержит дополнение-обзор [26], подготовленный В.И. Питербаргом. В нем были выделены направления перспективных исследований в общей теории гауссовских процессов. Непосредственно к этим работам примыкает и еще один обстоятельный обзор В.И. Питербарга [27], опубликованный в серии «Итоги науки и техники» ВИНИТИ.

Близкая к данной тематике работа была опубликована Р.Н. Мирошиным [28]. В ней исследуются вопросы локальной регулярности выборочных функций, условия конечности факториальных моментов числа пересечений и математические проблемы сходимости рядов Райса и рядов Лонге – Хиггинса.

Помимо рассмотрения случайных последовательностей и процессов, заметное внимание стало уделяться исследованиям случайных полей. В работах Ю.К. Беляева [14, 15] была дана формулировка основных задач, показаны характерные особенности и получены обобщенные результаты по анализу вероятностной структуры выбросов для моделей непрерывных случайных полей.

В области прикладных исследований после выхода монографий [1,5] было опубликовано несколько обзорных статей [2, 3, 29] и издана монография Я.А. Фомина [30]. В обзорных статьях в основном систематизированы наиболее интересные, с точки зрения приложений, результаты зарубежных исследований. В монографии Я.А. Фомина рассмотрен метод временной дискретизации для непрерывных процессов и показаны особенности его использования в вычислениях различных характеристик выбросов. Кроме того, здесь были показаны результаты практического применения характеристик выбросов в решении задач теории связи и задач вероятностного анализа последовательных процедур принятия решений.

4. Полезно отметить, что практически независимо от перечисленных работ развивались исследования экстремальных значений для случайных последовательностей. В этом направлении Р. Фишером и Л. Типпетом в 1928 году были получены [31] и в 1943 году в работе Б.В. Гнеденко [32] обоснованы принципиально важные результаты по асимптотическому поведению экстремальных значений. Основные результаты, особенности развития и примеры применения классической теории экстремальных значений достаточно полно были отражены в монографии Э. Гумбеля [33]. Состояние подобных исследований к началу 90-х годов прошедшего столетия, математически строгое изложение классической теории и обобщение результатов на модели непрерывных гауссовских процессов показано в работе [10]. Важно здесь подчеркнуть, что работа [10], так же как и сборник [25], по своему содержанию являются продолжением исследований [1] и, одновременно с этим, являются связующим звеном между классической теорией экстремальных значений и проблематикой пересечений уровней.

5. Если теперь рассмотреть все перечисленные здесь работы в целом, то по своей сути все они могут быть отнесены к периоду развития и накопления результатов в области теории, приложений и общего формирования самостоятельного направления исследований – теории выбросов случайных функций.

К настоящему времени, по-видимому, наиболее полное изложение результатов прикладной теории выбросов содержится в работах [6, 34]. Издание монографии В.И. Тихонова и В.И. Хименко [6] позволило систематизировать накопленные к началу 90-х годов результаты и выполнить их последовательное изложение применительно к исследованиям непрерывных случайных процессов. Материалы обзорной статьи [34] показывают разнообразные примеры, возможности общей классификации и обобщения прикладных задач, связанных с необходимостью исследования характеристик пересечений уровней и характеристик выбросов.

• • • Основное содержание данной работы связано с рассмотрением современного состояния исследований, систематизацией, обобщением и развитием основных результатов в области прикладной теории выбросов, полученных для различных классов случайных функций за прошедший после выхода монографии [6] период времени.

ЛИТЕРАТУРА К ВВЕДЕНИЮ

1. **Крамер Г., Лидбеттер М.** Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969.
2. **Blake I.F., Lindsey W.C.** Level-crossing problems for random processes// IEEE Trans. Inform. Theory. 1973. Vol. IT-19. № 3. P. 295-315.
3. **Abrahams J.** A survey of recent progress on level-crossing problems for random processes// In: Communications and networks: a survey of recent advances. Ed. I.F. Blake, H.V. Poor. - N.Y.: Springer-Verlag, 1986.
4. **Тихонов В.И.** Статистическая радиотехника. – М.: Сов. радио, 1966.
5. **Тихонов В.И.** Выбросы случайных процессов. – М.: Наука, 1970.
6. **Тихонов В.И.**, **Хименко В.И.** Выбросы траекторий случайных процессов. – М.: Наука, 1987.
7. **Беляев Ю.К.** Исследование случайных потоков, порожденных случайными процессами. – Дисс. докт. физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 1969.
8. **Беляев Ю.К.** Новые результаты и обобщения задач типа пересечений: Дополнение к книге [1]. – М.: Мир, 1969.
9. **Тихонов В.И.**, **Миронов М.А.** Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977.
10. **Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.** Экстремумы случайных последовательностей и процессов. – М.: Мир, 1989.
11. **Хименко В.И.** Характеристики типа «превышений уровней» для простых моделей случайных последовательностей// Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 11. С. 1791–1801.
12. **Хименко В.И.** Характеристики типа «превышений уровней» для случайных точечных процессов// Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. №4. С 436–443.
13. **Хименко В.И.** Случайные данные: структура и анализ. – М.: Техносфера, 2017.
14. Случайные процессы и поля/ Под ред. Ю.К. Беляева. – М.: МГУ, 1979.
15. Выбросы случайных полей/ Под ред. Ю.К. Беляева. – М.: МГУ, 1972.
16. **Тихонов В.И.** Нелинейные преобразования случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1986.
17. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1,2. – М.: Книжный дом «Либроком»/ URSS, 2010.
18. **Гнеденко Б.В.** Курс теории вероятностей. – М.: Изд-во ЛКИ/URSS, 2015.
19. **Понтрягин Л.С.**, **Андронов А.А.**, **Витт А.А.** О статистическом рассмотрении динамических систем// ЖЭТФ. 1933. Т. 3. № 3. С. 165–180.

20. **Лошаков Л.Н.**, **Хайкин С.Э.** Экспериментальное исследование поведения динамической системы при случайных начальных условиях// ЖЭТФ. 1936. Т.6. № 8. С. 856–869.
21. **Rice S.O.** Mathematical analysis of random noise // BSTJ, 1944. V. 23, № 3; 1945. V. 24, № 1 (перевод в сб. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех»/ Под ред. Н.А. Железнова. – М.: Изд-во ИЛ, 1953.)
22. **Тихонов В.И.** Воздействие электрических флуктуаций на нелинейные радиотехнические устройства. – Дисс. докт. техн. наук. – М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. 1956.
23. **Тихонов В.И.** Выбросы случайных процессов // УФН. 1962. Т. 77. № 3.
24. **Тихонов В.И.** Характеристики выбросов случайных процессов (обзор)// Радиотехника и электроника. 1964. Т. 9. № 3.
25. Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения: Сб. статей/ Под ред. Ю.К. Беляева. – М.: Мир, 1978.
26. **Питербарг В.И.** Некоторые направления в исследовании свойств траекторий гауссовских случайных функций: Дополнение-обзор. В сб. [25]. – М.: Мир, 1978.
27. **Питербарг В.И.** Гауссовские случайные процессы// Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. – М.: ВИНИТИ, 1982. Т. 19. С. 155-199.
28. **Мирошин Р.Н.** Пересечения кривых гауссовскими процессами. – Л.: ЛГУ, 1981.
29. **Хименко В.И.** Характеристики выбросов траекторий стационарных случайных процессов// Зарубежная радиоэлектроника. 1981. № 6. С. 3–34.
30. **Фомин Я.А.** Теория выбросов случайных процессов. – М.: Связь, 1980.
31. **Fisher R.A., Tippett L.H.** Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample// Proc. Cambridge Phil. Soc. 1928. Vol. 24. P. 180.
32. **Gnedenko B.** Sur la distribution limite du terme maximum une serie aleatoire// Ann. Math. 1943. Vol. 44. № 3. P. 423–453.
33. **Гумбель Э.** Статистика экстремальных значений. – М.: Мир, 1965.
34. **Тихонов В.И.**, **Хименко В.И.** Проблема пересечений уровней случайными процессами. Радиофизические приложения// Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 5. С. 501–523.

ГЛАВА I

СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ПРОЦЕССЫ И ПОЛЯ

- **Общая классификация случайных функций**
- **Случайные последовательности и временные ряды**
- **Случайные непрерывные процессы**
- **Случайные потоки событий и точечные процессы**
- **Случайные поля и изображения**

Наиболее привлекательной особенностью (с практической точки зрения) в исследованиях характеристик выбросов является то, что результаты таких исследований дают основу для количественного описания детальной вероятностной структуры случайных функций. Такая особенность в значительной степени определяет и характер основных задач теории выбросов. Большая их часть по своему содержанию сводится к выделению некоторого самостоятельного класса случайных функций (или процессов), общему описанию этого класса и изучению его свойств – изучению конкретных характеристик вероятностной структуры применительно к конкретной вероятностной модели рассматриваемых процессов.

Данная глава по своему содержанию носит вводный характер. Здесь рассматривается общее определение случайных функций и на его основе выполняется предварительная классификация вероятностных моделей. Для каждого выделенного класса функций (случайных последовательностей, процессов и полей) показываются особенности их описания и приводятся некоторые общие свойства, которые существенно влияют на исследования основных характеристик выбросов.

1.1. Определение и классификация случайных функций

Обычно практическое использование теории вероятностей и теории случайных процессов связано с построением и изучением вероятностных моделей исследуемых реальных явлений, процессов или систем. Разнообразие практических задач в физических, технических и естественнонаучных приложениях приводит к большому разнообразию существующих математических моделей. Для конкретизации и анализа таких моделей целесообразно рассмотреть возможности их предварительной «грубой» классификации — возможности разделения всего многообразия моделей случайных функций на укрупненные самостоятельные классы.

В наиболее общем виде случайная функция формально определяется как семейство случайных переменных:

$$\{\xi(s)\} = \{\xi(s),\ \xi \in X,\ s \in S\},$$

в котором s — параметр, X — пространство состояний переменной ξ, S — множество возможных значений параметра s. Если из рассматриваемого семейства $\{\xi(s)\}$ выбрать лишь одну функцию $\xi(s)$, то такую

Схема 1.1.1

Принцип общей классификации случайных функций

- **Общее определение случайной функции**

$\{\xi(s)\} = \{\xi(s),\ \xi \in X,\ s \in S\}$ — семейство случайных переменных $\xi(s)$,

X — пространство (или множество) состояний переменной $\xi(\ldots)$,
s — параметр, от которого зависит $\xi(\ldots)$,
S — множество значений параметра s

- **Принцип общей классификации** ⇨ Конкретизация множеств X и S приводит к разделению случайных функций на самостоятельные классы

- **Признаки классификации** ⇨ Дискретность или непрерывность пространства X,
Дискретность или непрерывность множества S,
Размерность пространства состояний X, размерность множества параметров S

- **Примеры самостоятельных классов случайных функций** ⇨ Дискретные и непрерывные, скалярные и векторные случайные последовательности, случайные процессы и случайные поля

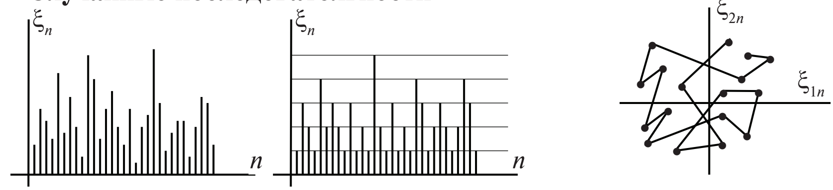
••• Разделение случайных функций на самостоятельные классы может выполняться различными способами. Выделенный здесь принцип классификации является необходимым предварительным этапом в исследованиях вероятностной структуры случайных последовательностей, процессов и полей функцию ξ(s) принято называть выборочной функцией или отдельной реализацией.

Классификация случайных функций, как и любая классификация, существенно зависит от целей и содержания решаемых задач. Она может выполняться различными способами и по самым различным признакам. На данном этапе за основу классификации удобно взять общее определе-

Схема 1.1.2

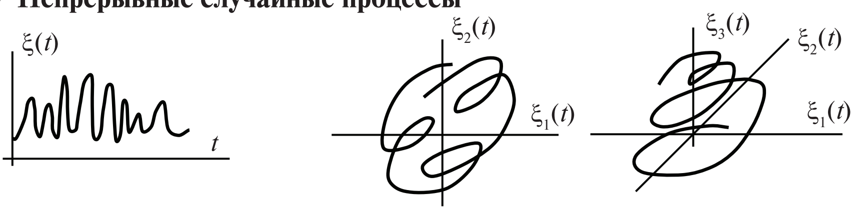
Характерный вид реализаций различных классов случайных функций

- **Случайные последовательности**



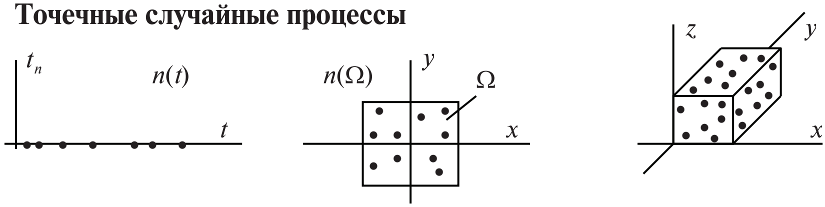
Непрерывная — Дискретная — Непрерывная векторная (двумерная)

- **Непрерывные случайные процессы**



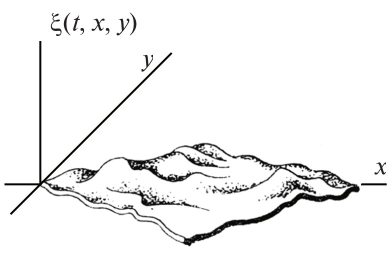
Скалярный процесс — Векторные процессы (двумерный и трехмерный)

- **Точечные случайные процессы**



Случайные потоки однородных событий
(во времени, на плоскости, в пространстве)

- **Случайные поля**



Реализация непрерывного пространственно-временного случайного поля ние случайной функции $\{\xi(s),\ \xi \in X,\ s \in S\}$ и путем конкретизации множеств X и S разделить все многообразие функций $\{\xi_s\}$ на самостоятельные классы (схема 1.1.1).

Разделение случайных функций $\{\xi(s)\} = \{\xi(s),\ \xi \in X,\ s \in S\}$ по виду пространства состояний X и виду параметрического множества S сразу же разделяет эти функции и по характерному виду их реализаций $\{\xi(s)\}$. В задачах обработки и анализа информации такое деление необходимо, так как от вида реализаций существенно зависят и сами методы анализа.

Выделим здесь несколько основных классов случайных функций (схема 1.1.2), модели которых наиболее часто используются в практических приложениях [26, 62].

1. Случайные последовательности и временные ряды

Предположим, что в определении случайной функции $\{\xi(s),\ \xi \in X,\ s \in S\}$ пространство состояний X является непрерывным скалярным множеством, параметр s представляет собой время, а параметрическое множество S – дискретное, то есть $s = t$ – время, $S = T = \{t_n,\ n = 0, 1, 2, ...\}$. Для случайной функции удобно при этом использовать обозначение $\{\xi(s)\} = \{\xi(t_n)\} = \{\xi_n\}$, где $n = 0, 1, 2, ...$. Называется такая функция непрерывной случайной последовательностью. В некоторых задачах ее называют также временным рядом или непрерывным случайным процессом с дискретным временем. Обычно в данном определении считается, что $t_0 < t_1 < t_2 ...$ и $\Delta t = t_i - t_{i-1} = const$ при любых $i = 1, 2, ..., m$.

Если предположить здесь, что пространство состояний X не непрерывное, а дискретное множество, то функция $\{\xi_n\}$ будет называться дискретной случайной последовательностью.

В более общей ситуации можно рассматривать векторную последовательность $\{\xi_n\} = \{\xi_{1n},\ \xi_{2n},\ ...,\ \xi_{qn}\}$, каждая компонента которой ξ_{jn}, $j = 1, 2, ..., q$ сама является непрерывной или дискретной случайной функцией. В качестве иллюстрации на схеме 1.1.2 показан характерный вид реализаций наиболее распространенных типов случайных последовательностей.

2. Непрерывные случайные процессы

Если теперь предположить, что в общем определении случайной функции $\{\xi(s)\} = \{\xi(s),\ \xi \in X,\ s \in S\}$ параметр $s = t$ – время, а пространство состояний X и параметрическое множество $S = T$ являются непрерывными множествами, то полученная функция $\{\xi(s)\} = \{\xi(t),\ \xi \in X,\ t \in T\}$ будет соответствовать определению непрерывного случайного процесса. Как правило, T представляет собой некоторый интервал временной оси, то есть $t \in [t_0,\ t_0 + T] = [0,\ T]$. Значения случайных переменных $\xi(t)$ могут быть при этом либо действительными (скалярными), либо комплексными, либо векторными. Соответственно, и исследуемые процессы будут называться скалярными, комплексными или векторными случайными процессами. На схеме 1.1.2 показан характер реализаций скалярного непрерывного случайного процесса $\xi(t)$, векторного двумерного $\xi(t) = (\xi_1(t),\ \xi_2(t)) = (\xi_x(t),\ \xi_y(t))$ и векторного трехмерного процесса $\xi(t) = (\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ \xi_3(t)) = (\xi_x(t),\ \xi_y(t),\ \xi_z(t))$. Составляющие компоненты $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ могут здесь рассматриваться как зависимые или независимые непрерывные скалярные случайные процессы.

3. Случайные точечные процессы и потоки событий

Точечные процессы представляют собой такую математическую модель, в которой пространство состояний X — это дискретное множество точек. Обычно каждой точке ставится в соответствие какое-либо событие, и тогда пространство X интерпретируется как дискретное множество однородных событий. Если события происходят во времени, то параметр $s = t$, $t \in T$ и случайный процесс $\xi(t)$ эквивалентен последовательности точек $\{t_n,\ n = 1, 2, ...\}$, соответствующих случайным моментам t_1, t_2, ... появления событий. Такие процессы обычно называются случайными потоками однородных событий. Описание последовательности событий $\{t_n\}$, $t_1 < t_2 < t_3 < ...$ во многих задачах может быть выполнено и как описание целочисленного случайного процесса $\{n(t)\}$, характеризующего число $n(t)$ событий (точек) на текущем интервале времени $[0, t)$.

Модели точечных процессов допускают различные обобщения. Так, например, случайное множество точек можно рассматривать не только на временной оси $[0, t)$, но и на плоскости (x, y) или в каком-либо пространстве (x, y, z). В зависимости от содержания решаемых задач, подобные модели могут рассматриваться как случайные точечные процессы или, в более общей ситуации, как случайные точечные поля, изменяющиеся и во времени, и в пространстве (схема 1.1.2).

4. Случайные поля

Если в общем определении случайной функции $\{\xi(s)\} = \{\xi(s),\ \xi \in X,\ s \in S\}$ параметрическое множество S имеет размерность $k \geq 2$, то такая функция называется случайным полем. В практических приложениях наибольший интерес обычно представляют пространственно-временные поля $\{\xi(t, r)\}$, для которых случайные переменные $\xi(t, r)$ зависят от времени t и координат r пространства (x, y, z). Налагая определенные ограничения на пространство состояний X случайной функции $\{\xi(t, r)\}$, можно выделить классы непрерывных и дискретных, скалярных и векторных случайных полей.

На схеме 1.1.2 показан характер реализации наиболее простого непрерывного пространственно-временного случайного поля $\xi(t, x, y)$.

• • • Конечно, следует подчеркнуть, что выделенные здесь классы случайных функций не охватывают всего многообразия существующих типов вероятностных моделей. Однако подобная классификация позволяет разделить случайные функции по характерному виду их реализаций. Эта особенность дает возможность частично систематизировать и обобщить различные по своему содержанию задачи обработки и анализа вероятностной структуры случайных последовательностей, случайных процессов и случайных полей.

1.2. Случайные последовательности и временные ряды

Случайные последовательности или временные ряды представляют собой один из распространенных способов описания (представления или регистрации) исследуемых случайных процессов. В общей теории случайных функций случайные последовательности – это один из самостоятельных классов функций. Многие реальные процессы, наблюдения, результаты экспериментальных измерений в физике и технике, экономике, биологии и медицине хорошо описываются моделями случайных последовательностей. В задачах компьютерного моделирования и задачах обработки данных на ЭВМ подобные способы отображения информации относятся к основным способам представления данных [62, 73, 90].

Еще одной важной особенностью является здесь то, что случайные последовательности, как правило, исследуются проще, чем непрерывные случайные процессы и поля [26, 72]. Вместе с тем при исследованиях последовательностей используются общие методы описания, математические модели и методы вероятностного анализа, которые важны при изучении любых классов случайных функций. Все эти особенности поясняют важность отдельного рассмотрения случайных последовательностей как с точки зрения общей теории, так и с позиций практических приложений.

1. Общее определение случайных последовательностей

Многие физические процессы, протекающие в природе, изменяются непрерывно во времени или в пространстве, т. е. относятся к классу непрерывных случайных функций $\xi(t, r)$. Наблюдения и измерения характеристик таких процессов на практике не всегда проводятся непрерывно.

Достаточно часто состояние исследуемых систем, или значения наблюдаемых процессов, измеряются через некоторые, обычно равные, интервалы времени Δt. При этом, по существу, от рассмотрения непрерывного случайного процесса $\xi(t)$ переходят к рассмотрению последовательности его значений $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$. Для упрощения записи, при выполнении условия $|t_{i+1} - t_i| = \Delta t = const$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, обычно используются обозначения $\xi(t_1) = \xi_1, \xi(t_2) = \xi_2, \ldots, \xi(t_n) = \xi_n$, или просто $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Сама операция перехода от $\xi(t)$ к последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ соответствует операции дискретизации непрерывного процесса $\xi(t)$ по времени t, а значения $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ называются при этом реализацией непрерывной случайной последовательности или временным рядом [18,26].

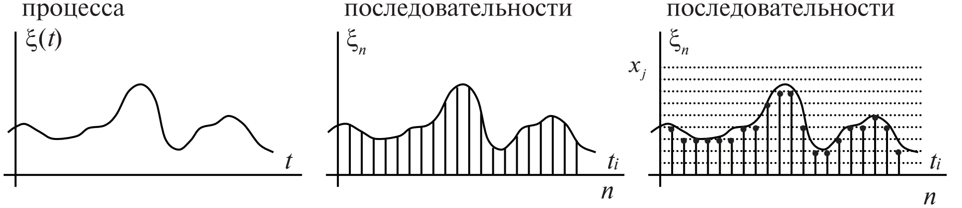
Если, помимо перехода к дискретному параметру $t \Rightarrow t_i$, $i = 0, 1, 2, ...$, выполнить также и переход от непрерывного состояния ξ к дискретному $\xi \Rightarrow x_j$, $j = 1, 2, ...$, то из непрерывного процесса $\xi(t)$ будет получена дискретная случайная последовательность. Такой переход $\xi \Rightarrow x_j$ соответствует операции квантования по уровню.

Схема 1.2.1

Непрерывные и дискретные случайные последовательности

- **Переход к исследованию случайных последовательностей на основе операций дискретизации и квантования непрерывных процессов**

• Реализация непрерывного процесса | • Реализация непрерывной последовательности | • Реализация дискретной последовательности



Исследуемый непрерывный случайный процесс ⇨ Дискретизация процесса $\xi(t)$ по времени t ⇨ Дискретизация процесса $\xi(t)$ по времени t и квантование значений ξ_n по уровню x_j

Типовые примеры появления случайных последовательностей

- Измерения каких-либо параметров в дискретные моменты времени. Это могут быть измерения температуры, давления, электрического тока, напряжения, скорости движения и т. д.
- Специальный переход от исследования непрерывных случайных процессов $\xi(t)$ к исследованию случайных последовательностей. Такой переход выполняется в системах дискретной или цифровой передачи информации, при обработке информационных процессов на ЭВМ, в задачах компьютерного моделирования, задачах дискретного управления и многих других ситуациях

••• **Случайные последовательности относятся к одному из самостоятельных и распространенных на практике классов случайных функций**

••• **Основные задачи исследования вероятностной структуры случайных последовательностей по своему содержанию эквивалентны исследованиям случайных временных рядов**

Дискретизация по времени $t \Rightarrow t_i$ и квантование по уровню $x \Rightarrow x_j$ – это две типовые операции, которые позволяют заменить исследования непрерывных случайных процессов $\xi(t)$ исследованиями случайных последовательностей (непрерывных или дискретных). Для наглядности описанных преобразований на схеме 1.2.1 показана их упрощенная физическая интерпретация.

Схема 1.2.2

Формализованное определение случайных последовательностей

- **Общее определение случайной функции** $\{\xi(s), \xi \in X, s \in S\}$ – семейство случайных переменных $\xi(s)$

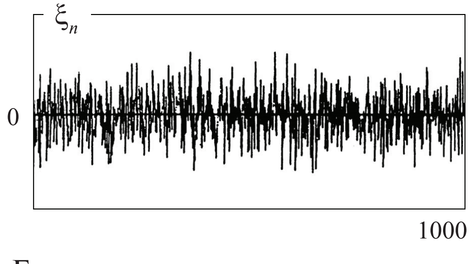
Если в этом определении:

- пространство состояний X – непрерывное,
- параметр $s = t$ – время,
- пространство параметров $S = T$ – дискретное, $T = \{t_1, t_2, ...\}$,

то случайная функция

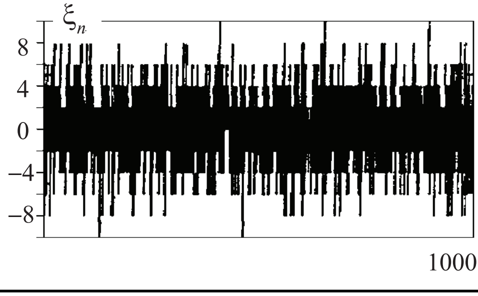
$$\{\xi(s), \xi \in X, s \in S\} = \{\xi(t), t \in T\} = \{\xi_n, n = 1, 2, ...\}$$

называется непрерывной случайной последовательностью,
или непрерывным процессом с дискретным временем,
или временным рядом



- **Отдельная функция** ξ_n, $n = 1, 2, ...$ из семейства $\{\xi_n, n = 1, 2, ...\}$ называется выборочной функцией или реализацией непрерывной случайной последовательности

- Если в данном определении считать, что пространство состояний X – дискретное, то это будет соответствовать определению дискретной случайной последовательности



- Характерный вид отдельной реализации дискретной случайной последовательности

Если к определению случайных последовательностей подойти с позиций формализованного подхода, то в соответствии с общей классификацией случайных функций (п. 1.1), налагая определенные ограничения на пространство параметров S и пространство состояний X, из общего определения случайных функций $\{\xi(s),\ \xi \in X,\ s \in S\}$ можно выделить самостоятельный класс случайных последовательностей (схема 1.2.2).

2. Особенности вероятностного описания

В зависимости от содержания решаемых задач построение математических моделей и вероятностное описание случайных функций может выполняться различными способами и с различной степенью детальности. В прикладных задачах модели случайных функций наиболее часто задаются семейством конечномерных распределений. В основе такого подхода находятся два взаимосвязанных вопроса: о способе описания случайной величины и о способе описания конечной последовательности случайных величин. Рассмотрим здесь подобные вопросы и выделим общие особенности вероятностного описания случайных функций [138].

1. Предположим, что наблюдению доступен некоторый произвольный случайный процесс $\{x(t),\ t \in T\}$, изменяющийся во времени. Каждая реализация такого процесса $\xi(t)$, $t \in T$ условно может рассматриваться как результат отдельного эксперимента – результат наблюдения за изменениями какого-либо параметра исследуемой системы на временном интервале $[t_0,\ t_0 + T]$. Если наблюдения проводятся в неизменных условиях, то выполнив m одинаковых экспериментов, могут быть получены m реализаций

$$\xi_i(t),\ \ t \in [t_0, t_0 + T],\ \ i = 1, 2, ..., m.$$

Все эти реализации будут различаться по своей форме, но их усредненные характеристики будут подчиняться общим закономерностям, связанным со свойствами или отдельными параметрами исследуемой системы.

Если на интервале наблюдений $[t_0, t_0 + T]$ выбрать некоторый произвольный момент времени $t = t_1$, то значения (отсчеты) каждой реализации $\xi_i(t_1)$, $i = \overline{1, m}$ в этот момент времени t_1 будут различными и их можно рассматривать как значения случайной величины $\xi(\mathrm{t}_1)$. Иначе говоря, значения случайного процесса $\{\xi(t),\ t \in T\}$ в каждый фиксированный момент времени $t = t_1$, $t_1 \in T$ являются случайной величиной $\xi(t_1)$. Областью определения такой величины $\xi(t_1)$ в общем случае можно здесь считать $\xi \in (-\infty, \infty)$.

Для полного вероятностного описания произвольной случайной величины $\xi(t_1)$ необходимо знать ее функцию распределения $F(\xi;\ t_1)$ или, при выполнении свойства дифференцируемости, функцию плотности вероятностей $p(\xi;\ t_1)$:

$$F(\xi;t_1) = P\left\{\,\xi(t_1) \le \xi\,\right\},\quad p(\xi;t_1) = \frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi;t_1),\quad \xi \in \left(-\infty, \infty\right).$$

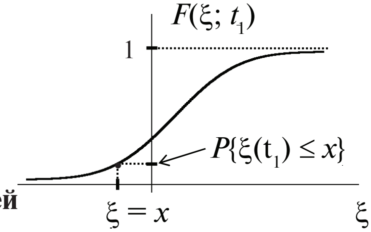
Схема 1.2.3

Определение, основные свойства и взаимосвязь функции распределения и плотности вероятностей

- **Функция распределения**

$$F(\xi; t_1) = P\left\{\xi(t_1) \le \xi\right\}, \xi \in \left(-\infty; \infty\right)$$

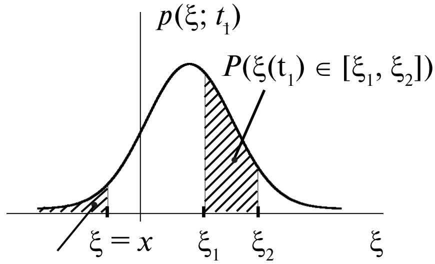
$$\lim_{\xi \to -\infty} F(\xi; t_1) = 0, \quad \lim_{\xi \to +\infty} F(\xi; t_1) = 1$$



- **Функция плотности вероятностей**

$$p(\xi; t_1) = \frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi; t_1), \xi \in \left(-\infty; \infty\right)$$

$$p(\xi; t_1) \ge 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi; t_1) d\xi = 1$$



$$\int_{-\infty}^{x} p(\xi; t_1) d\xi = F(\xi = x; t_1) = P\left\{\xi(t_1) \le x\right\}$$

$$P\left\{\xi(t_1) \in \left[\xi_1, \xi_2\right]\right\} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} p(\xi; t_1) d\xi = F(\xi_2; t_1) - F(\xi_1; t_1)$$

- Функция распределения $F(\xi; t_1)$ и плотность вероятностей $p(\xi; t_1)$ однозначно связаны между собой и позволяют полностью описать случайную величину $\xi(t_1)$. На их основе могут определяться все числовые характеристики случайной величины, а также могут вычисляться вероятности $P\{\xi(t_1) \in \Omega\}$ нахождения случайной величины $\xi(t_1)$ в области заданных значений Ω

В этом определении значение $P(\xi(t_1) \le \xi)$ характеризует вероятность события $\xi(t_1) \le \xi$. Основные свойства и взаимосвязь таких функций $F(\xi; t_1)$ и $p(\xi; t_1)$ показаны на схеме 1.2.3.

Функция распределения $F(\xi; t_1)$ и плотность вероятностей $p(\xi; t_1)$ однозначно связаны между собой и поэтому оба способа описания случайной величины $\xi(t_1)$ формально являются равноценными.

Переходя к более общей ситуации, можно на интервале наблюдения $[t_0, t_0 + T]$ выбрать два различных момента времени $t_1, t_2 \in T$ и полученные при этом случайные величины $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ характеризовать двумерной функцией распределения

$$F_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) \le \xi_1, \xi(t_2) \le \xi_2\}$$

или двумерной плотностью вероятностей

$$p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} F_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2).$$

В целом на основе такого подхода можно считать случайный процесс $\{\xi(t),\ t \in T\}$ заданным, если при произвольно выбранной на интервале наблюдения $[t_0, t_0 + T]$ последовательности моментов времени t_i, $i = 1, 2, ..., n$, для семейства случайных величин $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ..., $\xi(t_n)$ определена совместная функция распределения

$$F_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n; t_1, t_2, ..., t_n) = P\{\xi(t_1) \le \xi_1, \xi(t_2) \le \xi_2, ..., \xi(t_n) \le \xi_n\}$$

или совместная плотность вероятностей

$$p_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n; t_1, t_2, ..., t_n).$$

Такое семейство распределений для различных значений t_i, $i = 1, 2, ..., n$ называется семейством конечномерных распределений. Важной особенностью совместных распределений является то, что помимо вероятностного описания случайных величин $\xi(t_i)$, $i = \overline{1, n}$, функции $F_n(...)$ и $p_n(...)$ содержат полезную информацию и о взаимосвязи между значениями $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ..., $\xi(t_n)$.

• • • Описание случайных функций на основе семейства конечномерных распределений относится к одному из основных способов вероятностного описания и случайных процессов, и случайных последовательностей. При использовании такого подхода в прикладных задачах выбор размерности n зависит от требуемой полноты описания исследуемых процессов и от сложности явных выражений для семейства функций $F_n(...)$ и $p_n(...)$.

2. Нахождение многомерных распределений, вообще говоря, является достаточно сложной задачей, и поэтому целесообразно выделить здесь одну из распространенных ситуаций, в которой вероятностное описание случайных функций существенно упрощается.

Предположим, что исследуется некоторая последовательность случайных величин $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ..., $\xi(t_n)$ и значения этой последовательности $\xi(t_i)$ и $\xi(t_j)$ при любых $i, j \le n$, $i \ne j$ обладают свойством взаимной статистической независимости. Если при этом $p(\xi; t_i)$ – одномерная плотность вероятностей для $\xi(t_i)$, то на основе свойства независимости, для произвольной совокупности случайных величин $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ..., $\xi(t_m)$, $m \le n$ можно определить совместную плотность вероятностей:

$$p_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; t_1, t_2, \ldots, t_m) = p(\xi; t_1) \cdot p(\xi; t_2) \cdot \ldots \cdot p(\xi; t_m) = \prod_{i=1}^{m} p(\xi; t_i).$$

Если, помимо этого, функции $p(\xi; t_i)$ одинаковы при любых $i = \overline{1, m}$, то

$$p(\xi; t_i) = p(\xi), \qquad p_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \prod_{i=1}^{m} p(\xi; t_i) = [\, p(\xi)\,]^m.$$

Описание последовательности $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ..., $\xi(t_n)$ в данном случае эквивалентно описанию последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n. Для их вероятностного анализа в подобных ситуациях достаточно знать лишь одномерную плотность вероятностей $p(\xi; t_i) = p(\xi)$, по которой может быть определена и многомерная плотность вероятностей.

• • • К изучению подобного класса моделей относится подавляющее большинство результатов классической теории вероятностей и математической статистики [28, 71, 128]. Очень часто и в задачах обработки информационных процессов (с целью упрощения исследований) делается специальное допущение о независимости обрабатываемых наблюдений $\xi(t_1)$, $\xi(t_1)$, ..., $\xi(t_n)$.

3. Основные числовые характеристики

Наиболее полное вероятностное описание случайных процессов и случайных последовательностей дается семейством конечномерных распределений. Экспериментальные определения таких функций не всегда легко выполняются, а во многих практических задачах и не требуется полного вероятностного описания исследуемых процессов. Как правило, в таких задачах достаточным является знание лишь отдельных числовых характеристик распределений или отдельных свойств изучаемых процессов.

1. Для описания характерных свойств распределений обычно используются моментные функции. По определению все моментные функции делятся на начальные и центральные. В зависимости от размерности к наиболее распространенным на практике относятся одномерные и двумерные моментные функции. Общее определение таких функций приведено на схеме 1.2.4.

Особое значение среди моментных функций имеют

$$m_1 = M\left\{\, \xi(t_1) \,\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t_1)\, p(\xi; t_1)\, d\xi = m_\xi(t_1)$$

$$m_2^\circ = M\left\{ \left[\, \xi(t_1) - m_\xi(t_1) \,\right]^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\, \xi(t_1) - m_\xi(t_1) \,\right]^2 p(\xi; t_1)\, d\xi = \sigma_\xi^2(t_1)$$

$$m_{11}^\circ(t_1, t_2) = M\{[\xi(t_1) - m_\xi(t_1)]\cdot[\xi(t_2) - m_\xi(t_2)]\} = R_\xi(t_1, t_2).$$

Схема 1.2.4

Общее определение наиболее важных для практики моментных функций

- Основными числовыми характеристиками распределений являются моментные функции. В практических задачах наиболее часто используются одномерные и двумерные моментные функции

- Определение одномерных моментных функций

$$m_\nu(t_1) = M\left\{\xi^\nu(t_1)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^\nu(t_1)\; p(\xi; t_1)\, d\xi$$

$$m^\circ_\nu(t_1) = M\left\{\left[\xi(t_1) - m_1(t_1)\right]^\nu\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\xi(t_1) - m_1(t_1)\right]^\nu p(\xi; t_1)\, d\xi$$

- Определение двумерных моментных функций

$$m_{\nu_1\nu_2}(t_1, t_2) = M\left\{\xi^{\nu_1}(t_1)\,\xi^{\nu_2}(t_2)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \xi_1^{\nu_1}\xi_2^{\nu_2}\; p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

$$m^\circ_{\nu_1\nu_2}(t_1, t_2) = M\left\{\left[\xi(t_1) - m_1(t_1)\right]^{\nu_1}\left[\xi(t_2) - m_1(t_2)\right]^{\nu_2}\right\} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\xi_1 - m_1(t_1)\right]^{\nu_1}\left[\xi_2 - m_1(t_2)\right]^{\nu_2} p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

- Моментные функции m_ν и $m_{\nu_1\nu_2}$ вычисляются непосредственно для случайных величин $\xi_1 = \xi(t_1)$ и $\xi_2 = \xi(t_2)$. Называются такие функции *начальными моментными функциями*

- Моментные функции m°_ν и $m^\circ_{\nu_1\nu_2}$ вычисляются для центрированных случайных величин, т. е. для отклонений ξ_1 и ξ_2 от их средних значений $m_1(t_1)$ и $m_1(t_2)$. В соответствии с этим, функции m°_ν и $m^\circ_{\nu_1\nu_2}$ называются *центральными моментными функциями*.

- Значение ν называется порядком моментной функции. Для двумерных функций значение $\nu = \nu_1 + \nu_2$

- Оператор $M\{x\}$ отражает операцию вычисления математического ожидания случайной величины x, т. е. показывает, что все моментные функции определяются на основе вероятностного усреднения

Обычно для записанных характеристик используются специальные обозначения m_ξ, σ^2_ξ, $R_\xi(t_1, t_2)$, и, кроме того, важно, что эти функции имеют простую и наглядную физическую интерпретацию.

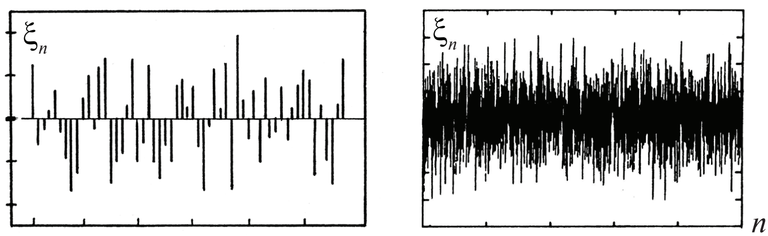
Функция $m_1 = m_\xi(t_1)$ характеризует среднее значение исследуемой случайной величины $\xi(t_1)$ и называется математическим ожиданием. Моментная функция $m^\circ_2 = \sigma^2_\xi(t_1)$ соответствует дисперсии и характеризует степень рассеяния значений случайной величины $\xi(t_1)$ относительно ее мате-

Схема 1.2.5

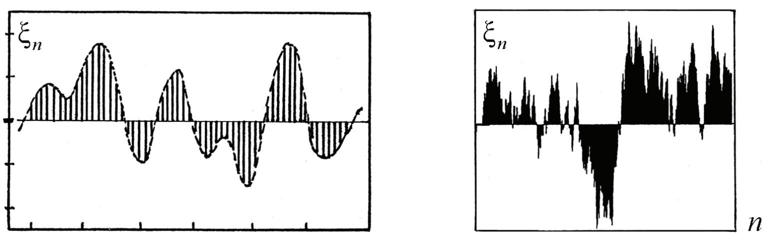
Статистическая независимость и взаимосвязь наблюдаемых данных

• Вероятностное описание и исследование случайных функций $\xi(t)$ наиболее просто выполняется при условии статистической независимости отдельных значений $\xi(t_1)$, $\xi(t_2)$, ..., $\xi(t_n)$

• На практике свойство статистической независимости для ξ_i и ξ_j при любых $j \neq i$ выполняется не всегда. Во многих задачах априорно известно, что наблюдаемые данные взаимосвязаны и по условиям задачи необходимо исследовать характер такой зависимости



Реализации двух различных случайных последовательностей со статистически независимыми значениями



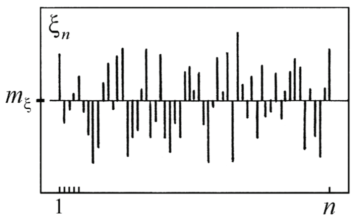
Случайные последовательности в данной ситуации порождены или управляются медленно изменяющимися процессами, и отдельные значения ξ_n не могут считаться здесь независимыми

Типовые примеры задач, решение которых основано на исследованиях взаимосвязи между наблюдаемыми данными:

- Задачи анализа динамики развития процессов и систем
- Задачи идентификации сложных систем
- Задачи прогноза и оптимального управления
- Задачи выделения информационных сигналов на фоне помех
- Задачи технической и медицинской диагностики
- Задачи компьютерного моделирования случайных процессов
- Задачи классификации сигналов и распознавания образов

Схема 1.2.6

Особенности корреляционных функций для случайных последовательностей

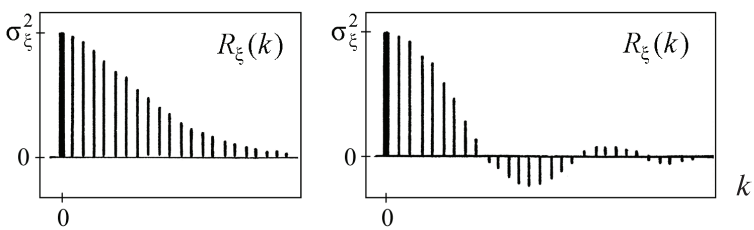


$\{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ – исследуемая непрерывная случайная последовательность

$p(\xi_i) = p(\xi)$ – плотность вероятностей одинакова при любых $i \le n$

- **Математическое ожидание** $$m_\xi = M\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi\, p(\xi)\, d\xi$$
- **Дисперсия** $$\sigma_\xi^2 = M\left\{(\xi - m_\xi)^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - m_\xi)^2\, p(\xi)\, d\xi$$
- **Корреляционная функция** $$R_\xi(t_i, t_j) = M\left\{[\xi_i - m_\xi][\xi_j - m_\xi]\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\xi_i - m_\xi)(\xi_j - m_\xi)\, p_2(\xi_i, \xi_j; t_i, t_j)\, d\xi_i\, d\xi_j$$

- Корреляционная функция $R_\xi(t_i, t_j) = R_\xi(k)$ характеризует линейную зависимость между значениями $\xi_i = \xi(t_i)$ и $\xi_j = \xi(t_j)$, $j = i + k$, разнесенными друг от друга на k интервалов времени ($k = 0, 1, 2, ...$)
- Во многих практических задачах корреляционная функция $R_\xi(k)$ имеет вид монотонно убывающей или колебательной затухающей функции



При $k = 0$ $\quad R_\xi(k) = R_\xi(0) = M\left\{(\xi_i - m_\xi)^2\right\} = \sigma_\xi^2$

При любых k $\quad R_\xi(k) \le R_\xi(0) = \sigma_\xi^2$

- Поскольку в определении случайной последовательности $\{\xi_n\} = \{\xi(t_n)\}$ параметр t_n, $n = 1, 2, ...$ – дискретный, функция $R_\xi(k)$ также имеет дискретный характер матического ожидания $m_\xi(t_1)$. Двумерная моментная функция $m_{11}^{\circ}(t_1, t_2) = R_\xi(t_1, t_2)$ называется корреляционной функцией и, в соответствии с ее определением, характеризует взаимосвязь между значениями $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$.

• • • Общее определение моментных функций (схема 1.2.4) показывает, что все основные характеристики распределений находятся путем вероятностного усреднения и записываются в виде математического ожидания $M\{...\}$ исследуемой случайной величины ξ или функции от ξ, или функции от нескольких случайных величин, например, от $\xi_1 = \xi(t_1)$ и $\xi_2 = \xi(t_2)$.

• • • Важной особенностью моментных функций является то, что наиболее интересную информацию об изучаемых процессах несут в себе моментные функции низких порядков $\nu = 1, 2, 3, 4$. С повышением порядка $\nu > 4$ усложняется вычисление моментных функций, существенно снижается точность вычислений и общая информативность. Именно этими особенностями и объясняются причины наибольшего распространения на практике моментных функций низких порядков $\nu \leq 4$.

2. Сложность исследований случайных процессов $\xi(t)$ и последовательностей ξ_n, $n = 1, 2, ...$ заметно снижается, если изучаемые значения $\xi(t_1), \xi(t_2), ..., \xi(t_n)$, или в более простой форме записи, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ обладают свойством независимости. Ясно, что выполняется это не всегда. Например, при анализе последовательностей ξ_n, $n = 1, 2, ...$, порожденных узкополосными непрерывными процессами $\xi(t)$, трудно предполагать, что любые значения $\xi_i = \xi(t_i)$ и $\xi_j = \xi(t_j)$ при любых $i \neq j$ независимы. Более того, во многих задачах априорно известно, что наблюдения ξ_n, $n = 1, 2, ...$ статистически взаимосвязаны, и характер этой связи важен сам по себе (схема 1.2.5).

При произвольной зависимости между ξ_i и ξ_j вероятностное описание случайной последовательности ξ_n, $n = 1, 2, ...$ является полным, если для любой совокупности случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$, $m \leq n$ может быть найдена совместная функция распределения $F_m(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m; t_1, t_2, ..., t_m)$ или совместная плотность вероятностей $p_m(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m; t_1, t_2, ..., t_m)$. Сложность подобного описания обычно связана со сложностью функций $F_m(...)$ и $p_m(...)$ при размерностях $m \geq 2$.

Если при анализе последовательностей ξ_n, $n = 1, 2, ...$ ограничиться лишь рассмотрением линейных взаимосвязей между различными значениями ξ_i и ξ_j, $i \neq j$, то весь анализ может быть выполнен в рамках корреляционной теории случайных функций [15, 129, 152]. На схеме 1.2.6 показаны особенности определения, основные свойства и характерный вид корреляционной функции для непрерывных случайных последовательностей.

1.3. Случайные непрерывные процессы

Большая часть результатов прикладной теории выбросов связана с исследованиями временной структуры непрерывных случайных процессов. К необходимости рассмотрения непрерывных процессов приводят самые разнообразные практические задачи. Обычно в подобных задачах исследуется поведение динамических систем, структура информационных процессов, сигналов, помех или каких-либо экспериментальных данных, непрерывно изменяющихся во времени. Для описания таких процессов и данных используется самостоятельный класс случайных функций — класс непрерывных случайных процессов.

Выделим здесь некоторые характерные особенности и основные вероятностные свойства, которые влияют на общее определение, описание и анализ детальной вероятностной структуры непрерывных случайных процессов [138].

1. Общее определение непрерывных процессов

По своей физической природе многие реальные процессы порождаются изменениями во времени каких-либо параметров или изменениями состояния исследуемой системы. Такими параметрами могут быть, например, параметры окружающей среды — изменения температуры, давления, влажности, скорости ветра, освещенности в какой-либо выбранной точке наблюдения. Это могут быть изменения уровня биопотенциалов при исследованиях электрической активности головного мозга, изменения амплитуды, фазы или частоты акустических, механических, сейсмических или электрических колебаний. Примерами могут быть вибрации ракетного двигателя и вибрации космического аппарата, процессы морского волнения и качка корабля, изменения интенсивности оптического излучения в лазерных системах локации и колебательные процессы в биоритмологии.

Как правило, перечисленные параметры, процессы и состояния сложных динамических систем непрерывно изменяются во времени и во многих практических задачах описываются моделями непрерывных случайных процессов. При формализованном подходе к определению таких процессов можно воспользоваться общей классификацией случайных функций (п. 1.1) и налагая определенные ограничения на пространство параметров S и пространство состояний X, можно выделить из общего определения случайных функций $\{\xi(s),\ x \in X,\ s \in S\}$ самостоятельный класс непрерывных случайных процессов (схема 1.3.1).

2. Особенности вероятностного описания

Основные методы вероятностного описания случайных процессов $\{\xi(t)\}$ по своему содержанию во многом близки к методам описания случайных величин и случайных последовательностей $\{\xi_n\}$. Формально случайный процесс $\{\xi(t),\ t \in T\}$ определяется как семейство случайных переменных – реализаций $\xi(t)$, $t \in T$. Если на интервале наблюдения $[t_0, t_0 + T]$ выбрать некоторый произвольный момент времени $t = t_1$, то значение $\xi(t_1)$ будет эквивалентно значению случайной величины. Полное вероятностное описание такой величины, по аналогии с п. 1.2, может быть выпол-

Схема 1.3.1

Формализованное определение непрерывных случайных процессов

- **Общее определение случайной функции** $\{\xi(s), \xi \in X, s \in S\}$ – семейство случайных переменных $\xi(s)$

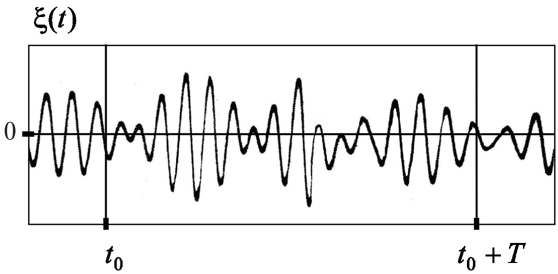
Если в этом определении:

- пространство состояний X – непрерывное,
- параметр $t = s$ – время,
- пространство параметров $S = T$ – непрерывное, например $T = \{t, t \in (0, \infty)\}$ или $T = \{t, t \in [t_0, t_0 + T]\}$,

то случайная функция

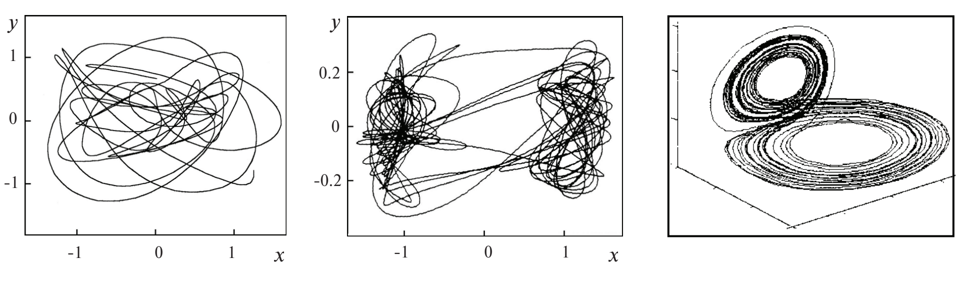
$\{\xi(s), \xi \in X, s \in S\} = \{\xi(t), t \in T\}$

называется непрерывным случайным процессом



- **Отдельная функция** $\xi(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ из семейства $\xi(t)$, $t \in T$ называется реализацией, траекторией или выборочной функцией случайного процесса

- Если в данном определении считать, что пространство состояний X – непрерывное векторное пространство, то это будет соответствовать определению **непрерывного векторного случайного процесса**



- **Характерный вид отдельных траекторий двумерных и трехмерных векторных непрерывных случайных процессов** нено на основе функции распределения $F(\xi;\, t_1)$ или функции плотности вероятностей $p(\xi;\, t_1)$:

$$F(\xi; t_1) = P\left\{ \xi(t_1) \le \xi \right\}, \qquad p(\xi; t_1) = \frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi; t_1). \tag{1.3.1}$$

Основные свойства и взаимосвязь таких функций были рассмотрены в п. 1.2 и показаны на схеме 1.2.3.

Одномерные распределения (1) позволяют описывать вероятностные свойства случайных процессов $\{\xi(t)\}$ в отдельные, фиксированные моменты времени. Для более полного описания исследуемых процессов можно выбрать два произвольных момента времени t_1 и t_2 и для описания полученных при этом случайных величин $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ воспользоваться двумерной функцией распределения или двумерной плотностью вероятностей:

$$F_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) < \xi_1, \xi(t_2) < \xi_2\},$$
$$p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1\, \partial \xi_2} F_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2). \tag{1.3.2}$$

Такое описание является более полным. Двумерные распределения (2) содержат информацию о совместном вероятностном поведении случайных величин $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$, они позволяют характеризовать взаимосвязь между значениями случайного процесса в два момента времени $t_1, t_2 \in T$ и позволяют исследовать динамику развития процесса.

В более общей ситуации можно выбрать n различных моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и для значений случайного процесса $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$ рассмотреть совместную функцию распределения

$$F_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P\{\xi(t_1) \le \xi_1, \xi(t_2) \le \xi_2, \ldots, \xi(t_n) \le \xi_n\} \tag{1.3.3}$$

или совместную плотность вероятностей

$$p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) =$$
$$= \frac{\partial^n}{\partial \xi_1\, \partial \xi_2 \ldots \partial \xi_n} F_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) \tag{1.3.4}$$

Таким образом, случайный процесс $\{\xi(t)\}$ в общем случае описывается n-мерными распределениями (3) и (4). Эти распределения содержат полную информацию о вероятностных свойствах рассматриваемого процесса в произвольно выбранные моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$, а также позволяют исследовать вероятностные взаимосвязи между значениями процесса $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$.

• • • В целом, необходимо отметить, что определения плотностей вероятностей $p_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;\, t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и функций распределения $F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n)$ для значений $\xi(t_i)$, $i = \overline{1, n}$, непрерывного случайного процесса $\{\xi(t),\ t < T\}$ при любых размерностях n по своему смыслу полностью аналогичны соответствующим вероятностным распределениям для совокупности n случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ при описании случайных последовательностей $\{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$.

3. Основные числовые характеристики процессов

Как и при описании случайных последовательностей (разд. 1.2), в качестве основных числовых характеристик для случайных процессов обычно используются моментные функции. Моментные функции (схема 1.2.5) делятся на начальные и центральные, одномерные и многомерные.

Среди одномерных характеристик в решении практических задач наиболее важными являются математическое ожидание и дисперсия случайного процесса, а также коэффициенты асимметрии и эксцесса одномерного распределения. При рассмотрении двумерных вероятностных характеристик особую роль играет двумерная центральная моментная функция второго порядка. По определению эта функция соответствует корреляционной функции случайного процесса.

Приведем здесь основные определения для перечисленных характеристик и выделим особенности их практического использования при исследовании случайных процессов.

В подавляющем большинстве практических задач, уже на предварительных этапах анализа, предполагается нахождение математического ожидания $m_\xi(t)$ и дисперсии $\sigma_\xi^2(t)$ для исследуемых случайных процессов:

$$m_\xi(t) = m_1(t) = M\{\,\xi(t)\,\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)\ p(\xi;t)\,d\xi,$$

$$\sigma_\xi^2(t) = m_2^\circ(t) = M\left\{\left[\,\xi(t) - m_\xi(t)\,\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\,\xi(t) - m_\xi(t)\,\right]^2 p(\xi;t)\,d\xi. \qquad (1.3.5)$$

Эти характеристики дают возможность определить, соответственно, среднее значение процесса $\xi(t)$ и меру разброса или рассеяния значений $\xi(t)$ относительно среднего. Они могут также интерпретироваться как параметр расположения $m_\xi(t)$ и параметр масштаба $\sigma_\xi^2(t)$ для плотности вероятностей $p(\xi;\ t)$ исследуемого процесса $\xi(t)$.

Коэффициенты асимметрии γ_1 и эксцесса γ_2 определяются через центральные моментные функции $m_\nu^\circ(t)$ порядка $\nu = 3$ и $\nu = 4$:

$$\gamma_1 = \gamma_1(t) = \frac{m_3^\circ(t)}{\sigma_\xi^3(t)}, \qquad \gamma_2 = \gamma_2(t) = \frac{m_4^\circ(t)}{\sigma_\xi^4(t)} - 3,$$

$$m_\nu^\circ(t) = M\left\{\left[\,\xi(t) - m_\xi(t)\,\right]^\nu\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\,\xi(t) - m_\xi(t)\,\right]^\nu p(\xi;t)\,d\xi. \qquad (1.3.6)$$

Эти коэффициенты относятся к параметрам формы одномерного распределения и позволяют количественно характеризовать асимметрию и степень сглаженности вершины (или эксцесс) функции плотности вероятностей $p(\xi; t)$.

Записанные определения (5) и (6) показывают, что основные характеристики $m_\xi(t)$, $\sigma_\xi^2(t)$, γ_1 и γ_2, вообще говоря, являются функциями времени и при изменениях t могут изменяться.

Общее определение корреляционной функции случайного процесса $\xi(t)$ записывается в виде

$$R_\xi(t_1, t_2) = \overset{\circ}{m}_{11}(t_1, t_2) = M\left\{ \left[\xi(t_1) - m_\xi(t_1) \right]\left[\xi(t_2) - m_\xi(t_2) \right]\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\xi_1 - m_\xi(t_1) \right]\left[\xi_2 - m_\xi(t_2) \right] p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) d\xi_1 d\xi_2 \qquad (1.3.7)$$

Эта функция зависит от выбранных моментов времени t_1 и t_2, и характеризует линейную взаимосвязь между двумя значениями $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ исследуемого процесса.

• • • Приведенные числовые характеристики (5) – (7) для случайных процессов $\xi(t)$ привлекают своей простотой и физической наглядностью. По сравнению с семейством конечномерных распределений (1)–(4) они значительно проще определяются при экспериментальных исследованиях, и обладают высокой информативностью. Для многих практических задач вероятностное описание исследуемых процессов $\xi(t)$ на уровне отдельных числовых характеристик (5)–(7) оказывается достаточным.

4. Свойство стационарности случайных процессов

При рассмотрении случайных процессов прежде всего полезно выделить некоторые общие свойства, которые влияют и на вероятностную структуру процессов, и на выбор методов исследования. К одному из таких общих свойств относится свойство стационарности случайного процесса.

- **Определение строгой стационарности**

Вероятностные характеристики случайного процесса $\xi(t)$ в общем случае зависят от времени. Это относится к функциям распределения и плотностям вероятностей (1) – (4), числовым характеристикам (5)–(6) и корреляционным функциям (7). Однако во многих практических задачах при анализе информативных процессов видно, что структура этих процессов обладает свойством некоторой однородности, их отдельные реализации ведут себя более или менее одинаковым образом на различных временных интервалах. Если рассматривать отдельные реализации $\xi(t)$, $t \in T$ таких процессов $\xi(t)$, то можно заметить, что они обладают свойством стационарности, и их вероятностная структура инвариантна к временным сдвигам. Характер подобной инвариантности может быть при этом различным, и именно поэтому существуют различные определения стационарности [26, 72, 152].

Схема 1.3.2

Стационарные случайные процессы

- Основные вероятностные характеристики стационарного процесса остаются постоянными на интервале наблюдения. Структура таких процессов инвариантна относительно временных сдвигов
- **Определение строгой стационарности**

$\{\xi(t),\ t \in T\}$ – исследуемый случайный процесс

Полное вероятностное описание
$p_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n; t_1, t_2, ..., t_n)$ – все n-мерные распределения зависят от выбранных моментов времени $t_1, t_2, ..., t_n$
Если при любых $t_i,\ i \in \overline{1, n}$,
$p_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n; t_1, t_2, ..., t_n) = p_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, ..., t_n + \tau)$,
то исследуемый процесс называется строго стационарным или стационарным в узком смысле

Это свойство означает, что случайные процессы $\xi(t)$ и $\xi(t+\tau)$ при любых временных сдвигах τ являются эквивалентными, т. е. все вероятностные характеристики этих процессов одинаковы и не зависят от τ

- **Определение стационарности в широком смысле**

$\{\xi(t),\ t \in T\}$ – исследуемый случайный процесс

Если $m_\xi(t) = M\{\xi(t)\} = m_\xi = const$

$$R_\xi(t_1, t_2) = M\{[\xi(t_1) - m_\xi][\xi(t_2) - m_\xi]\} =$$
$$= M\{[\xi(t) - m_\xi][\xi(t+\tau) - m_\xi]\} = R_\xi(\tau), \quad \tau = |t_2 - t_1|,$$

то рассматриваемый процесс стационарен в широком смысле

- Ограничения налагаются только на характер $m_\xi(t)$ и $R_\xi(t_1, t_2)$. Широкий класс процессов удовлетворяет таким требованиям
- Более жесткие требования ко всем вероятностным характеристикам. Более узкий класс случайных процессов удовлетворяет таким требованиям

Случайный процесс $\xi(t)$ называется строго стационарным или стационарным в узком смысле, если все его конечномерные распределения инвариантны относительно сдвигов по времени (схема 1.3.2). Это определение эквивалентно условию, что при произвольно выбранной последовательности моментов времени $t_1, t_2, ..., t_n$ совместное распределение случайных величин

$$\xi(t_1 + \tau), \xi(t_2 + \tau), ..., \xi(t_n + \tau)$$

не зависит от временного сдвига τ.

В свою очередь, конечномерными распределениями определяются все основные характеристики случайного процесса $\xi(t)$. Следовательно, для стационарного процесса $\xi(t)$ и процесса $\xi(t + \tau)$, независимо от τ, все характеристики будут совпадать. В частности, если рассмотреть одномерную функцию распределения $F(\xi; t_1)$ и функцию плотности вероятностей $p(\xi; t_1)$, то для строго стационарного процесса $\xi(t)$ можно записать

$$F(\xi; t_1) = F(\xi; t_1 - t_1) = F(\xi), \;\; p(\xi; t_1) = p(\xi; t_1 - t_1) = p(\xi). \qquad (1.3.8)$$

Это показывает, что одномерные распределения такого процесса не зависят от выбора момента времени, а следовательно, математическое ожидание и дисперсия

$$m_\xi = M\left\{ \xi(t) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(t)\, p(\xi)\, d\xi \;,$$

$$\sigma_\xi^2 = M\left\{ \left[\xi(t) - m_\xi \right]^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\xi(t) - m_\xi \right]^2 p(\xi)\, d\xi. \qquad (1.3.9)$$

строго стационарного процесса $\xi(t)$ не являются функциями времени и остаются постоянными на всем интервале анализа $t \in T$.

По аналогии с выражениями (8) можно рассмотреть особенности двумерной плотности вероятностей:

$$p_2(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = p_2(\xi_1, \xi_2; t_1 - t_1, t_2 - t_1) = p_2(\xi_1, \xi_2; \tau)$$
$$\tau = t_2 - t_1 \qquad (1.3.10)$$

и заметить, что эта функция для строго стационарных процессов $\xi(t)$ зависит не от выбранных моментов времени t_1 и t_2, а лишь от временного сдвига между ними, т. е. от разности значений $t_2 - t_1 = \tau$.

В свою очередь, такая особенность двумерных распределений позволяет записать корреляционную функцию (7) в виде:

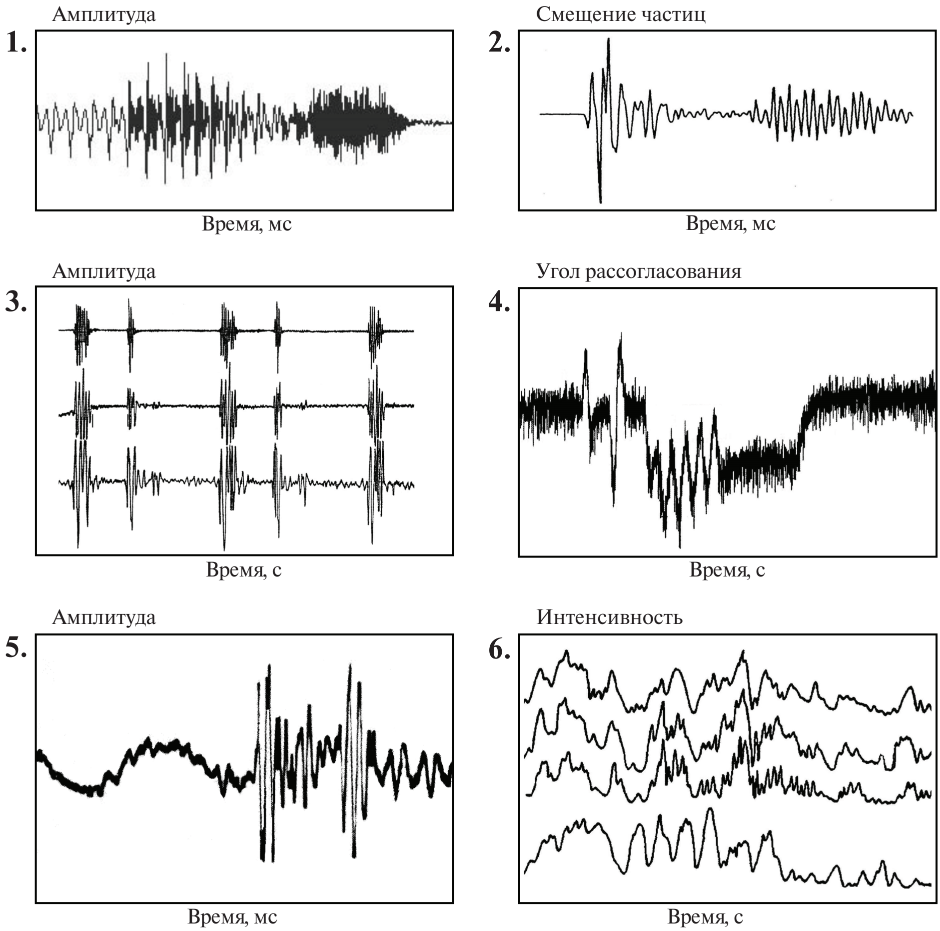
$$R_\xi(t_1, t_2) = \mathrm{M}\{[\xi(t_1) - m_\xi][\xi(t_2) - m_\xi]\} =$$
$$\mathrm{M}\{[\xi(t) - m_\xi][\xi(t+ \tau) - m_\xi]\} = R_\xi(\tau) \qquad (1.3.11)$$

откуда следует, что $R_\xi(t_1, t_2)$ для класса строго стационарных процессов является функцией только одного аргумента $\tau = t_2 - t_1$.

Схема 1.3.3

Примеры непрерывных случайных процессов, не обладающих свойством стационарности

- **Отдельные результаты экспериментальных исследований**



- **Приведенные реализации случайных функций характеризуются неоднородной структурой на различных участках и поэтому относятся к классу нестационарных**

1 – Пример выборочной функции речевого сигнала
2 – Сейсмическое колебание при глубинном зондировании мантии Земли
3 – Характерный вид фонокардиограммы в трех частотных диапазонах
4 – Угол рассогласования ротора гироскопа на этапе разгона
5 – Помеховое воздействие на исследуемую радиоприемную систему
6 – Изменения интенсивности звукового сигнала в гидроакустическом канале

• • • Выделенные свойства (8)–(11) существенно упрощают решение многих практических задач. Однако данное определение строгой стационарности (схема 1.3.2) налагает достаточно жесткие ограничения на семейство n-мерных распределений. Условиям строгой стационарности удовлетворяет сравнительно узкий класс случайных процессов, и поэтому такое определение часто называется определением стационарности в узком смысле.

- **Определение стационарности в широком смысле**

Далеко не всегда при исследованиях случайных процессов требуется находить многомерные распределения. Многие важные свойства случайных процессов могут быть рассмотрены на уровне одномерных и двумерных вероятностных распределений или на уровне корреляционной теории. Эти особенности приводят к необходимости введения более простого определения стационарности [26, 72, 152].

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и корреляционная функция инвариантны относительно сдвигов по времени (схема 1.3.2). По существу такое определение предполагает, что рассматриваемый процесс $\xi(t)$ имеет постоянное математическое ожидание m_ξ, которое не изменяется во времени, и корреляционную функцию $R_\xi(t_1, t_2) = R_\xi(\tau)$, которая зависит лишь от одного аргумента $\tau = t_2 - t_1$.

Ясно, что данное определение является более простым, и более широкий класс случайных процессов удовлетворяет таким условиям стационарности. Для стационарных в широком смысле процессов $\xi(t)$ выполняются все выделенные ранее свойства (8) – (11). Принципиально их можно рассматривать и как необходимые, и как достаточные условия стационарности для данного класса случайных процессов.

Для большей наглядности на схеме 1.3.3 показаны некоторые примеры случайных процессов, вероятностная структура которых изменяется на различных участках. Такие процессы не обладают свойством инвариантности к временным сдвигам и относятся к классу нестационарных.

• • • Условия стационарности процессов в широком смысле достаточно просто проверяются экспериментально. Стационарные процессы характерны для установившихся режимов работы исследуемых систем. При обработке стационарных случайных процессов выбор начального момента отсчета t_0 не влияет на результаты обработки. Стационарность исследуемых процессов важна на интервале наблюдения $[t_0, t_0 + T]$. Нет особого смысла требовать выполнения условий стационарности на всем интервале работы какой-либо сложной динамической системы.