Оглавление

От авторов

В ЕГЭ по математике профильного уровня во вторую часть контрольно-измерительных материалов (КИМ) включены задания, которые требуют развёрнутого ответа. Два из них традиционно геометрические (планиметрия и стереометрия), остальные пять, включая тригонометрические, можно считать алгебраическими. В этом пособии мы рассматриваем методы решения всех подобных задач повышенного и высокого уровней сложности.

В настоящее время ЕГЭ по математике проводится на двух уровнях — базовом и профильном. Для поступления в высшие учебные заведения на специальности, где требуется математика в качестве вступительного испытания, абитуриент должен сдать экзамен на профильном уровне. Для поступления на специальности, не связанные с математикой, а также для получения аттестата о среднем полном образовании достаточно сдать экзамен на базовом уровне.

Задания части 2 ЕГЭ предназначены для проверки знаний на том уровне требований, которые обычно предъявляются вузами к абитуриентам на профильном экзамене по математике. Последние три задания части 2 предназначены для отбора в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

Задания части 2 с развёрнутым ответом проверяют умения выполнять вычисления и преобразования, решать уравнения и неравенства, выполнять действия с функциями, с геометрическими фигурами, строить и исследовать математические модели.

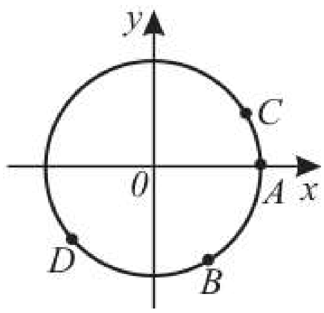
Статистические данные показывают, что обучение методам решения заданий с развёрнутым ответом должно быть обязательной частью подготовки к ЕГЭ как минимум трети выпускников, а знакомить с этими методами разумно хотя бы половину учащихся.

Известно, что при решении практически любой математической задачи приходится производить преобразование числовых, алгебраических или функциональных выражений, таким образом сводя её к более простой, способы решения которой нам известны и подчиняются неким стандартным (широко известным) алгоритмам. В первых разделах каждой части книги разбираются именно эти стандартные методы и простые задачи.

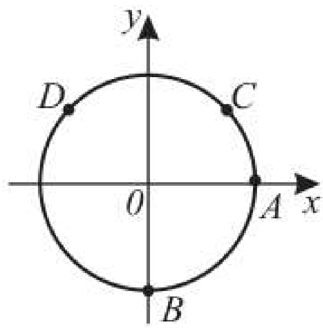
Задачи для самостоятельного решения

Найдите на числовой окружности точку, которая соответствует:

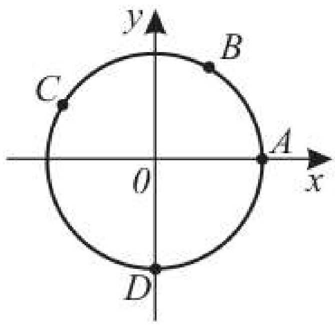
1. Числу $\frac{\pi}{6}$.



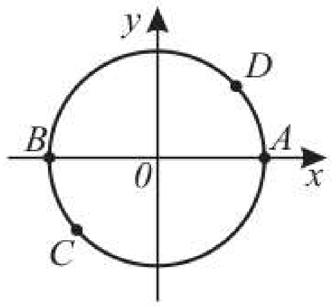
2. Числу $\frac{3\pi}{4}$.



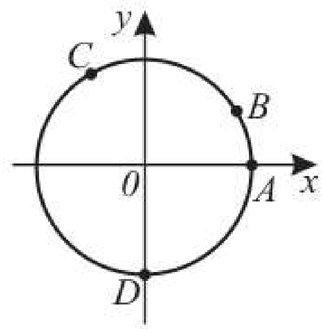
3. Числу $\frac{5\pi}{6}$.



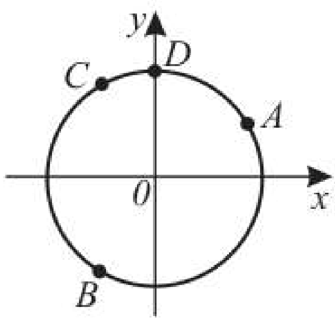
4. Числу $-\frac{7\pi}{4}$.



5. Числу $-\frac{11\pi}{6}$.

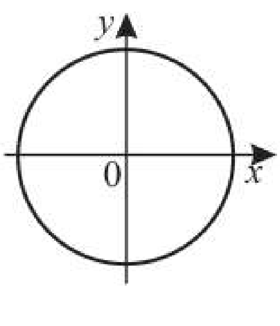


6. Числу $-\frac{2\pi}{3}$.

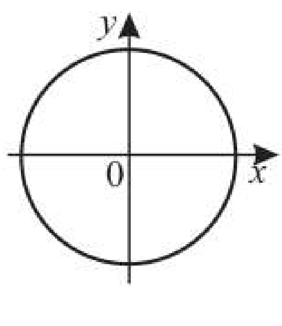


Укажите на числовой окружности точку, которая соответствует:

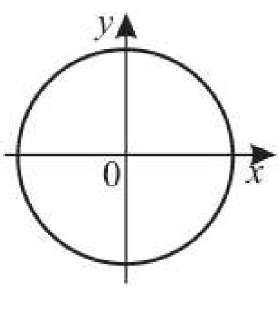
7. Числу $-\frac{2\pi}{3}$.



8. Числу $-\frac{4\pi}{3}$.



9. Числу $\frac{7\pi}{6}$.



$-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$, также изображается этой точкой. Отсюда следует, что множеством решений уравнения $\sin x = -1$ будет множество $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения. Ответ запишите в виде двух множеств

82. $\cos x=\frac{1}{2}$.

83. $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

84. $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

85. $\sin x=\frac{1}{2}$.

86. $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

87. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

88. $\cos x=-\frac{1}{2}$.

89. $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

90. $\sin x=-\frac{1}{2}$.

91. $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

92. $\cos x=0{,}6$.

93. $\cos x=-\frac{5}{7}$.

94. $\sin x=\frac{1}{3}$.

95. $\sin x=-\frac{1}{3}$.

96. $\sin x=-0{,}7$.

Решите уравнения. Ответ запишите в виде одного множества или укажите, что решений нет

97. $\cos x=1$.

98. $\cos x=-1$.

99. $\cos x=1{,}5$.

100. $\sin x=1$.

101. $\sin x=0$.

102. $\sin x=3$.

103. $\operatorname{tg} x=1$.

104. $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

105. $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$.

Глава III

Задания формата ЕГЭ

1. Методы отбора корней из заданного множества: геометрический, алгебраический, функциональный

Как правило, множество всех корней тригонометрического уравнения бесконечно. Однако множество его корней, содержащихся на заданном отрезке, интервале или полуинтервале, конечно, и их можно непосредственно найти.

Изображая числа заданного промежутка и корни уравнения точками единичной окружности, можно наглядно увидеть, какие корни уравнения содержатся в этом промежутке. Такой метод отбора корней называют **геометрическим**.

Во многих случаях множество корней тригонометрического уравнения задаётся некоторым алгебраическим выражением $f(n)$ от одной переменной $n \in Z$, а заданное множество — промежутком с концами a и b ($a < b$). Тогда, решая относительно n одно из четырёх неравенств $a(<, \leqslant)f(n)(<, \leqslant)b$, в зависимости от того, входят или не входят концы в заданный промежуток, находим, какие числа $f(n)$ содержатся в этом промежутке. Такой метод отбора корней называют **алгебраическим**.

Нередко формула корней тригонометрического уравнения представляет собой **линейную возрастающую** функцию $f(n)$ от одной переменной $n \in Z$, а промежуток является отрезком $[a; b]$, $a < b$. Тогда если 1) $f(0) \leqslant a$, то находим поочерёдно $f(1)$, $f(2)$, ... и определяем, какие из чисел $f(i)$ $(i \in N \cup 0)$ удовлетворяют неравенству $a \leqslant f(i) \leqslant b$. Если же 2) $a < f(0) \leqslant b$, то находим поочерёдно $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(-1)$, $f(-2)$, $\ldots$ и определяем, какие из чисел $f(i)$ $(i \in Z)$ удовлетворяют неравенству $a \leqslant f(i) \leqslant b$. Наконец, если 3) $b < f(0)$, то во множестве чисел $f(-1)$, $f(-2)$, ... находим такие числа $f(-i)$ $(i \in N)$, что $a \leqslant f(-i) \leqslant b$. Такой метод отбора корней называют **функциональным**.

Геометрический метод

28. Найдите все значения x из множества $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Запишем множество $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$ в виде двух множеств: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$; $x_2 = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$. Отметим на единичной окружности точками значения x_1 и x_2. Так как разность между соседними значениями чисел из этих множеств равна 2π, то на окружности будут всего лишь две точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{6}$ и $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

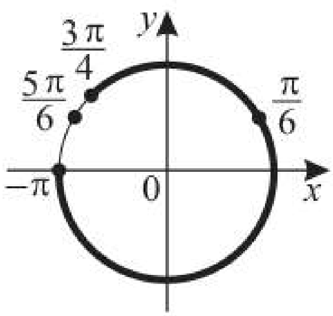


Рис. 11

Глава IV

Основные способы решения неравенств

1. Сведение неравенств различного вида к простейшим

Многие неравенства можно свести к элементарным, производя равносильные преобразования. Напомним, равносильные преобразования неравенства — такие преобразования, при которых множество решений неравенства не изменяется. Вспомним некоторые правила равносильных преобразований неравенств.

Правило 1: В неравенстве слагаемые можно перенести из одной части неравенства в другую часть со сменой знака, при этом знак самого неравенства не меняется (например, если был знак «меньше», то так и останется «меньше»).

Правило 2: Обе части неравенства можно умножить (разделить) на положительное число, при этом знак неравенства не меняется.

Правило 3: Обе части неравенства можно умножить (разделить) на отрицательное число, при этом знак неравенства меняется на противоположный (например, если был знак «меньше», то станет «больше»).

Заметим, что правилами 2 и 3 можно пользоваться и при умножении (делении) на выражение, знак которого не зависит от значе-

Глава VI

Дискретные модели

1. Простые экономические задачи. Проценты, доли и соотношения

Некоторые задачи удобно решать с помощью дискретных математических моделей, то есть моделей, переменные в которых могут принимать некоторое, практически всегда конечное число наперёд известных значений. В этой главе мы будем решать задачи, используя построение дискретной математической модели. В следующей главе будут рассмотрены непрерывные модели, то есть модели, в которых исследуются непрерывные функции и их свойства, в том числе с помощью производной.

Чтобы решать содержательные экономические задачи, необходимо уверенно осуществлять различные операции с процентами — находить процент от числа, число по его процентам, а также величину и изменение величины в процентах. Рассмотрим некоторые рекомендации, позволяющие легче решать экономические задачи.

При решении задач на анализ динамики экономических показателей всегда устанавливайте взаимно однозначное соответствие между процентами и коэффициентами. Выражение «величина A изменилась (увеличилась или уменьшилась) на x процентов» нужно воспринимать как «величина A умножилась на коэффициент k» и наоборот. В общем виде соответствие между количеством процентов x, на которое изменилось исходное значение экономического показателя, и коэффициентом k, на который он

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Задачи с параметром допускают несколько методов решения. Самыми распространёнными из них являются:

- алгебраический метод решения;
- метод решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;
- функциональный (аналитический) метод, в котором могут быть и геометрические, и алгебраические элементы, но необходимой частью решения является исследование и применение свойств некоторой функции.

Глава VIII

Алгебраический метод решения

Под алгебраическими методами будем понимать методы решения задач, которые не требуют применения аппарата математического анализа и построения графиков, а также применения свойств функций, кроме элементарных. Как правило, для решения задач этого раздела мы будем пользоваться стандартными алгебраическими преобразованиями и осуществлять не слишком сложный логический перебор.

1. Алгебраические выражения и параметр как переменная

Разберём несколько задач, где параметр выступает в роли переменной. Необходимость в умении решать такие задачи часто наступает на последних этапах решения задания с параметром.

157. При каком значении параметра a значение выражения $\dfrac{\sqrt{9}\cdot\sqrt[3]{3a}}{\sqrt[3]{120}}$ равно 1,5?

Решение. Упростим данное выражение:

$$\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt[3]{3a}}{\sqrt[3]{120}} = 3\cdot\sqrt[3]{\frac{3a}{120}} = 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{40}}.$$

Глава IX

Графический метод решения

1. Построение графиков уравнений

Некоторые задания с параметром удобно решать, представив условие в графическом виде. Для этого нужно уметь строить графики уравнений и семейства кривых, зависящих от параметра.

Построение графиков функций «механическими» преобразованиями

График функции $y = -f(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox (см. рис. 74).

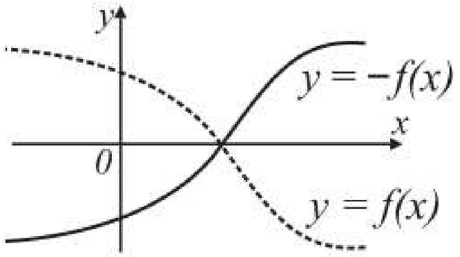


Рис. 74

График функции $y = f(-x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy (см. рис. 75, с. 257).

График функции $y = m \cdot f(x)$, $m > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в m раз вдоль оси Oy от оси Ox (см. рис. 76, с. 257).

Глава XI

Логика и делимость

1. Вводные задачи

В данной главе читателю предлагается проявить такие нужные при решении олимпиадных задач качества, как смекалка и сообразительность. Большинство задач не требует какой-либо специальной подготовки и доступно школьникам, оценивающим свой уровень как весьма скромный.

274. Запишите число 100, используя все 10 цифр и знаки некоторых арифметических действий.

Решение. $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 100$.

275. У пиратов в ходу монеты в один, два и пять пиастров. В кармане у Капитана Флинта 13 пиастров. Сколько монет может быть у него в кармане, если известно, что там есть монеты всех типов? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

Решение. Так как у Флинта есть монеты всех типов, то точно есть 3 монеты с суммой $1 + 2 + 5 = 8$ пиастров. Оставшиеся 5 пиастров могут быть одной монетой, или 2 монетами по 2 пиастра и одной в 1 пиастр, или одной монетой в 2 пиастра и 3 по 1 пиастру, или 5 монетами по 1 пиастру. Всего 4, 6, 7 или 8 монет.

Ответ: 4, 6, 7 или 8.

276. Вычислите: $99 - 97 + 95 - 93 + \ldots + 7 - 5 + 3 - 1$.

Решение. $99-97+95-93+\ldots+7-5+3-1 = (99-97)+(95-93)+$
$+\ldots+(7-5)+(3-1) = 2+2+\ldots+2 = 2\cdot 25 = 50.$
От нуля до 99 нечётных чисел 50, значит, пар с одинаковой разностью 25.

Ответ: 50.

277. Можно ли число 2006 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы и произведение всех этих чисел тоже было равно 2006?

Решение. Можно. Например, так: $2006 = 1003 \cdot 2 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{1001} =$
$= 1003 + 2 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{1001}.$

278. Решите ребус $ABBB + A + B = CDDB$. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные.

Решение. Из того, что числа $ABBB$ и $CDDB$ оканчиваются на одинаковую цифру, следует, что $A + B$ оканчивается на 0, т. е. $A + B = 10$, $ABBB + 10 = CDDB$. Заметим теперь, что первые цифры у чисел $ABBB$ и $CDDB$ различны, откуда следует, что был переход через тысячу. Но это возможно только в том случае, когда $B = 9$. Откуда $A = 1$, тогда $C = 2$, $D = 0$.

Ответ: $1999 + 1 + 9 = 2009$.

279. В коробке лежат 100 шаров трёх разных цветов — синего, белого и зелёного. Какое минимальное количество шаров надо не глядя вынуть из коробки, чтобы среди них наверняка было тридцать шаров одного цвета?

Решение. Если вытянуть не глядя 87 шаров, то все они могут оказаться трёх разных цветов (по 29 шаров каждого цвета). Но тогда 88-й вытянутый шар будет либо синим, либо белым, либо зелёным — в любом случае образуются 30 шаров одного цвета.

Ответ: 88.

280. Можно ли найти пять чисел, отличных от нуля, таких, что их произведение не изменится при увеличении каждого из чисел на 1?

Решение. Да, можно взять, например, следующие числа: 4, 5, 6, 7, -2.
$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (-2) = -1680 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot (-1)$.

Глава XII

Методы, связанные с оценкой выражений

1. Последовательности и прогрессии

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом. Это число называют *разностью арифметической прогрессии* и обычно обозначают буквой d.

- Если a_n есть n-й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, то
$$d = a_{n+1} - a_n, \qquad a_n = a_1 + d(n-1),$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

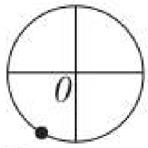
- При решении практических задач часто требуется формула
$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

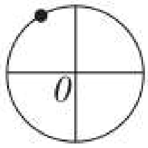
- Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

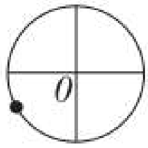
Ответы и подсказки

Часть I. Методы решения тригонометрических уравнений

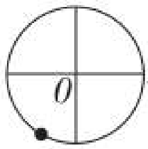
Изображение чисел на единичной окружности

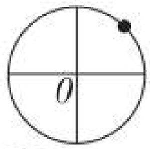
1. C. **2.** D. **3.** C. **4.** D. **5.** B. **6.** B. **7.** 

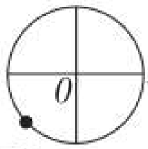
. **8.** 

. **9.** 

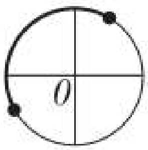
.

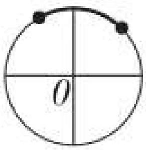
10. 

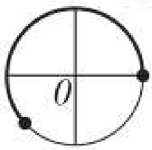
. **11.** 

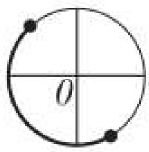
. **12.** 

. **13.** 1. **14.** 3. **15.** 3. **16.** 2.

17. 

. **18.** 

. **19.** 

. **20.** 

.

Синус, косинус, тангенс и котангенс

21. $\frac{1}{2}$. **22.** $\frac{1}{2}$. **23.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **24.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **25.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **27.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **28.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **29.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

30. $-\frac{1}{2}$. **31.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **32.** $\frac{1}{2}$. **33.** 1. **34.** 1. **35.** $\sqrt{3}$. **36.** $\sqrt{3}$. **37.** -1. **38.** $\sqrt{3}$.

39. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **40.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **41.** $\frac{1}{2}$. **42.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **43.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **44.** -1. **45.** 1. **46.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

47. $-\sqrt{3}$. **48.** $-\sqrt{3}$. **49.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **50.** $\sqrt{3}$. **51.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **52.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **53.** 0. **54.** $\frac{1}{2}$. **55.** $\frac{1}{2}$.