Оглавление

Предисловие научного редактора

В настоящее время рынок предлагает большое количество различных учебных пособий по микроэкономике, учитывающих разнообразные запросы тех, кто планирует использовать их как в преподавании этой дисциплины, так и при обучении навыкам экономического анализа. Вместе с тем важнейшим этапом освоения таких навыков является самостоятельный анализ пусть сначала простых, стилизованных экономических ситуаций, решение задач различной сложности. Однако пособий, призванных помочь в приобретении соответствующих компетенций, сегодня явно недостаточно.

Предлагаемое учебное пособие призвано заполнить (хотя бы частично) этот пробел. Оно представляет собой сборник задач, охватывающих все основные разделы учебного курса «Микроэкономика», как он сложился к настоящему времени и читается прежде всего на экономических факультетах университетов: теория потребителя, теория производителя, общее экономическое равновесие, экономика благосостояния, выбор в условиях неопределенности, фиаско рынка в случае экстерналий, общественных благ и асимметрии информации.

В этом пособии обобщен многолетний опыт преподавания авторами микроэкономики в бакалавриате и магистратуре экономического факультета ГУ ВШЭ, организации семинарских занятий по этой дисциплине, уделено особое внимание типичным ошибкам и трудностям, с которыми сталкиваются студенты при освоении навыков микроэкономического анализа. Характерная особенность пособия — тщательный подбор ситуаций, способствующих лучшему пониманию основных постулатов и методов микроэкономической теории, а также подробное решение каждой из предложенных авторами задач.

Пособие содержит задачи различного уровня сложности — от типовых вычислительных до сложных теоретических задач, требующих уверенного владения микроэкономическим аппаратом. Разнообразие предлагаемого материала позволяет использовать его в рамках как бакалаврских, так и магистерских курсов микроэкономики.

Считаю, что пособие будет полезным прежде всего для преподавателей, готовящих авторские курсы по микроэкономике, микроэкономическому анализу, а также для студентов бакалавриата, планирующих специализироваться в различных областях микроэкономики (институциональная экономика, финансовая экономика, теория организации отраслевых рынков и т. д.). Оно поможет таким студентам глубже освоить методы микроэкономического анализа, подготовит их к чтению оригинальных публикаций, к научной и аналитической работе. При этом наличие подробных решений предложенных задач позволит им эффективно контролировать успешность своей самостоятельной работы: порой даже очень сильным студентам требуются известные образцы анализа, решения типовых задач, чтобы быть уверенным, что они «делают все как надо». При этом, конечно, предполагается, что варианты решений будут использоваться в основном для самоконтроля и не станут заменой собственной самостоятельной работы студентов.

Полагаю, что пособие заинтересует и студентов магистратуры, в частности тех из них, кто получил базовое образование по неэкономическим специальностям (математика, физика и т. д.), имеет хорошую культуру формального анализа, но не обладает (или обладает в меньшей степени, нежели выпускники «сильных» экономических факультетов) опытом микроэкономического анализа. Ознакомление с предлагаемым материалом, как представляется, может помочь им быстро компенсировать возможные пробелы.

Не менее полезным пособие может оказаться и для бакалавров — выпускников экономических факультетов, в учебных программах которых методам формального анализа экономических ситуаций не уделяется должного внимания. В том случае, когда такие бакалавры имеют склонность заниматься научной и аналитической работой и планируют продолжать свое обучение в университетах, подобных Высшей школе экономики, самостоятельное освоение приемов микроэкономического анализа типичных формальных моделей экономических ситуаций поможет им избежать неприятных сюрпризов во время учебы (когда разговор идет о, казалось бы, давно и хорошо известных вещах, но вдруг возникают трудности даже не с ответами на поставленные вопросы, а с пониманием самих этих вопросов) и успешно справиться с предлагаемой в таких вузах программой обучения.

В. П. Бусыгин,
доцент кафедры микроэкономического анализа ГУ ВШЭ,
кандидат экономических наук

1. Поведение потребителя

1. **(а)** Рассмотрите следующие определения непрерывности предпочтений и докажите их эквивалентность.

Определение непрерывных предпочтений V 7.1 (с. 95). Отношение предпочтения $\succsim$, определенное на множестве потребительских наборов непрерывно, если для всех y в множестве потребительских наборов X множество $\{x : x \succsim y\}$ и $\{x : y \succsim x\}$ — замкнутые множества. Следовательно, множества $\{x : x \succ y\}$ и $\{x : y \succ x\}$ — открытые.

Напомним, что множество A называется замкнутым, если любая сходящаяся последовательность в A сходится к точке из A.

Определение непрерывных предпочтений MWG 3.C, определение 3.G.1 и БЖЦ 1.4, определение 8. Отношение предпочтения $\succsim$ на множестве потребительских наборов X называется непрерывным, если оно сохраняется в пределе, т. е. для любой последовательности пар $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что $x^n \succsim y^n$ для всех n, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} y^n$, $x^n, y^n, x, y \in X$ выполнено $x \succsim y$.

(б) Для рациональных (т. е. полных и транзитивных) предпочтений докажите эквивалентность следующих определений выпуклости.

Определение выпуклости предпочтений БЖЦ 1.5, определение 12. Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве потребительских наборов X, называются *выпуклыми*, если для любых двух наборов x и $y \in X$ таких, что $x \succsim y$, выполнено $\alpha x + (1-\alpha)y \succsim y$ при любом значении $\alpha \in [0,1]$.

Определение выпуклости предпочтений MWG 3.B, определение 3.B.4 и V 7.1 (с. 96). Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве потребительских наборов X, являются *выпуклыми*, если для любых трех наборов $x, y, z \in X$ таких, что $x \succsim z$ и $y \succsim z$, выполнено $\alpha x + (1-\alpha)y \succsim z$ при любом значении $\alpha \in [0,1]$.

Решение.

(а) Покажем, что определение MWG подразумевает определение V. Рассмотрим множество $\{x : y \succsim x\}$. По определению MWG для любой последовательности $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ и $y \succsim x^n$ для всех n и $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$ выполнено $y \succsim x$ (определим $y^n = y$ для всех n). Аналогично для множества $\{x : x \succsim y\}$.

Обратное утверждение (определение V подразумевает определение MWG) доказать сложнее. (Доказательство этого утверждения дано в учебнике MWG в качестве упражнения.)

(б) Покажем, что из определения V и MWG следует определение БЖЦ. Рассмотрим наборы x и y из X такие, что $x \succsim y$. Из рефлексивности предпочтений $y \succsim y$. По определению V и MWG из $x \succsim y$ и $y \succsim y$ (в качестве z взяли набор y) следует, что выполнено $\alpha x + (1-\alpha)y \succsim y$ при любом значении $\alpha \in [0,1]$. Таким образом, определение БЖЦ выполнено.

Докажем утверждение в обратную строну. Из определения выпуклости БЖЦ следует определение выпуклости MWG и V. Для этого необходимо доказать, что для трех наборов $x, y, z \in X$ таких, что $x \succsim z$ и $y \succsim z$, выполнено $\alpha x + (1-\alpha)y \succsim z$ при любом значении $\alpha \in [0,1]$. Рассмотрим $x, y, z \in X$ такие, что $x \succsim z$ и $y \succsim z$. Из полноты следует, что для наборов x и y выполнено либо $x \succsim y$, либо $y \succsim x$, либо и оба соотношения одновременно. Предположим, что $x \succsim y$. Тогда, так как предпочтения удовлетворяют определению выпуклости из учебника БЖЦ, выполнено соотношение $\alpha x + (1-\alpha)y \succsim z$ при любом значении $\alpha \in [0,1]$. По транзитивности, так как $y \succsim z$, получим, что $\alpha x + (1-\alpha)y \succsim y$ при любом значении $\alpha \in [0,1]$. Аналогично рассматривается случай $y \succsim x$. Утверждение доказано.

2. Пусть потребитель имеет следующие предпочтения на множестве наборов $X = R_+^N$, $N \geq 2$: для любых двух наборов $x, y \in X$, $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда:

(а) $x_i \geq y_i$ для всех $i = 1, \ldots, N$;

(б) $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \geq \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i y_i$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$;

(в) $\prod\limits_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} \geq \prod\limits_{i=1}^{N} y_i^{\alpha_i}$, $1 > \alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$;

(г) $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^{N} \geq \min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^{N}$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$;

(д) $-\sum\limits_{i=1}^{N} (x_i - \alpha_i)^2 \geq -\sum\limits_{i=1}^{N} (y_i - \alpha_i)^2$.

Являются ли предпочтения потребителя:

— полными?

— транзитивными?

— локально ненасыщаемыми?

— слабо монотонными?

— монотонными?

— строго монотонными?
— выпуклыми?
— строго выпуклыми?
— непрерывными?

Решение.

(а) *Полнота.* Напомним, что полнота означает сравнимость всех наборов из потребительского множества. Формально определение полноты записывается следующим образом.

Отношение предпочтения называется *полным*, если для любых двух наборов x и y из потребительского множества X выполнено следующее: либо $x \succsim y$, либо $y \succsim x$, либо оба соотношения вместе: $x \succsim y$ и $y \succsim x$.

Теперь проверим, удовлетворяет ли этому свойству заданное отношение предпочтения. Рассмотрим наборы x и y такие, что $x_i > y_i$ для $i = 1, \ldots, N-1$ и $x_N < y_N$. Таким образом, не выполняется ни $x \succsim y$, ни $y \succsim x$, т. е. отношение не является полным.

Транзитивность. Отношение предпочтения называется *транзитивным*, если для любых трех наборов x, y и z таких, что $x, y, z \in X$, $x \succsim y$ и $y \succsim z$, выполнено $x \succsim z$.

Таким образом, пусть $x \succsim y$ и $y \succsim z$, что означает $x_i \geq y_i$ и $y_i \geq z_i$ для $i = 1, \ldots, N$. По транзитивности неравенств для действительных чисел из $x_i \geq y_i \geq z_i$ следует $x_i \geq z_i$ для $i = 1, \ldots, N$. А значит, $x \succsim z$, т. е. отношение предпочтения транзитивно.

Локальная ненасыщаемость. По *определению 3.B.3*, *MWG 3.B*, предпочтения называются *локально ненасыщаемыми*, если для любого допустимого набора из множества потребительских наборов $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется другой допустимый набор y такой, что $\|y - x\| \leq \varepsilon$, $y \succ x$. Рассмотрим произвольный набор x и набор y, координаты которого заданы следующим образом:

$$y = \left(x_1 + \frac{\varepsilon}{N+1}, \ldots, x_N + \frac{\varepsilon}{N+1}\right),$$

где ε — произвольная положительная величина.

Покажем, что набор y находится в ε-окрестности набора x. Действительно,

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - x_i - \frac{\varepsilon}{N+1}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\varepsilon}{N+1}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{N+1}\sqrt{N}.$$

Так как $\frac{\sqrt{N}}{N+1} < 1$, то $\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{N+1} < \varepsilon$.

Покажем, что $y \succ x$. Так как $x_i + \varepsilon > x_i$ для $i = 1, \dots, N$, то $y \succsim x$, и неверно, что $x \succsim y$, т. е. $y \succ x$.

Таким образом, в любой ε-окрестности произвольного набора x найдется набор, лучший, чем x, т. е. предпочтения являются локально ненасыщаемыми.

Слабая монотонность. По *определению в задаче 3.B.2, MWG 3*, предпочтения называются *слабо монотонными*, если для любых наборов $x \in X$ и $y \in X$ из $x \geq y$ следует $x \succsim y$. Рассматриваемые предпочтения заданы следующим образом: для любых двух наборов x, $y \in X$ выполнено $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $x_i \geq y_i$ для всех $i = 1, \dots, N$. Таким образом, из $x \geq y$ следует, что $x \succsim y$, а значит, предпочтения являются слабо монотонными.

Монотонность. По *определению 3.B.2, MWG 3.B*, предпочтения называются *монотонными*, если для любых наборов $x \in X$ и $y \in X$ из $x >> y$ следует $x \succ y$. Пусть $x >> y$, т. е. $x_i > y_i$ для $i = 1, \dots, N$. Следовательно, $x \succsim y$, но неверно, что $y \succsim x$. А значит, $y \succ x$.

Строгая монотонность. Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *строго монотонными*, если для любых двух наборов x и y из X таких, что $x \geq y$ и $x \neq y$, имеем $x \succ y$.

Строгая монотонность означает, что если у произвольного набора y увеличить хотя бы одну координату, то полученный таким образом новый набор x будет строго предпочтительнее исходного набора y.

Рассмотрим произвольный набор y. Запись «$x \geq y$ и $x \neq y$» означает, что $x_i \geq y_i$ для всех $i = 1, \dots, N$ и существует хотя бы одно благо $j : x_j > y_j$. Таким образом, $x \succsim y$, и неверно, что $y \succsim x$. Следовательно, $x \succ y$.

Выпуклость. Воспользуемся определением MWG и V. Рассмотрим произвольный коэффициент α такой, что $0 \leq \alpha \leq 1$. Пусть $y \succsim x$ и $z \succsim x$. Тогда для заданных предпочтений $y_i \geq x_i$ и $z_i \geq x_i$ для $i = 1, \dots, N$. Так как $0 \leq \alpha \leq 1$, то $\alpha y_i \geq \alpha x_i$ и $(1-\alpha) z_i \geq (1-\alpha) x_i$. Следовательно, $\alpha y_i + (1-\alpha) z_i \geq \alpha x_i + {}$ $+ (1-\alpha) x_i = x_i$ для $i = 1, \dots, N$. А для рассматриваемых предпочтений это и означает, что $\alpha y + (1-\alpha) z \succsim x$ для любого $0 \leq \alpha \leq 1$. Таким образом, предпочтения выпуклы.

Строгая выпуклость. Воспользуемся определением MWG и V. Отношение предпочтения $\succsim$ *строго выпукло*, если для любых трех наборов x, y и $z \in X$ таких, что $y \succsim x$ и $z \succsim x$, $y \neq z$, выполнено $\alpha y + (1-\alpha) z \succ x$ для всех $0 < \alpha < 1$.

$y \neq z$ означает, что вектора различаются по крайней мере одной координатой. Таким образом, существует по крайней мере одна координата j такая, что либо $y_j > z_j$, либо $z_j > y_j$. Заметим, что, возможно, вектора отличаются более чем на одну координату и возможно существование таких компонент j_1 и j_2, что, например, $y_{j_1} > z_{j_1}$ и $z_{j_2} > y_{j_2}$. Рассмотрим вектор $\alpha y + (1-\alpha)z$. Если $z_i > y_i$, то для i-й координаты вектора $\alpha y + (1-\alpha)z$, $0 < \alpha < 1$, выполнено: $\alpha y_i + (1-\alpha)z_i > \alpha y_i + (1-\alpha)y_i = y_i$. А так как из $y \succsim x$ следует $y_i \geq x_i$, то $\alpha y_i + (1-\alpha)z_i > x_i$. Аналогично, если $y_i > z_i$, то $\alpha y_i + (1-\alpha)z_i > z_i$. И так как из $z \succsim x$ следует $z_i \geq x_i$, то $\alpha y_i + (1-\alpha)z_i > x_i$. Для $z_i = y_i$ выполнено $\alpha y_i + (1-\alpha)z_i \geq x_i$. Таким образом, для всех $i = 1, ..., N$ выполнено $\alpha y_i + (1-\alpha)z_i \geq x_i$, и хотя бы для одной координаты выполнено $\alpha y_i + (1-\alpha)z_i > x_i$. Следовательно, $\alpha y + (1-\alpha)z \succ x$ для всех $0 < \alpha < 1$. Отношение предпочтения строго выпукло.

Непрерывность. Отношение предпочтения $\succsim$ на множестве потребительских наборов X называется непрерывным, если оно сохраняется в пределе, т. е. для любой последовательности пар $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $x^n \succsim y^n$ для всех n, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} y^n$, $x^n, y^n, x, y \in X$, выполнено $x \succsim y$.

Рассмотрим последовательность пар $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $x^0 = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$, $y^0 = \lim\limits_{n\to\infty} y^n$, $x^n \succsim y^n$ для всех n. $x^n \succsim y^n$ для рассматриваемых предпочтений означает, что $x_i^n \geq y_i^n$ для $i = 1, ..., N$. Таким образом, существуют числовые последовательности $\{x_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ для $i = 1, ..., N$, такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_i^n = x_i^0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_i^n = y_i^0$ и $x_i^n \geq y_i^n$. Следовательно, по свойству пределов сходящихся последовательностей $x_i^0 \geq y_i^0$. А это и означает, что $x^0 \succsim y^0$, т. е. предпочтения непрерывны.

(б) Рассмотрим теперь отношение предпочтения такое, что для любых двух наборов $x, y \in X$, $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \geq \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i y_i$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, ..., N$.

Полнота. Рассмотрим произвольные наборы из множества X: x и y. Сложим координаты набора x и координаты набора y с соответствующими коэффициентами. Два числа всегда сравнимы. Если $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \geq \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i y_i$, то $x \succsim y$, если $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \leq \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i y_i$, то $y \succsim x$. Таким образом, заданные предпочтения являются полными.

Транзитивность. Рассмотрим наборы x, y и $z \in X$ такие, что $x \succsim y$ и $y \succsim z$. Тогда для рассматриваемых предпочтений $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \geq \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i y_i$

и $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i \geq \sum_{i=1}^{N}\alpha_i z_i$, откуда следует, что $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i \geq \sum_{i=1}^{N}\alpha_i z_i$, что для рассматриваемых предпочтений означает $x \succsim z$. Таким образом, предпочтения транзитивны.

Локальная ненасыщаемость. Рассмотрим произвольный набор x и набор $y=\left(x_1+\frac{\varepsilon}{N}, x_2, \ldots, x_N\right)$, $\varepsilon>0$. Набор y принадлежит ε-окрестности: $\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2}=\frac{\varepsilon}{N}\leq\varepsilon$. Так как $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i+\alpha_1\frac{\varepsilon}{N}>\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i$, то $y\succsim x$ и неверно $x\succsim y$. Таким образом, $y\succ x$.

Слабая монотонность. Из $x\geq y$ следует, что $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i\geq\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i$, а значит, $x\succsim y$. Следовательно, предпочтения слабо монотонные.

Монотонность. Рассмотрим два набора такие, что $x_i>y_i$ для всех $i=1,\ldots,N$. Тогда $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i>\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i$. Следовательно, $x\succsim y$ и неверно $y\succsim x$, таким образом, $x\succ y$.

Строгая монотонность. $x\geq y$, $x\neq y$ означает, что $x_i\geq y_i$ для $i=1,\ldots,N$, и хотя бы для одной координаты выполнено $x_i>y_i$. Отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i>\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i$, а значит, $x\succsim y$ и неверно $y\succsim x$, что означает $x\succ y$. Следовательно, предпочтения строго монотонные.

Выпуклость. Чтобы проверить выпуклость, воспользуемся определением БЖЦ. Предпочтения называются выпуклыми, если для $\forall x,y\in X$ таких, что $x\succsim y$, выполнено $\beta x+(1-\beta)y\succsim y$ для $\beta\in[0,1]$. Рассмотрим $x\succsim y$, тогда $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i\geq\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i$. Рассмотрим набор z такой, что $z_i=\beta x_i+(1-\beta)y_i$ для всех $i=1,\ldots,N$ и $\beta\in[0,1]$. Рассмотрим сумму координат полученного набора, взвешенных с соответствующими коэффициентами:

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i z_i=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(\beta x_i+(1-\beta)y_i)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\beta x_i+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(1-\beta)y_i=$$

$$=\beta\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i+(1-\beta)\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i.$$

Так как $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i \geq \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i$, то $\beta\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i + (1-\beta)\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i \geq \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i$. Получили $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i z_i \geq \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i$, что означает $\beta x + (1-\beta)y \succsim y$ для $\forall\,\beta \in [0,1]$, следовательно, предпочтения выпуклы.

Докажем выпуклость, воспользовавшись определением MWG: выпуклость означает, что для $\forall\, x, y, z \in X$, таких, что $x \succsim y$, $z \succsim y$, выполнено $\beta x + (1-\beta)z \succsim y$ для $\beta \in [0,1]$.

Рассмотрим $x, y, z \in X$ такие, что $x \succsim y$ и $z \succsim y$. $z \succsim y$ означает для рассматриваемых предпочтений: $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i z_i \geq \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i$. Домножим неравенство на $(1-\beta) \geq 0$: $(1-\beta)\sum_{i=1}^{N}\alpha_i z_i \geq (1-\beta)\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i$. Аналогично, $x \succsim y$ означает $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i \geq \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i$. Домножив на $\beta \geq 0$ получим неравенство $\beta\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i \geq \beta\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i$. Сложим полученные неравенства:

$$\beta\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i + (1-\beta)\sum_{i=1}^{N}\alpha_i z_i \geq \beta\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i + (1-\beta)\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i.$$

Преобразуем последнее неравенство к следующему виду:

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left(\beta x_i + (1-\beta)z_i\right) \geq \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i,$$

это означает, что $\beta x + (1-\beta)z \succsim y$ при $\beta \in [0,1]$.

Строгая выпуклость. Покажем, что предпочтения не являются строго выпуклыми. Построим контрпример для случая $N = 2$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Рассмотрим наборы $x = (1,3)$ и $y = (2,2)$, заметим, что $x \neq y$. Так как $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, то выполнено и $x \succsim y$, и $y \succsim x$. Если предпочтения строго выпуклы, то, по определению строгой выпуклости из БЖЦ из $x \succsim y$ и $x \neq y$ должно следовать $\beta x + (1-\beta)y \succsim y$ для $\forall\,\beta \in (0,1)$. Координаты набора $\beta x + (1-\beta)y = (2-\beta, 2+\beta)$. Тогда $\beta x_1 + (1-\beta)y_1 + \beta x_2 + (1-\beta)y_2 = y_1 + y_2 = 4$. Следовательно, $\beta x + (1-\beta)y \succsim y$ и $y \succsim \beta x + (1-\beta)y$ (рис. **2**.1).

Таким образом, $x \succsim y$ и $x \neq y$. Однако не выполнено $\beta x + (1-\beta)y \succ y$ для $\beta \in (0,1)$, а значит, предпочтения не являются строго выпуклыми.

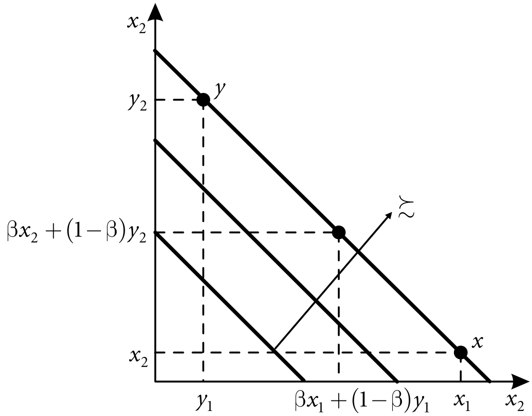

Рис. **2.**1

Непрерывность. Рассмотрим последовательность пар наборов $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $x^n \succsim y^n$ для всех n и $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$, $x^0=\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ и $y^0=\lim\limits_{n\to\infty} y^n$, x^n, y^n, x^0, $y^0 \in X$. $x^0=\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ означает, что $x_i^0=\lim\limits_{n\to\infty} x_i^n$ для всех $i=1,\ldots,N$, и $y^0=\lim\limits_{n\to\infty} y^n$ означает, что $y_i^0=\lim\limits_{n\to\infty} y_i^n$ для всех $i=1,\ldots,N$. $x^n \succsim y^n$ означает, что $\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i^n)^{\alpha_i} \geq \sum\limits_{i=1}^{N}(y_i^n)^{\alpha_i}$ для $i=1,\ldots,N$. Таким образом, получили числовые последовательности $\left\{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i^n)^{\alpha_i}\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{\sum\limits_{i=1}^{N}(y_i^n)^{\alpha_i}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Вычислим предел последовательности $\left\{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i^n)^{\alpha_i}\right\}_{n=1}^{\infty}$, воспользовавшись тем, что предел суммы сходящихся последовательностей равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(x_i^n)^{\alpha_i}=\lim_{n\to\infty}(x_1^n)^{\alpha_1}+\lim_{n\to\infty}(x_2^n)^{\alpha_2}+\ldots+\lim_{n\to\infty}(x_N^n)^{\alpha_N}=\sum_{i=1}^{N}(x_i^0)^{\alpha_i}.$$

Для последовательности $\left\{\sum\limits_{i=1}^{N}(y_i^n)^{\alpha_i}\right\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{N}(y_i^n)^{\alpha_i}=\sum\limits_{i=1}^{N}(y_i^0)^{\alpha_i}$. По свойству пределов сходящихся последовательностей $\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i^0)^{\alpha_i} \geq \sum\limits_{i=1}^{N}(y_i^0)^{\alpha_i}$, что означает $x^0 \succsim y^0$.Таким образом, отношение предпочтения непрерывно.

(в) Рассмотрим отношение предпочтения такое, что для любых двух наборов $x, y \in X$, $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $\prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{N} y_i^{\alpha_i}$, $1 > \alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$, $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$.

Полнота. Для любых x и $y \in X$ выполнено либо $\prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{N} y_i^{\alpha_i}$, и тогда $x \succsim y$, либо $\prod_{i=1}^{N} y_i^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}$ — тогда $y \succsim x$. Таким образом, заданные предпочтения являются полными.

Транзитивность. Рассмотрим наборы x, y и $z \in X$ такие, что $x \succsim y$ и $y \succsim z$. $x \succsim y$ означает, что $\prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{N} y_i^{\alpha_i}$. $y \succsim x$, соответственно $\prod_{i=1}^{N} y_i^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{N} z_i^{\alpha_i}$. Тогда $\prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{N} z_i^{\alpha_i}$, а значит, $x \succsim z$. Таким образом, предпочтения транзитивны.

Локальная ненасыщаемость. Чтобы анализировать локальную ненасыщаемость, необходимо определить строгое отношение предпочтений. $x \succ y$ означает, что $x \succsim y$ и неверно $y \succsim x$. Для рассматриваемых предпочтений эти условия записываются как $\prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{N} y_i^{\alpha_i}$, и не верно $\prod_{i=1}^{N} y^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{N} x^{\alpha_i}$, т. е. $\prod_{i=1}^{N} x^{\alpha_i} > \prod_{i=1}^{N} y^{\alpha_i}$.

Рассмотрим произвольный набор x и набор y, координаты которого заданы следующим образом:

$$y = \left(x_1 + \frac{\varepsilon}{N+1}, \ldots, x_N + \frac{\varepsilon}{N+1}\right),$$

где ε — произвольная положительная величина.

В пункте **(а)** было показано, что набор y находится в ε-окрестности набора x. Так как $\prod_{i=1}^{N} y^{\alpha_i} > \prod_{i=1}^{N} x^{\alpha_i}$, то $y \succ x$. Таким образом, доказана локальная ненасыщаемость рассматриваемых предпочтений.

Слабая монотонность. Для наборов $x, y \in X$ таких, что $x \geq y$, выполнено $\prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{N} y_i^{\alpha_i}$, а значит, $x \succsim y$. Предпочтения являются слабо монотонными.

Монотонность. Рассмотрим наборы $x, y \in X$ такие, что $x >> y$. Заметим, что если среди координат y есть нулевые, то все координаты x больше нуля. Тогда $\prod_{i=1}^{N} x^{\alpha_i} > \prod_{i=1}^{N} y^{\alpha_i}$, а значит, $x \succ y$. Предпочтения являются монотонными.

Строгая монотонность. Рассмотрим наборы $x, y \in X$ такие, что $x \geq y$ и $x \neq y$. Если среди координат векторов x и y нет координат, равных нулю, то из $x \geq y$ и $x \neq y$ следует $\prod_{i=1}^{N} x^{\alpha_i} > \prod_{i=1}^{N} y^{\alpha_i}$, а значит, $x \succ y$.

Однако если среди координат векторов x и y присутствует хотя бы одна нулевая координата, то $\prod_{i=1}^{N} x^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{N} y^{\alpha_i} = 0$, а значит, не выполнено $\prod_{i=1}^{N} x^{\alpha_i} > \prod_{i=1}^{N} y^{\alpha_i}$. Таким образом, представленные предпочтения являются строго монотонными только на положительных наборах.

Выпуклость. Рассматриваемые предпочтения выпуклы. См. задачу **11**.

Строгая выпуклость. Рассматриваемое отношение предпочтения строго выпукло только на положительных наборах (рис. **2.**2).

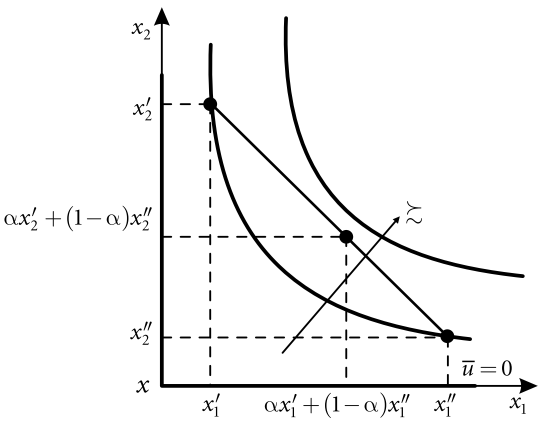

Рис. **2.**2

Рассмотрим наборы $x = (x_1, ..., x_{N-1}, 0)$ и $y = (0, y_2, ..., y_N)$, $x \neq y$. $\prod_{i=1}^{N} x^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{N} y^{\alpha_i} = 0$, откуда следует $x \succsim y$. Для строго выпуклых предпочтений из $x \succsim y$, $x \neq y$ следует $\beta x + (1-\beta)y \succ y$ для $\forall \beta \in (0,1)$. Однако $\prod_{i=1}^{N} (\beta x_i + (1-\beta)y_i) = 0$, следовательно, $\beta x+(1-\beta)y \succsim y$ и $y \succsim \beta x+(1-\beta)y$. Таким образом, не выполнено $\beta x+(1-\beta)y \succ y$ (рис. **2.**3).

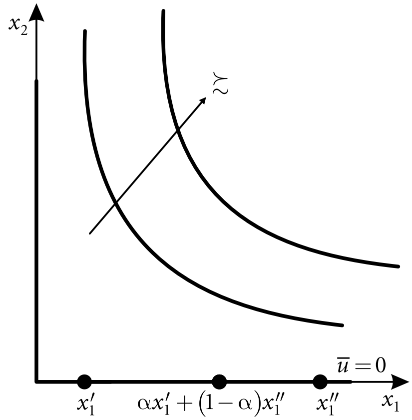

Рис. **2.**3

Непрерывность. Рассмотрим последовательность пар $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $x^0=\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ и $y^0=\lim\limits_{n\to\infty} y^n$, $x^n \succsim y^n$ для всех n и $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$, x^0, $y^0 \in X$. $x^0=\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ означает, что $x_i^0=\lim\limits_{n\to\infty} x_i^n$ для всех $i=1,\dots,N$, и $y^0=\lim\limits_{n\to\infty} y^n$ означает, что $y_i^0=\lim\limits_{n\to\infty} y_i^n$ для всех $i=1,\dots,N$. $x^n \succsim y^n$ означает, что $\prod\limits_{i=1}^{N}(x_i^n)^{\alpha_i} \ge \prod\limits_{i=1}^{N}(y_i^n)^{\alpha_i}$ для $i=1,\dots,N$. Таким образом, получили числовые последовательности $\left\{\prod\limits_{i=1}^{N}(x_i^n)^{\alpha_i}\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{\prod\limits_{i=1}^{N}(y_i^n)^{\alpha_i}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Вычислим предел последовательности $\left\{\prod\limits_{i=1}^{N}(x_i^n)^{\alpha_i}\right\}_{n=1}^{\infty}$, воспользовавшись тем, что предел произведения сходящихся последовательностей равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{N}(x_i^n)^{\alpha_i}=\lim_{n\to\infty}(x_1^n)^{\alpha_1}\lim_{n\to\infty}(x_2^n)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to\infty}(x_N^n)^{\alpha_N}=\prod_{i=1}^{N}(x_i^0)^{\alpha_i}.$$

Для последовательности $\left\{\prod_{i=1}^{N}\left(y_i^n\right)^{\alpha_i}\right\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{N}\left(y_i^n\right)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{N}\left(y_i^0\right)^{\alpha_i}$. По свойству пределов сходящихся последовательностей $\prod_{i=1}^{N}\left(x_i^0\right)^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{N}\left(y_i^0\right)^{\alpha_i}$, что означает $x^0 \succsim y^0$, т. е. отношение предпочтения непрерывно.

(г) Рассмотрим отношение предпочтения такое, что для любых двух наборов $x, y \in X$, $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^{N} \geq \min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^{N}$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, N$.

Полнота. Для любых x и $y \in X$ выполнено либо $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^{N} \geq \min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^{N}$ — тогда $x \succsim y$, либо $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^{N} \leq \min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^{N}$ — тогда $y \succsim x$. Два числа всегда сравнимы. Таким образом, заданные предпочтения являются полными.

Транзитивность. Рассмотрим наборы x, y и $z \in X$ такие, что $x \succsim y$ и $y \succsim z$. $x \succsim y$, означает, что $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^{N} \geq \min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^{N}$. $y \succsim z$, соответственно $\min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^{N} \geq \min\{\alpha_i z_i\}_{i=1}^{N}$. Тогда $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^{N} \geq \min\{\alpha_i z_i\}_{i=1}^{N}$, а значит, $x \succsim z$. Таким образом, предпочтения транзитивны.

Локальная ненасыщаемость. Строгое отношение предпочтения $x \succsim y$ означает, что $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^{N} > \min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^{N}$.

Рассмотрим произвольный набор x и набор y, координаты которого заданы следующим образом:

$$y = \left(x_1 + \frac{\varepsilon}{N+1}, \ldots, x_N + \frac{\varepsilon}{N+1}\right),$$

где ε — произвольная положительная величина.

В пункте **(а)** было показано, что набор y находится в ε-окрестности набора x. Так как все координаты увеличиваются, то $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^{N} > \min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^{N}$, а значит, $x \succ y$. Таким образом, доказана локальная ненасыщаемость рассматриваемых предпочтений.

Слабая монотонность. Для наборов $x, y \in X$ таких, что $x \geq y$ выполнено $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^{N} \geq \min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^{N}$, а значит $x \succsim y$, предпочтения являются слабо монотонными.

Монотонность. Рассмотрим наборы $x, y \in X$ такие, что $x >> y$. Так как в наборе x все координаты больше соответствующих координат набора y, то

$\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^N > \min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^N$, а значит, $x \succ y$. Предпочтения являются монотонными.

Строгая монотонность. Рассмотрим наборы $x, y \in X$ такие, что $x \geq y$ и $x \neq y$. Покажем, что рассматриваемые предпочтения не являются строго монотонными. В качестве контрпримера рассмотрим случай $N = 2$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Рассмотрим наборы $y = (3, 5)$ и $x = (3, 8)$. Для этих наборов выполнено $x \geq y$ и $x \neq y$. Однако $\min\{x_1, x_2\} = \min\{y_1, y_2\}$, а значит, неверно, что $x \succ y$.

Выпуклость. Рассмотрим два произвольных набора x и y таких, что $x \succsim y$. Тогда $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^N \geq \min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^N$. Обозначим $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^N = \alpha_j x_j$ и $\min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^N = \alpha_s y_s$. Так как $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^N \geq \min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^N$, то $\alpha_j x_j \geq \alpha_s y_s$. Выпуклость означает, что $\beta x + (1-\beta) y \succsim y$ для любых $\beta \in [0,1]$. Набор $\beta x + (1-\beta) y = (\beta x_1 + (1-\beta) y_1, \ldots, \beta x_N + (1-\beta) y_N)$. Обозначим $\min\{\alpha_i (\beta x_i + (1-\beta) y_i)\}_{i=1}^N = \alpha_l (\beta x_l + (1-\beta) y_l)$. Так как $\min\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^N = \alpha_j x_j$, то $\alpha_l \beta x_l \geq \alpha_j \beta x_j$ для $\beta \in [0,1]$. Поскольку $\alpha_j x_j \geq \alpha_s y_s$, то $\alpha_l \beta x_l \geq \alpha_j \beta x_j \geq \alpha_s \beta y_s$. Так как $\min\{\alpha_i y_i\}_{i=1}^N = \alpha_s y_s$, то $\alpha_l (1-\beta) y_l \geq \alpha_s (1-\beta) y_s$. Сложим $\alpha_l \beta x_l \geq \alpha_s \beta y_s$ и $\alpha_l (1-\beta) y_l \geq \alpha_s (1-\beta) y_s$. Таким образом, $\alpha_l (\beta x_l + (1-\beta) y_l) \geq \alpha_s y_s$. Для заданных предпочтений это означает, что $\beta x + (1-\beta) y \succsim y$ для любых $\beta \in [0,1]$.

Строгая выпуклость. Предпочтения не являются строго выпуклыми. Рассмотрим случай $N = 2$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Для наборов $x = (3, 5)$ и $y = (3, 8)$, $x \neq y$, выполнено $\min\{x_1, x_2\} = \min\{y_1, y_2\} = 3$, т. е. $x \succsim y$ и $y \succsim x$. По определению строгой выпуклости БЖЦ для $x \succsim y$, $x \neq y$, выполнено $\alpha x + (1-\alpha) y \succ y$, для всех $\alpha \in (0,1)$. $\alpha x + (1-\alpha) y = (3, 5\alpha + 8(1-\alpha))$, т. е. $\min\{3, 5\alpha + 8(1-\alpha)\} = 3$, а значит, так как $\alpha x + (1-\alpha) y \succsim y$ и $y \succsim \alpha x + (1-\alpha) y$, то $\alpha x + (1-\alpha) y \sim y$. Следовательно, предпочтения не являются строго выпуклыми.

Непрерывность. Рассмотрим последовательность пар $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^\infty$ таких, что $x^0 = \lim_{n\to\infty} x^n$, $y^0 = \lim_{n\to\infty} y^n$, $x^n \succsim y^n$ для всех n и $\{x^n\}_{n=1}^\infty$, $\{y^n\}_{n=1}^\infty$, x^0, $y^0 \in X$. $x^0 = \lim_{n\to\infty} x^n$ означает, что $x_i^0 = \lim_{n\to\infty} x_i^n$ для всех $i = 1, \ldots, N$, и $y^0 = \lim_{n\to\infty} y^n$ означает, что $y_i^0 = \lim_{n\to\infty} y_i^n$ для всех $i = 1, \ldots, N$. $x^n \succsim y^n$ означает, что $\min\{\alpha_i x_i^n\}_{i=1}^N \geq \min\{\alpha_i y_i^n\}_{i=1}^N$ для $i = 1, \ldots, N$. Таким образом, получили числовые последовательности $\left\{\min\{\alpha_i x_i^n\}_{i=1}^N\right\}_{n=1}^\infty$ и $\left\{\min\{\alpha_i y_i^n\}_{i=1}^N\right\}_{n=1}^\infty$.

И для каждого n найдется компонента x_j^n, такая, что $\alpha_j x_j^n = \min\{\alpha_i x_i^n\}_{i=1}^N \geq \min\{\alpha_i y_i^n\}_{i=1}^N$. Тогда $\min\{\alpha_i x_i^0\}_{i=1}^N \geq \min\{\alpha_i y_i^0\}_{i=1}^N$, что означает $x^0 \succsim y^0$, т. е. отношение предпочтений непрерывно.

(д) Оставляем в качестве упражнения проверить по аналогии с предыдущими пунктами, что заданные предпочтения являются полными и транзитивными.

Локальная ненасыщаемость. Предпочтения не являются локально ненасыщаемыми. Рассмотрим набор $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$: $-\sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_i)^2 = 0$. В любой окрестности этой точки $-\sum_{i=1}^N (x_i - \alpha_i)^2 < 0$. А значит, $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \succ y$ для любого $y \in X$, $y \neq x$.

Слабая монотонность. Рассмотрим наборы $x = (\alpha_1 + \varepsilon, \alpha_2, ..., \alpha_N)$, где $\varepsilon > 0$, и $y = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$. Таким образом, $x \geq y$. Для рассматриваемых предпочтений $-(\alpha_1 + \varepsilon - \alpha_i)^2 + \sum_{i=2}^N (\alpha_i - \alpha_i)^2 = -\varepsilon^2$ и $-\sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_i)^2 = 0$. Согласно слабой монотонности должно выполняться $x \succsim y$. Однако, так как $-\varepsilon^2 \ngeq 0$, то $x \not\succsim y$, а значит, предпочтения не являются слабо монотонными.

Выпуклость и строгая выпуклость. Для случая $N = 2$, $\alpha_1 = 3$ и $\alpha_2 = 2$ приведена графическая иллюстрация (рис. **2.**4).

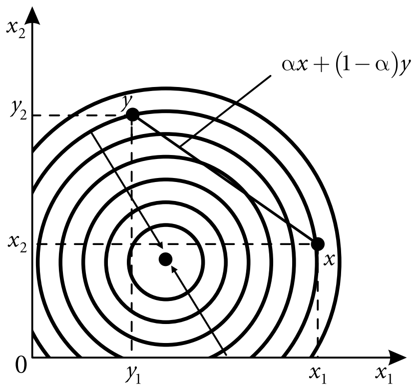

Рис. **2.**4

Для $x \succsim y$ выполнено $\alpha x + (1-\alpha)y \succ y$ для $\forall \alpha \in [0,1]$.

Заданные предпочтения являются выпуклыми и строго выпуклыми. См. задачу **11**.

По аналогии с предыдущими пунктами доказывается непрерывность предпочтений.

3. Пусть отношение предпочтения задано на $X = R^N_+$, $N \geq 2$. Докажите или опровергните следующие утверждения:

(а) Если предпочтения $\succsim$ локально ненасыщаемы, то они слабо монотонны (монотонны, строго монотонны).

(б) Если предпочтения $\succsim$ слабо монотонны, то они локально ненасыщаемы.

(в) Если предпочтения $\succsim$ монотонны, то они локально ненасыщаемы.

(г) Предпочтения $\succsim$ монотонны тогда и только тогда, когда они строго монотонны.

(д) Если предпочтения $\succsim$ рациональны, локально ненасыщаемы и слабо монотонны, то они монотонны[1].

(е) Если предпочтения $\succsim$ строго монотонны, то из $x \succ y$ следует $x \geq y$.

(ж) Если предпочтения $\succsim$ рациональны и строго выпуклы, то существует не больше одной точки глобального насыщения, а во всех остальных точках предпочтения локально ненасыщаемы.

(з) Если предпочтения $\succsim$ рациональны и строго монотонны, то они строго выпуклы.

(и) Если предпочтения $\succsim$ рациональны и строго монотонны, то они непрерывны.

(к) Если предпочтения $\succsim$ строго выпуклы, то они строго монотонны.

(л) Если предпочтения $\succsim$ рациональны, строго выпуклы и слабо монотонны, то они строго монотонны.

[1] См. *MWG 3, задача 3.B.2.*

(м) Если предпочтения $\succsim$ рациональны и строго выпуклы, то они локально ненасыщаемы.

(н) Если предпочтения $\succsim$ рациональны, строго выпуклы и слабо монотонны, то они локально ненасыщаемы.

(о) Для любых предпочтений $\succsim$, определенных на множестве наборов X из $x \succsim y$, следует $\alpha x \succsim \alpha y$ для любых значений $\alpha \geq 0$.

(п) Для любых предпочтений $\succsim$, определенных на множестве наборов X при $x \succsim y$, неверно, что $\alpha x \succsim \alpha y$ для любых значений $\alpha \geq 0$.

Решение.

(а) Рассмотрим предпочтения: $y \succsim x$ тогда и только тогда, когда $x_1 - 2x_2 \geq y_1 - 2y_2$. Покажем, что предпочтения локально ненасыщаемы. Рассмотрим произвольный набор $x = (x_1, x_2)$ и набор y, координаты которого $y = \left(x_1 + \frac{\varepsilon}{2}, x_2\right)$. Покажем, что набор y находится в ε-окрестности набора x:

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Так как $y_1 - 2y_2 = x_1 - 2x_2 + \varepsilon > x_1 - x_2$, то выполнено $y \succsim x$, но неверно, что $x \succsim y$. Таким образом, $y \succ x$.

Покажем теперь, что предпочтения не являются слабо монотонными. Рассмотрим два набора $x = (8, 4)$ и $y = (5, 2)$. $x \geq y$, однако не выполнено $x \succsim y$, так как $x_1 - 2x_2 = 0 < y_1 - 2y_2 = 1$.

Данный пример показывает, что из локальной ненасыщаемости не следуют слабая монотонность, монотонность и строгая монотонность (обоснуйте почему). Таким образом, утверждение неверно.

(б) Утверждение неверно. Функция полезности, представляющая отношение предпочтения, удовлетворяющего свойству слабой монотонности, но не являющегося локально ненасыщаемым:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2, \text{если } x_1 x_2 < 2 \\ 2, \text{если } 2 \leq x_1 x_2 \leq 6 \\ x_1 x_2 - 4, \text{если } x_1 x_2 > 6. \end{cases}$$

Заданные предпочтения не являются локально ненасыщаемыми. Для того чтобы это показать, достаточно указать хотя бы один набор и окрестность этого набора такие, что в окрестности нет набора лучше заданного. Рассмотрим набор $x=(x_1=3, x_2=1)$ и его окрестность радиуса $\varepsilon=0{,}25$. Полезность потребителя на заданном наборе $u(3,1)=2$. Координаты наборов окрестности удовлетворяют условиям: $2{,}75 \le y_1 \le 3{,}25$ и $0{,}75 \le y_2 \le 1{,}25$. Для всех наборов окрестности выполнено $2{,}06 \le y_1^A y_2^A \le 4{,}06$. Следовательно, в окрестности радиуса $\varepsilon=0{,}25$ набора $x=(x_1=3, x_2=1)$ полезность равна 2. Таким образом, в рассматриваемой окрестности не существует набора $y=(y_1, y_2)$ такого, что $y \succ x$. Однако, так как для $x \ge y$ выполнено $u(x) \ge u(y)$, а следовательно, $x \succsim y$, заданная функция представляет слабо монотонные предпочтения.

(в) Покажем, что если для x и y из X таких, что $x >> y$, выполнено $x \succ y$, то в любой ε-окрестности любого набора найдется лучший набор.

Рассмотрим произвольный набор $x=(x_1,...,x_N)$ и набор $y=\left(x_1+\frac{\varepsilon}{N},...,x_N+\frac{\varepsilon}{N}\right)$, где $\varepsilon>0$.

Покажем, что набор y находится в ε-окрестности набора x :

$$\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{N\frac{\varepsilon^2}{N^2}}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}<\varepsilon.$$

Так как $y >> x$, то в силу монотонности предпочтений $y \succ x$. Таким образом, утверждение верно.

(г) Утверждение верно только в одну сторону: из строгой монотонности следует монотонность. Для строго монотонных предпочтений из $y \ge x$ и $y \ne x$ следует $y \succ x$. Но если $y >> x$, то выполнено $y \ge x$ и $y \ne x$, а значит, в силу строгой монотонности $y \succ x$.

Приведем пример предпочтений монотонных, но не строго монотонных: $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $\min\{x_1, x_2\} \ge \min\{y_1, y_2\}$. Это частный случай предпочтений, рассмотренных в пункте **(г)** задачи **2**. Численный пример рассмотрен в соответствующей задаче.

(д) Рассмотрим два набора таких, что $x >> y$. В задаче требуется показать, что $x \succ y$. Так как $x >> y$, то $x_i - y_i > 0$ для $i=1,..., N$. Возьмем $\varepsilon=\min\{x_1-y_1,...,x_N-y_N\}>0$. Покажем, что для любого набора $z \in X$, если

$\|y-z\| \le \varepsilon$, то $x_i \ge z_i$ для $i=1,\ldots,N$. Запись $\|y-z\| \le \varepsilon$ означает $\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(y_j - z_j)^2} \le \varepsilon$.

Так как $\varepsilon \le x_i - y_i$ для всех $i=1,\ldots,N$, то $\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(y_j - z_j)^2} \le x_i - y_i$. В обеих частях неравенства стоят положительные числа. Возведем левую и правую части неравенства в квадрат и приведем к следующему виду: $\sum_{j\ne i}^{N}(y_j - z_j)^2 \le$ $\le (x_i - y_i)^2 - (y_i - z_i)^2$. Преобразуем правую часть неравенства:

$$(x_i - y_i)^2 - (y_i - z_i)^2 = x_i^2 - 2x_i y_i + 2y_i z_i - z_i^2 =$$

$$= (x_i - z_i)(x_i + z_i) - 2y_i(x_i - z_i) = (x_i - z_i)(x_i + z_i - 2y_i).$$

Так как $0 \le \sum_{j\ne i}^{N}(y_j - z_j)^2$, то $0 \le (x_i - z_i)(x_i + z_i - 2y_i)$. Предположим, что $x_i < z_i$. Тогда должно выполняться $(x_i + z_i - 2y_i) \le 0$. Так как $x_i - y_i > 0$, то $z_i - y_i < 0$, а следовательно, $x_i > y_i > z_i$. Получили противоречие с тем, что $x_i < z_i$. Таким образом, $x_i \ge z_i$.

В силу локальной ненасыщаемости существует $\tilde{z} \in X$ такой, что $\|y - \tilde{z}\| \le \varepsilon$ и $\tilde{z} \succ y$. Выше было показано, что $x_i \ge z_i$ для $i=1,\ldots,N$, а значит, $x \ge \tilde{z}$. В силу слабой монотонности предпочтений из $x \ge \tilde{z}$ следует $x \succsim \tilde{z}$. Таким образом, $x \succsim \tilde{z} \succ y$.

Докажем, что если $x \succsim \tilde{z} \succ y$ и предпочтения рациональны, то $x \succ y$. Так как рациональность предпочтений означает, в том числе и то, что предпочтения полные, то либо $x \succsim y$, либо $y \succsim x$, либо и то и другое. Пусть $y \succsim x$. Тогда по транзитивности $y \succsim \tilde{z}$. Однако $\tilde{z} \succ y$ означает, что $\tilde{z} \succsim y$, и неверно, что $y \succsim \tilde{z}$. Получили противоречие. Значит, предположение $y \succsim x$ оказалось неверным.

В силу полноты, если $y \succsim x$ неверно, то должно выполняться $x \succsim y$. Таким образом, $x \succsim y$, и неверно, что $y \succsim x$, т. е. $x \succ y$.

(e) Утверждение неверно. Приведем контрпример. Рассмотрим следующее отношение предпочтения: для любых двух наборов $x, y \in X$, $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 \ge y_1 + y_2$. Строгое отношение предпочтения определено следующим образом: $x \succ y$ тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$. Рассмотрим наборы $x = (8, 1)$ и $y = (3, 5)$, для которых выполнено $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$. Следовательно, $x \succ y$. Однако не выполнено $x \ge y$ (рис. **3.**1).

Рис. **3.**1

(ж) Набор $x \in X$ называется точкой глобального насыщения, если не существует набора $y \in X$, такого, что $y \succ x$. Покажем, что если предпочтения рациональны и строго выпуклы, то не существует более одной точки глобального насыщения. Предположим, что это не так, и у потребителя две точки глобального насыщения: $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$, $\bar{x} \neq \bar{\bar{x}}$. По условию отношение предпочтения рефлексивно, что означает, что оно полно и транзитивно. Из полноты следует, что либо $\bar{x} \succsim \bar{\bar{x}}$, либо $\bar{\bar{x}} \succsim \bar{x}$, либо верны оба соотношения. Предположим, что $\bar{x} \succsim \bar{\bar{x}}$ и неверно, что $\bar{\bar{x}} \succsim \bar{x}$, т. е. $\bar{x} \succ \bar{\bar{x}}$. Это означает, что $\bar{\bar{x}}$ — не точка глобального насыщения. Если $\bar{\bar{x}} \succsim \bar{x}$ и неверно, что $\bar{x} \succsim \bar{\bar{x}}$, то $\bar{x}$ — не точка глобального насыщения. Таким образом, если $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ точки глобального насыщения, то и $\bar{x} \succsim \bar{\bar{x}}$ и $\bar{\bar{x}} \succsim \bar{x}$. Воспользуемся тем, например, что $\bar{x} \succsim \bar{\bar{x}}$. Из $\bar{x} \succsim \bar{\bar{x}}$ в силу строгой выпуклости $\alpha\bar{x} + (1-\alpha)\bar{\bar{x}} \succ \bar{\bar{x}}$ для $\forall \alpha \in (0,\, 1)$. Получили противоречие с тем, что точка $\bar{\bar{x}}$ является точкой глобального насыщения. Таким образом, если у потребителя есть точка глобального насыщения, то только одна. Заметим, что рациональность и строгая выпуклость предпочтений не гарантируют существование точки глобального насыщения. (Например, отношение предпочтения $x \succsim y \Leftrightarrow \sqrt{x_1} + x_2 \geq \sqrt{y_1} + y_2$.)

Покажем теперь, что во всех точках, отличных от точки глобального насыщения, предпочтения потребителя локально ненасыщаемы. Рассмотрим произвольный набор $x \in X$.

Предположим, что существует точка глобального насыщения $\bar{x}$. Рассмотрим произвольный набор $x \in X$. Для точки глобального насыщения выполнено

$\bar{x} \succsim x$ и $\bar{x} \neq x$. В силу строгой выпуклости предпочтений $\alpha\bar{x} + (1-\alpha)x \succ x$ для $\forall \alpha \in (0,\ 1)$. При $\alpha \to 0$ набор $\alpha\bar{x} + (1-\alpha)x$ будет все ближе к набору x. Таким образом, в любой окрестности сколь угодно малого радиуса найдется набор $\alpha\bar{x} + (1-\alpha)x$ лучший, чем набор x, что означает локальную ненасыщаемость.

Теперь предположим, что точки глобального насыщения не существует. Рассмотрим два произвольных набора $x, y \in X$, $x \neq y$. Рациональность предпочтений означает полноту и транзитивность. В силу полноты либо $x \succsim y$, либо $y \succsim x$, либо и то и другое. Предположим, что $x \succsim y$. Тогда в силу строгой выпуклости для $\forall \alpha \in (0,\ 1)$ выполнено $\alpha x + (1-\alpha)y \succ y$. При $\alpha \to 0$ набор $\alpha x + (1-\alpha)y$ будет все ближе к набору y. Таким образом, в любой окрестности сколь угодно малого радиуса найдется набор $\alpha x + (1-\alpha)y$ лучший, чем набор x. Аналогичные рассуждения верны для случая $y \succsim x$. Таким образом, во всех точках, отличных от точки глобального насыщения, предпочтения локально ненасыщаемые.

(з) Утверждение неверно. Построим контрпример. Рассмотрим предпочтения $\succsim$, определенные на $X = R_+^N$: для любых двух наборов $x, y \in X$, $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \geq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i$. В задаче **2(б)** показано, что указанные предпочтения являются рациональными и строго монотонными, однако не являются строго выпуклыми.

Для случая $N = 2$ и $\alpha_1 = \alpha_2$ приведем графическую иллюстрацию, воспользовавшись определением MWG: строгая выпуклость означает, что для $\forall\, x, y, z \in X$ таких, что $x \succsim y$, $z \succsim y$ и $x \neq z$, выполнено $\beta x + (1-\beta)z \succ y$ для $\forall \beta \in (0,\ 1)$.

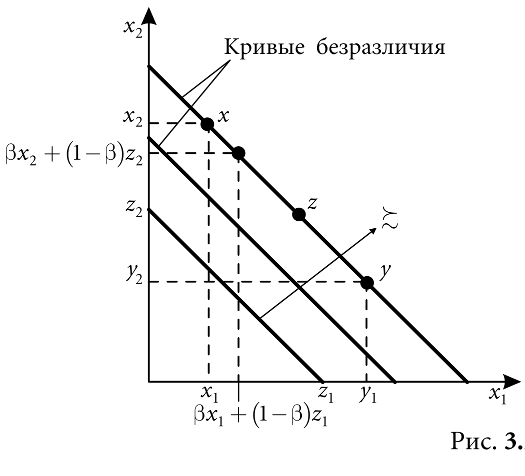

Рис. **3.**2

Здесь $x \succsim y$, $z \succsim y$ и $x \neq z$, однако не выполнено $\beta x + (1-\beta)z \succ y$ для $\forall \beta \in (0, 1)$, а значит, предпочтения не являются строго выпуклыми (см. рис. **3.**2). См. также **2(б)**.

(и) Утверждение неверно. В качестве контрпримера можно рассмотреть лексикографические предпочтения для $x, y \in X$ $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда «$x_1 > y_1$» или «$x_1 = y_1$ и $x_2 \geq y_2$».

Эти предпочтения рациональны, однако не являются непрерывными. (См. *MWG 3.C*, *пример 3.C.1* и *БЖЦ 1.4, пример 5*).

(к) Утверждение неверно. В качестве контрпримера можно рассмотреть предпочтения $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $-\sum_{i=1}^{N}(x_i - \alpha_i)^2 \geq -\sum_{i=1}^{N}(y_i - \alpha_i)^2$.

Приведем также графический пример (например, такие линии уровня соответствуют предпочтениям $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $x_1 - (x_2)^2 \geq$ $\geq y_1 - (y_2)^2$) на рис. **3.**3. Изображенные предпочтения строго выпуклы, однако не являются строго монотонными (покажите самостоятельно). Для строго монотонных предпочтений в заштрихованной области должны лежать все наборы строго лучшие, чем набор (x_1', x_2') (рис. **3.**4).

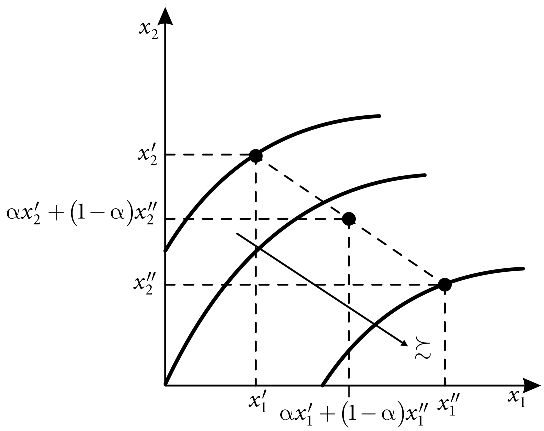

Рис. **3.**3

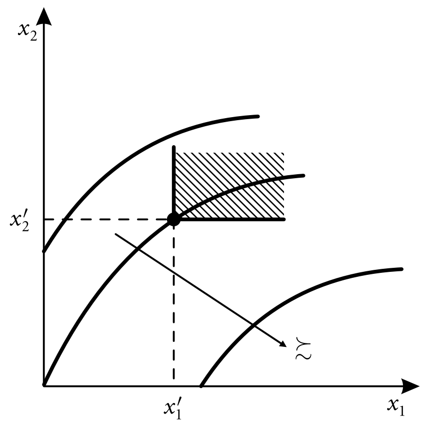

Рис. **3.**4

(л) Рассмотрим наборы $x, y \in X$ такие, что $x \geq y$, $x \neq y$, т. е. $x_i \geq y_i$ для $i = 1, \dots, N$, и хотя бы для одной координаты $x_i > y_i$. Тогда выполнено $x_i \geq \alpha x_i + (1-\alpha)y_i$, где $0 < \alpha < 1$, для $i = 1, \dots, N$ и хотя бы для одной координаты

$x_i > \alpha x_i + (1-\alpha) y_i$. Так как предпочтения слабо монотонны, то для $x \geq \alpha x + (1-\alpha) y$ выполнено $x \succsim \alpha x + (1-\alpha) y$. Аналогично в силу слабой монотонности если $x \geq y$, то $x \succsim y$, тогда и из $x \geq y$, $y \neq x$, следует $x \succsim y$. В силу строгой выпуклости из $x \succsim y$, $y \succsim y$ и $x \neq y$ следует $\alpha x + (1-\alpha) y \succ y$ для $\forall \alpha \in (0,1)$. (Здесь используется определение MWG. Поскольку предпочтения рациональны, то это определение эквивалентно определению из БЖЦ, см. **1(б)**, а значит, из $x \succsim y$ и $x \neq y$ следует $\alpha x + (1-\alpha) y \succ y$ для $\forall \alpha \in (0,1)$.) Следовательно $x \succsim \alpha x + (1-\alpha) y \succ y$. Тогда, воспользовавшись рациональностью, можно доказать, что $x \succ y$. Таким образом, утверждение верно.

(м) Утверждение неверно. Контрпример — предпочтения: $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $-\sum_{i=1}^{N} (x_i - \alpha_i)^2 \geq -\sum_{i=1}^{N} (y_i - \alpha_i)^2$.

(н) Рассмотрим произвольный набор x и набор z такие, что $z \geq x$ и $z \neq x$. Тогда из слабой монотонности следует, что $z \succsim x$. Обозначим через y набор $\alpha z + (1-\alpha) x$, где $\alpha \in (0,1)$. Тогда из строгой выпуклости следует, что $y \succ x$ при $\alpha \in (0,1)$. Таким образом, для любого сколь угодно малого ε можно подобрать такое значение коэффициента $\alpha \to 1$, что $\|x - y\| \leq \varepsilon$ и $y \succ x$.

(о) Построим контрпример. Рассмотрим предпочтения $\succsim$, определенные на множестве потребительских наборов $X = R_+^2$, заданные следующим образом: $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{x_1} + x_2 \geq \sqrt{y_1} + y_2$. Пусть $x = (4,1)$ и $y = (1,2)$. Тогда $x \succsim y$, так как $\sqrt{4} + 1 \geq \sqrt{1} + 2$. При $\alpha = 4$ получим $\alpha x = (16, 4)$ и $\alpha y = (4, 8)$. Тогда $\sqrt{\alpha x_1} + \alpha x_2 = 8$ и $\sqrt{\alpha y_1} + \alpha y_2 = 10$, т. е. $\alpha y \succsim \alpha x$, и неверно, что $\alpha x \succsim \alpha y$. Таким образом, утверждение неверно.

(п) Утверждение пункта **(п)** неверно. Предпочтения, для которых из $x \succsim y$ следует $\alpha x \succsim \alpha y$ для любых значений $\alpha \geq 0$, называются гомотетичными или однородными. Рассмотрим пример таких предпочтений: для любых двух наборов $x, y \in X$, $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $\prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} \geq \prod_{i=1}^{N} y_i^{\alpha_i}$. Тогда $x \succsim y \Leftrightarrow \alpha x \succsim \alpha y$ для $\alpha \geq 0$. А значит, утверждение неверно.

4[2]. Покажите, что, если X конечно и предпочтения рациональны, то существует функция полезности, представляющая эти предпочтения.

Решение.

По *утверждению 1.B.2, MWG 1.B*, если предпочтения $\succsim$ можно представить функцией полезности, то они рациональны (т. е. удовлетворяют свойствам полноты и транзитивности). Однако обратное утверждение неверно: рациональности предпочтений недостаточно для существования функции полезности (пример: лексикографические предпочтения). Рассмотрим, изменится ли ситуация, если добавим следующее условие: множество потребительских наборов X конечно.

Напомним определение функции полезности: функция $u: X \to R$ является функцией полезности, представляющей отношение предпочтения $\succsim$, если для всех наборов $x, y \in X$выполнено $x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$.

Для каждой пары потребительских наборов (x, y) определим индекс:

$$r_{(x,\, y)} = \begin{cases} 1, \text{если } x \succsim y \\ 0, \text{если неверно, что } x \succsim y \end{cases} \text{ и } u(x) = \sum_{y \in X} r(x, y).$$

Индикатор $r_{(x,\, y)}$ представляет собой число наборов, каждый из которых не лучше, чем x, т. е. $u(x) = \{\text{число наборов } y \text{ таких, что } x \succsim y\}$.

Пусть $x \succsim y$, тогда для каждого z такого, что $y \succsim z$ выполнено (по транзитивности) $x \succsim z$. Тогда $u(x) \geq u(y)$. Другими словами, если $x \succsim y$, то $u(x) \geq u(y)$.

Предположим теперь, что $u(x) \geq u(y)$, и покажем, что из этого следует $x \succsim y$. Предположим, что это не так. Напомним, что по условию задачи отношение предпочтения полно. Значит, $y \succsim x$, причем неверно, что набор x эквивалентен набору y (неверно, что $x \sim y$). Но тогда $r_{(y,\, x)} = 1$ и $r_{(x,\, y)} = 0$, поэтому $u(y) > u(x)$, что противоречит предположению.

5. Покажите, что если $f: R \to R$ строго возрастающая функция и $u: X \to R$ функция полезности, представляющая отношение предпочтения $\succsim$, то функция v: $X \to R$, задаваемая как $v(x) = f(u(x))$, также является функцией полезности, представляющей отношение предпочтения $\succsim$.

---

[2] См. *MWG 1, задача 1.B.5.*

Решение.

По определению функция $u: X \to R$ является функцией полезности, представляющей отношение предпочтения $\succsim$, если для всех $x, y \in X$выполнено $x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$.

Пусть $x, y \in X$ и функция $u(\cdot)$ представляет отношение предпочтения $\succsim$. Тогда по определению $x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$. Поскольку $f(\cdot)$ строго возрастает, то $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow v(x) \geq v(y)$. Следовательно, $x \succsim y \Leftrightarrow v(x) \geq v(y)$. Следовательно, $v(\cdot)$ представляет отношение предпочтения $\succsim$.

6[3]**.** Пусть функция $u(x)$ представляет предпочтения некоторого потребителя на наборах $x \in R_+^n$. Может ли функция $f(x) = u(x) - (u(x))^2$ также представлять предпочтения данного потребителя?

Решение.

Функция $f(\cdot)$ является суперпозицией функций $f = \varphi \circ u$, где $\varphi(y) = y - y^2$, для любых $y \in R(u)$. Поскольку $\varphi'(y) = 1 - 2y > 0$ для всех $y < \frac{1}{2}$, и $\varphi'(y) = 1 - 2y < 0$ для всех $y > \frac{1}{2}$, то $\varphi(y)$ возрастает на интервале $y \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ и убывает на интервале $y \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Следовательно, если $u(x) \leq \frac{1}{2}\ \forall x \in R_+^n$, то функция $f(\cdot)$ представляет те же предпочтения, что и функция $u(x)$. Но если существует потребительский набор $x \in R_+^n$ такой, что $u(x) > \frac{1}{2}$, то возможно нарушение $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$, что в итоге ведет к нарушению $x \succsim y \Leftrightarrow f(x) \geq f(y)$.

7. Покажите, что если функция полезности, описывающая предпочтения $\succsim$, непрерывна, то отношение $\succsim$ также непрерывно.

Решение.

Воспользуемся определением MWG. Рассмотрим последовательность пар $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $x^n \succsim y^n$ для всех n, и $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = x^0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y^n = y^0$.

[3] См. *Jehle G. A.*, *Reny P. J.* Advanced Microeconomic Theory. Addison Wesley, 2001. Задача 1.24(b).

Для того чтобы показать, что предпочтения непрерывны, требуется показать, что $x^0 \succsim y^0$. Из непрерывности $u(\cdot)$ следует, что $u(x^n) \underset{n\to\infty}{\to} u(x^0)$ и $u(y^n) \underset{n\to\infty}{\to} u(y^0)$. По определению функции полезности из $x^n \succsim y^n$ следует $u(x^n) \geq u(y^n)$ для всех n. Таким образом, получаем две числовые последовательности $\{u(x^n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{u(y^n)\}_{n=1}^{\infty}$, сходящиеся к $u(x^0)$ и $u(y^0)$ соответственно, члены которых удовлетворяют неравенству $u(x^n) \geq u(y^n)$. Тогда по свойству сходящихся последовательностей для пределов последовательностей $\{u(x^n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{u(y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено соотношение $u(x^0) \geq u(y^0)$. Так как по определению функции полезности $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$, то из $u(x^0) \geq u(y^0)$ следует $x^0 \succsim y^0$. Таким образом, отношение $\succsim$ непрерывно.

8. Рассмотрите рациональное отношение предпочтения $\succsim$. Покажите, что если $u(x) = u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \sim y$, и что если $u(x) > u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \succ y$, то $u(\cdot)$ — функция полезности, представляющая отношение предпочтения $\succsim$.

Решение.

Нам нужно доказать, что если $x \succsim y$, то $u(x) \geq u(y)$, и что если $u(x) \geq u(y)$, то $x \succsim y$.

Предположим сначала, что $x \succsim y$. Если, кроме того, верно, что $y \succsim x$, значит, $x \sim y$, следовательно $u(x) = u(y)$. Если же, наоборот, неверно, что $y \succsim x$, значит, $x \succ y$. Следовательно, $u(x) > u(y)$. Таким образом, если $x \succsim y$, то $u(x) \geq u(y)$.

Теперь докажем в другую сторону. Предположим, что $u(x) \geq u(y)$. Если, кроме того, $u(x) = u(y)$, то $x \sim y$. Если же, наоборот, $u(x) > u(y)$, то $x \succ y$. Таким образом, если $u(x) \geq u(y)$, то $x \succsim y$.

9. Рассмотрите следующие определения квазивогнутости функции (полезности). Покажите, что эти определения эквивалентны.

Определение 1. Функция $u(x)$ квазивогнута, если для t из множества значений множество $\{x \in X : u(x) \geq t\}$ выпукло.

Определение 2. Функция $u(x)$ квазивогнута, если для любых двух наборов x и y $(x, y \in X)$ выполнено $u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \min[u(x), u(y)]$ для $\forall\, \alpha \in [0,1]$.

Решение.

(1) Покажем, что из определения 1 следует определение 2.

Рассмотрим произвольные наборы z и y. Отношение предпочтения представимо функцией полезности, и для двух наборов выполнено либо $u(z)\geq u(y)$, либо $u(y)\geq u(z)$, либо $u(z)=u(y)$. Предположим сначала, что $u(z)\geq u(y)$. Рассмотрим множество $\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$, где $t=u(y)$. Тогда, $y\in\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$ и, так как $u(z)\geq u(y)$, $z\in\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$. Поскольку по определению 1 множество $\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$ выпуклое, то набор $\alpha y+(1-\alpha)z\in\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$ при $\forall\,\alpha\in[0,1]$. Это означает, что $u(\alpha y+(1-\alpha)z)\geq t=u(y)$. А это, в свою очередь, означает $u(\alpha y+(1-\alpha)z)\geq\min[u(y),u(z)]$ для $\forall\,\alpha\in[0,1]$. Аналогично рассматривается случай $u(y)\geq u(z)$.

(2) Докажем, что из определения 2 следует определение 1.

Рассмотрим $y,z\in\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$. Тогда $u(y)\geq t$ и $u(z)\geq t$. По определению 2 для квазивогнутой функции выполнено $u(\alpha y+(1-\alpha)z)\geq\min[u(y),u(z)]$ для $\forall\,\alpha\in[0,1]$, а значит, $u(\alpha y+(1-\alpha)z)\geq t$. Таким образом, если $y,z\in\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$, то и $\alpha y+(1-\alpha)z\in\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$, что и означает выпуклость множества $\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$.

10. Докажите или опровергните следующие утверждения.

(а) Если предпочтения выпуклы, то функция полезности квазивогнута.

(б) Если функция полезности квазивогнута, то предпочтения выпуклы.

Решение.

(а) Рассмотрим $y,z\in\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$. Чтобы показать, что функция полезности квазивогнута, требуется доказать, что множество $\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$ выпукло, т. е. $\alpha y+(1-\alpha)z\in\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$. Так как отношение предпочтений представимо функцией полезности, то оно рационально, т. е. полно и транзитивно. В силу полноты выполнено либо $z\succsim y$ $(u(z)\geq u(y))$, либо $y\succsim z$ $(u(y)\geq u(z))$, либо и то и другое. Предположим сначала, что $z\succsim y$. Тогда в силу выпуклости предпочтений получим, что $\alpha z+(1-\alpha)y\succsim y$ для $\forall\,\alpha\in[0,1]$. По определению функции полезности $u(\alpha z+(1-\alpha)y)\geq u(y)$. Так как $y\in\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$, то $u(y)\geq t$, следовательно, $u(\alpha z+(1-\alpha)y)\geq t$, что означает $\alpha y+(1-\alpha)z\in\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$ для $\forall\,\alpha\in[0,1]$. Аналогично рассматривается случай, когда $y\succsim z$.

(б) Рассмотрим три набора $x,y,z\in X$ такие, что $x\succsim y$ и $z\succsim y$. По определению функции полезности: $u(x)\geq u(y)$ и $u(z)\geq u(y)$. Так как функция квазивогнута, то множество $\{x\in X{:}\,u(x)\geq t\}$, где t принадлежит множеству значений $u(x)$, выпукло. Рассмотрим множество $\{x \in X : u(x) \geq t\}$, где $t = u(y)$. Тогда $x, z \in \{x \in X : u(x) \geq t\}$. Следовательно, в силу выпуклости множества $\alpha x + (1-\alpha) z \in \{x \in X : u(x) \geq t\}$ для $\forall\, \alpha \in [0,1]$, т. е. $u(\alpha x + (1-\alpha) z) \geq t = u(y)$. Отсюда по определению функции полезности получаем $\alpha x + (1-\alpha) z \succsim y$ для $\forall\, \alpha \in [0,1]$.

11. **(а)** Покажите, что если функция полезности вогнута, то она квазивогнута, а следовательно, предпочтения, представимые вогнутой функцией полезности, выпуклы.

(б) Проверьте выпуклость предпочтений:
$x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \geq y_1^{\alpha} y_2^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$;
$x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $-(x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2 \geq -(y_1 - a)^2 - (y_2 - b)^2$.

Решение.

(а) Если функция полезности вогнута, то по определению вогнутости $u(\alpha z + (1-\alpha) y) \geq \alpha u(z) + (1-\alpha) u(y)$ для любых $\alpha \in [0,1]$. Нужно показать, что множество $\{x \in X : u(x) \geq t\}$ выпукло. Рассмотрим $y, z \in \{x \in X : u(x) \geq t\}$. Нужно показать, что $\alpha z + (1-\alpha) y \in \{x \in X : u(x) \geq t\}$ для всех $\alpha \in [0,1]$. Так как $z \in \{x \in X : u(x) \geq t\}$, то $u(z) \geq t$, следовательно, для $\alpha \in [0,1]$, $\alpha u(z) \geq \alpha t$. Аналогично для y выполнено $u(y) \geq t$, откуда $(1-\alpha) u(y) \geq (1-\alpha) t$. Просуммировав неравенства, получим $\alpha u(z) + (1-\alpha) u(y) \geq t$. Так как функция $u(x)$ вогнута, то $u(\alpha z + (1-\alpha) y) \geq \alpha u(z) + (1-\alpha) u(y) \geq t$, т. е. $u(\alpha z + (1-\alpha) y) \geq t$, а значит, $\alpha z + (1-\alpha) y \in \{x \in X : u(x) \geq t\}$ для всех $\alpha \in [0,1]$.

Таким образом, предпочтения, представимые вогнутой функцией полезности, являются выпуклыми.

(б) Указанные предпочтения представимы функцией полезности. Так как по определению функции полезности $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $u(x) \geq u(y)$, в качестве функции полезности можно рассматривать функцию $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$. Функция дважды дифференцируема, поэтому можно воспользоваться дифференциальным критерием вогнутости. Если матрица Гессе отрицательно полуопределена, то функция вогнута, и если отрицательно определена, то строго вогнута.

Для рассматриваемой функции матрица Гессе:

$$\begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1) x_1^{\alpha-2} x_2^{1-\alpha} & \alpha(1-\alpha) x_1^{\alpha-1} x_2^{-\alpha} \\ \alpha(1-\alpha) x_1^{\alpha-1} x_2^{-\alpha} & -\alpha(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha-1} \end{vmatrix}.$$

Так как $\alpha < 1$, то при $x_1 > 0, x_2 > 0$ $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$. Главные миноры чередуют знаки начиная с отрицательного. Аналогичный результат получим, если «поменяем местами» x_1 и x_2. Таким образом, функция строго вогнута на положительных наборах, а значит, вогнута. Следовательно, предпочтения выпуклы и строго выпуклы на положительных наборах.

Предпочтения $x \succsim y$ тогда и только тогда, когда $-(x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2 \geq$ $\geq -(y_1 - a)^2 - (y_2 - b)^2$ также представимы функцией полезности:

$$u(x_1, x_2) = -(x_1 - a)^2 - (x_2 - b)^2.$$

Матрица Гессе для рассматриваемой функции:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Тогда $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$. Следовательно, функция строго вогнута, а значит и вогнута. Следовательно, предпочтения выпуклы и строго выпуклы.

12. Пусть x^0 — набор, который выбран потребителем при ценах $p^0 = (p_1^0, \bar{p}_2, ..., \bar{p}_N)$, и пусть цена p_1 возросла. Обозначим новый вектор цен $p' = (p_1', \bar{p}_2, ..., \bar{p}_N)$, а соответствующий набор, выбранный потребителем, x'. Потребитель обладает начальными запасами благ $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N)$ и тратит весь свой доход. Известно, что до и после изменения цены потребитель является чистым покупателем первого блага.

(а) Покажите, что новый набор допустим при старых ценах. Как изменится благосостояние потребителя?

(б) Покажите, что и старый набор доступен при новых ценах.

Решение.

(а) Так как потребитель тратит весь свой доход, то $p'x' = p'\omega$. Добавим и вычтем из левой части $p_1^0 x'_1$: $p'x' = p_1' x_1' + \bar{p}_2 x_2' + \ldots + \bar{p}_N x_N' + p_1^0 x_1' - p_1^0 x_1'$. Так как изменится только одна цена p_1, то $\bar{p}_2 x_2' + \ldots \bar{p}_N x_N' + p_1^0 x_1' = p^0 x'$. Тогда $p'x' = p_1' x'_1 + p^0 x' - p_1^0 x_1'$, откуда $p'x' = p^0 x' + (p_1' - p_1^0) x_1'$. Так как $p'x' = p'\omega$, то $p^0 x' + (p_1' - p_1^0) x_1' = p'\omega$.

В то же время $p'\omega = p_1'\omega_1 + \overline{p}_2\omega_2 + \ldots + \overline{p}_N\omega_N + p_1^0\omega_1 - p_1^0\omega_1$. Так как изменяется только цена p_1, то $\overline{p}_2\omega_2 + \ldots + \overline{p}_N\omega_N + p_1^0\omega_1 = p^0\omega$. Следовательно, $p'\omega = p_1'\omega_1 + p^0\omega - p_1^0\omega_1 = p^0\omega + (p_1' - p_1^0)\omega_1$.

Таким образом, $p^0x' + (p_1' - p_1^0)x_1' = p^0\omega + (p_1' - p_1^0)\omega_1$.

Так как потребитель является чистым покупателем первого блага, то $x_1' > \omega_1$, а значит, $p^0x' < p^0\omega$. То есть новый набор доступен при старых ценах. Если при старых ценах он не был выбран, то благосостояние потребителя при новых ценах не возросло.

(б) Так как потребитель тратит весь свой доход, то $p^0x^0 = p^0\omega$. Добавим и вычтем из левой части $p_1'x_1^0$:

$$p^0x^0 = p_1^0x_1^0 + \underbrace{\overline{p}_2x_2^0 + \ldots + \overline{p}_Nx_N^0 + p_1'x_1^0}_{p'x^0} - p_1'x_1^0 = p'x^0 + (p_1^0 - p_1')x_1^0.$$

Добавим и вычтем из правой части $p_1'\omega_1$:

$$p^0\omega = p_1^0\omega_1 + \underbrace{\overline{p}_2\omega_2 + \ldots + \overline{p}_N\omega_N + p_1'\omega_1}_{p'\omega} - p_1'\omega_1 = p'\omega + (p_1^0 - p_1')\omega_1.$$

Так как $x_1^0 < \omega_1$ и $(p_1^0 - p_1') < 0$, следовательно, $p'x^0 < p'\omega$.

13. Пусть $X = R_+^N$, $N \geq 2$, доход $R > 0$, вектор цен $p \geq 0$ и $p \neq 0$. Выведите с использованием теоремы Куна—Таккера маршаллианский спрос для функций.

(а) $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$, $N = 2$;

(б) $u(x_1, x_2) = (x_1)^2 + (x_2)$, $N = 2$;

(в) $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$, $N = 2$;

(г) $u(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$.

(д) Для задачи пункта **(г)** проверьте выполнение условий второго порядка для случая $N = 2$.

Решение.

(а) Задача потребителя:

$$\begin{cases} \sqrt{x_1} + x_2 \to \max\limits_{x_1, x_2 \geq 0} \\ p_1x_1 + p_2x_2 \leq R \end{cases}.$$

В случае $N=2$ и $p \geq 0$ и $p \neq 0$ обе цены одновременно не могут быть равны нулю. Начнем анализ со случая, когда одна из цен равна нулю. Например, цена второго блага $p_2=0$ и $p_1>0$. Тогда потребитель весь свой доход тратит на благо x_1 и предъявляет неограниченный спрос на второе благо, а значит, решение задачи не существует. Аналогична ситуация и в случае $p_1=0$ и $p_2>0$ — спрос на благо x_1 будет неограничен. Это связано с тем, что предпочтения, представимые заданной функцией полезности, строго монотонны.

Рассмотрим случай положительных цен. Заметим, что функция полезности вогнута (сумма вогнутых функций), а значит, теорема Куна—Таккера дает необходимые и достаточные условия максимума задачи:

$$\begin{cases} \sqrt{x_1}+x_2 \to \max\limits_{x_1, x_2 \geq 0}, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R \end{cases}$$

где $R>0$ — доход потребителя; p_1, $p_2>0$ — цены благ x_1 и x_2 соответственно.

Выпишем Лагранжиан для этой задачи:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \sqrt{x_1}+x_2+\lambda(R-p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

Условия Куна-Таккера:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 \leq 0 \text{ и } = 0, \text{ если } x_1 > 0; \qquad (\mathbf{13}.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - \lambda p_2 \leq 0 \text{ и } = 0, \text{ если } x_2 > 0; \qquad (\mathbf{13}.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - p_1 x_2 - p_2 x_2 \geq 0 \text{ и } = 0, \text{ если } \lambda > 0. \qquad (\mathbf{13}.3)$$

Из условия (**13**.2) следует, что $1 \leq \lambda p_2$. При $\lambda = 0$ условие (**13**.2) не выполнено, а значит, $\lambda > 0$ и, таким образом, условие (**13**.3) выполнено как равенство. Этот результат согласуется *с утверждением 3.D.2* (*ii*), *MWG 3.D* и *теоремой 23* (*v*), *БЖЦ 2.1*, согласно которым если предпочтения локально ненасыщаемы, то бюджетное ограничение в задаче максимизации полезности выполнено как равенство на решении задачи.

Покажем, что в решении x_1 всегда больше нуля. Рассмотрим два набора: $\left(\tilde{x}_1 = \varepsilon,\ \tilde{x}_2 = \dfrac{R-\varepsilon p_1}{p_2}\right)$, где $\varepsilon > 0$, и $\left(\tilde{\tilde{x}}_1 = 0,\ \tilde{\tilde{x}}_2 = \dfrac{R}{p_2}\right)$, удовлетворяющих бюджетному ограничению. Всегда существует такая величина $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2$, что выполнено $u(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) > u\left(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2\right)$, следовательно, набор $\left(\tilde{\tilde{x}}_1 = 0,\ \tilde{\tilde{x}}_2 = \frac{R}{p_2}\right)$ не может являться решением задачи потребителя.

Заметим, что использовать условия первого порядка для доказательства того, что $x_1 > 0$, некорректно, поскольку в нуле условие (**13.**1) не определено.

Рассмотрим $x_1 \neq 0$, тогда условие (**13.**1) $\frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 \leq 0$ всегда выполняется как равенство. Так как из условия (**13.**2) следует, что $1 \leq \lambda p_2$, то $\frac{1}{2\sqrt{x_1}} \geq \frac{p_1}{p_2}$, причем $\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2}$, если $x_2 > 0$. Таким образом, всегда $x_1 \leq \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2$, и $x_1 = \left(\frac{p_2}{2p_1}\right)^2$, если $x_2 > 0$.

В то же время $p_1 x_1 \leq R$, поэтому $x_1 \leq \frac{R}{p_1}$. Причем $x_1 = \frac{R}{p_1}$, если $x_2 = 0$.

Следовательно, $x_1 \leq \min\left(\frac{p_2^2}{4p_1^2}, \frac{R}{p_1}\right)$. Покажем, что $x_1 = \min\left(\frac{p_2^2}{4p_1^2}, \frac{R}{p_1}\right)$. Действительно, если $x_2 = 0$, то $x_1 = \frac{R}{p_1}$, а если $x_2 > 0$, то $x_1 = \frac{p_2^2}{4p_1^2}$.

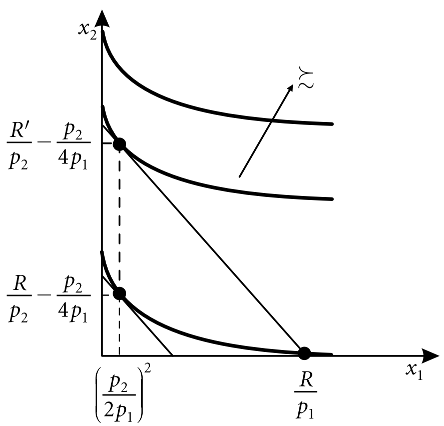

Рис. **13.**1

Теперь проанализируем, при каком условии $x_1 = \dfrac{R}{p_1}$, а при каком $x_1 = \dfrac{p_2^2}{4p_1^2}$.

Так как $x_1 = \dfrac{R}{p_1} \Leftrightarrow x_2 = 0$, то $\dfrac{R}{p_1} \le \dfrac{p_2^2}{4p_1^2}$. Таким образом, $x_1 = \dfrac{R}{p_1} \Leftrightarrow R \le \dfrac{p_2^2}{4p_1}$. Решение задачи: $x_1(p, R) = \dfrac{R}{p_1}$ и $x_2(p, R) = 0$, если $R \le \dfrac{p_2^2}{4p_1}$; $x_1(p, R) = \dfrac{p_2^2}{4p_1^2}$ и $x_2(p, R) = \dfrac{R}{p_2} - \dfrac{p_2}{4p_1}$, если $R > \dfrac{p_2^2}{4p_1}$ (см. рис. **13.**1).

(б) Прежде чем перейти к решению задачи, изобразим решение задачи графически для случая $p_1, p_2 > 0$. (Если цена любого блага равна нулю, то задача не имеет решения.)

На рис. **13**.2.A и **13**.2.B наклон бюджетной линии таков, что в оптимальной точке потребитель будет потреблять только x_1 или только x_2 соответственно. На рис. **13**.2.C цены на товары x_1 и x_2 одинаковы, и потребителю безразлично, потреблять ли только товар x_1 или только товар x_2. Ни на одном из рисунков нет внутреннего решения. Заметим, что функция полезности не является ни вогнутой, ни квазивогнутой (покажите, что предпочтения не являются выпуклыми), а значит, теорема Куна—Таккера дает необходимые, но недостаточные условия.

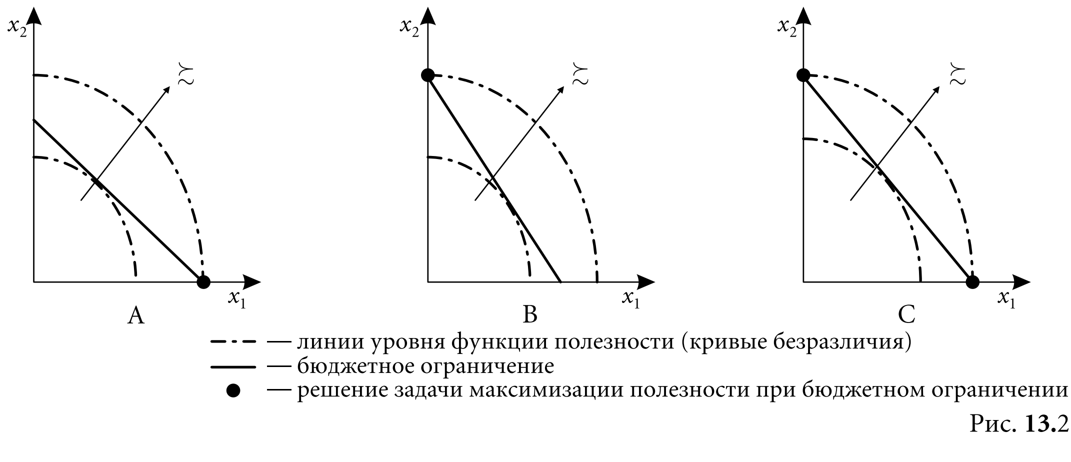

Рис. **13.**2

Задача записывается в виде

$$\begin{cases} (x_1)^2 + (x_2)^2 \to \max\limits_{x_1, x_2 \ge 0} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \le R. \end{cases}$$

Лагранжиан задачи: $L=(x_1)^2+(x_2)^2+\lambda(R-p_1x_1-p_2x_2)$, а условия Куна—Таккера:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1-\lambda p_1\le 0, =0, \text{ если } x_1>0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2-\lambda p_2\le 0, =0, \text{ если } x_2>0.$$

$$R-p_1x_1-p_2x_2\ge 0 \text{ и } \lambda(R-p_1x_1-p_2x_2)=0.$$

Пусть $\lambda=0$, тогда $\begin{cases} x_1-0\le 0\Rightarrow x_1=0 \\ x_2-0\le 0\Rightarrow x_2=0 \end{cases}$.

Пусть $\lambda>0$, тогда $\begin{cases} 2x_1\le \lambda p_1 \\ 2x_2\le \lambda p_2 \end{cases}$, и возможны три случая:

(1) Пусть $x_1>0$ и $x_2=0$. Тогда так как $\lambda>0$, то $R-p_1x_1-p_2x_2=0$, откуда при $x_2=0$ получим $x_1=\frac{R}{p_1}$.

(2) Пусть $x_1=0$ и $x_2>0$. Аналогично предыдущему случаю $x_1=0$, $x_2=\frac{R}{p_2}$.

(3) Пусть $x_1>0$ и $x_2>0$. Разделим $2x_1=\lambda p_1$ на $2x_2=\lambda p_2$ (это допустимо, поскольку все величины положительны): $\frac{x_1}{x_2}=\frac{p_1}{p_2}$, откуда $x_1=\frac{x_2p_1}{p_2}$. Из бюджетного ограничения получим $\frac{(p_1)^2}{p_2}x_2+p_2x_2=R$, откуда $x_2=\frac{Rp_2}{p_1^2+p_2^2}$ и соответственно $x_2=\frac{Rp_1}{p_1^2+p_2^2}$.

Сравним значения целевой функции в точках, удовлетворяющих условиям Куна—Таккера:

I. При $x_1=0$ и $x_2=0$ целевая функция принимает значение 0.

II. При $x_1=\frac{R}{p_1}$, $x_2=0$ значение целевой функции $\left(\frac{R}{p_1}\right)^2$.

III. При $x_1=0$, $x_2=\frac{R}{p_2}$ значение целевой функции $\left(\frac{R}{p_2}\right)^2$.

IV. При $x_1=\frac{Rp_1}{p_1^2+p_2^2}$, $x_2=\frac{Rp_2}{p_1^2+p_2^2}$ значение целевой функции $\frac{R^2}{p_1^2+p_2^2}$.

Случай I не может быть решением ни при каких значениях параметров. То же самое можно сказать и о случае IV, поскольку $\frac{R^2}{p_1^2 + p_2^2}$ всегда меньше $\left(\frac{R}{p_2}\right)^2$ и $\left(\frac{R}{p_1}\right)^2$ (числители одинаковы, а знаменатель в случае IV больше, так как по условию обе цены положительны).

Сравнение величин $\left(\frac{R}{p_2}\right)^2$ и $\left(\frac{R}{p_1}\right)^2$ зависит от соотношения p_1 и p_2 (отношение $\frac{p_1}{p_2}$ — наклон бюджетного ограничения). Если $p_1 = p_2$, то оба решения — II и III дают максимальное значение целевой функции (рис. **13**.2.C). Если $p_1 > p_2$, то решение — это случай III (рис. **13**.2.B). Если же $p_1 < p_2$, то решение — это случай II (рис. **13**.2.A).

(в) Задача потребителя:

$$\begin{cases} \min\{x_1, x_2\} \to \max\limits_{x_1,\, x_2 \geq 0} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq R \end{cases}.$$

Для локально ненасыщаемых предпочтений бюджетное ограничение в задаче потребителя будет выполнено как равенство в решении задачи. Предпочтения, представимые функцией полезности $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$, являются локально ненасыщаемыми, так как в окрестности любого набора найдется набор, больший по обеим координатам, а значит, лучший, поскольку увеличение обеих координат даст потребителю большую полезность.

Рассмотрим случай $p_1 > 0$ и $p_2 = 0$ (случай $p_1 = 0$, $p_2 > 0$ рассматривается аналогично). Тогда потребитель потратит весь свой доход на первое благо $x_1(p, R) = \frac{R}{p_1}$, а спрос на второе благо составит $x_2(p, R) = \left[\frac{R}{p_1}, +\infty\right)$. Заметим, что в отличие от задач, рассмотренных в пунктах **(а)** и **(б)** в этой задаче при нулевой цене задача имеет решение. Это связано с тем, что предпочтения потребителей в пунктах **(а)** и **(б)**, строго монотонны, тогда как в рассматриваемом случае предпочтения только монотонны, но не строго монотонны.

Для решения задачи в случае $p_1, p_2 > 0$ необходимо показать, что в решении $x_1 = x_2$, и выразить из бюджетного ограничения $x_1(p, R) = x_2(p, R) = \dfrac{R}{p_1 + p_2}$.

(г) В задаче **5** показано, что если $f\colon R \to R$ строго возрастающая функция и $u\colon X \to R$ функция полезности, представляющая отношение предпочтения $\succsim$, то функция $v\colon X \to R$, задаваемая как $v(x) = f(u(x))$, также является функцией полезности, представляющей отношение предпочтения $\succsim$. Заметим также, что решением задачи

$$\begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i} \to \max\limits_{x_1, \dots, x_n \geq 0} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \leq R \end{cases}$$

при $R, p >> 0$ не может быть набор, в котором хотя бы одно из благ потребляется в нулевом количестве, поскольку в этом случае полезность потребителя равна нулю. Тогда как при положительном доходе он мог бы обеспечить себе положительную полезность. Прологарифмировав функцию полезности, мы сужаем множество определения функции, так как на наборах, содержащих нулевую компоненту, такая функция не определена. Однако, так как решение не содержится в «отсекаемых» наборах, такое преобразование допустимо и существенно упрощает вычисления.

Прологарифмировав исходную функцию полезности, получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n \to \max\limits_{x_1, \dots, x_n} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i \leq R. \end{cases}$$

Условия первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \ldots \\ \dfrac{\alpha_n}{x_n} - \lambda p_n = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i = R. \end{cases}$$

Условия первого порядка записаны на равенства, так как решение внутреннее. Предпочтения, представимые функцией Кобба—Дугласа, локально ненасыщаемы, а значит, бюджетное ограничение выполняется как равенство.

Умножим условия первого порядка $\frac{\alpha_i}{x_i} - \lambda p_i = 0$ на величину x_i: $\alpha_i - \lambda p_i = 0$. Сложим полученные n выражений: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, т. е. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \lambda R$, откуда $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}{R}$. Теперь, подставляя множитель Лагранжа в условия первого порядка, получим, что $x_i(p, R) = \frac{\alpha_i}{\lambda p_i} = \frac{\alpha_i R}{p_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j}$ — таким образом, расходы на каждый товар являются фиксированной долей дохода потребителя.

Если не все цены положительны, то потребитель тратит положительный доход на блага, цены на которые больше нуля. Если цена блага равна нулю, то увеличение потребления такого блага не нарушает бюджетное ограничение, но приводит к росту полезности. Поэтому решение задачи, когда хотя бы одна цена нулевая и доход положителен, не существует. Если же доход нулевой, то потребитель не может приобрести блага, цены на которые больше нуля. Тогда увеличение потребления благ, цена на которые нулевая, не приводит к увеличению полезности.

(д) В точке решения $x(p, R)$ должны быть выполнены условия второго порядка, т. е.:

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 \\ -p_1 & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -p_2 & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0.$$

Проверим выполнение этих условий для функции $u(x) = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2$.

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 \\ -p_1 & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -p_1 \\ -p_1 & -\frac{\alpha_1}{x_1^2} \end{vmatrix} = -p_1^2 < 0.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -p_2 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_1 \\ -p_1 & -\dfrac{\alpha_1}{x_1^2} & 0 \\ -p_2 & 0 & -\dfrac{\alpha_2}{x_2^2} \end{vmatrix} = p_1^2 \frac{\alpha_2}{x_2^2} + p_2^2 \frac{\alpha_1}{x_1^2} > 0.$$

Это выполнено для любых $(x_1, x_2) >> 0$, а значит, и для набора, который является решением задачи пункта **(г)**.

14. Согласно *утверждению 3.D.3* (*iii*) *MWG 3D* и *теореме 24* (*iv*), *БЖЦ 2.1* косвенная функция полезности квазивыпукла по ценам и доходу, т. е. множество $\{(p, R): v(p, R) \le \bar{v}\}$, где p — вектор цен; R — доход, выпукло.

(а) Покажите, что функция квазивыпукла и по любым двум переменным.

(б) Покажите, что квазивогнутость функции полезности не является необходимым условием квазивыпуклости косвенной функции полезности.

Решение.

Покажем, что если косвенная функция полезности $v(p, R)$ квазивыпукла по всем переменным, то она квазивыпукла и по любым двум переменным — например, по цене p_i и доходу R. По определению квазивыпуклости множество $\{(p_1, \ldots, p_N, R): v(p_1, \ldots, p_N, R) \le \bar{v}\}$ выпукло. Рассмотрим вектора $(\hat{p}_i, \hat{R}, \bar{p}_{-i})$ и $(\tilde{p}_i, \tilde{R}, \bar{p}_{-i})$, принадлежащие множеству $\{(p_1, \ldots, p_N, R): v(p_1, \ldots, p_N, R) \le \bar{v}\}$. Так как это множество выпукло, то вектор $(\alpha\hat{p}_i + (1-\alpha)\tilde{p}_i, \alpha\hat{R} + (1-\alpha)\tilde{R}, \alpha\bar{p}_{-i} + (1-\alpha)\bar{p}_{-i})$ при $\forall\, \alpha \in [0,1]$ также принадлежит этому множеству. Следовательно, если $(\hat{p}_i, \hat{R})$ и $(\tilde{p}_i, \tilde{R})$ принадлежат множеств $\{(p_i, R, \bar{p}_{-i}): v(p_i, R, \bar{p}_{-i}) \le \bar{v}\}$, где вектор $\bar{p}_{-i}$ — фиксирован, то и $(\alpha\hat{p}_i + (1-\alpha)\tilde{p}_i, \alpha\hat{R} + (1-\alpha)\tilde{R}) \in$ $\in \{(p_i, R, \bar{p}_{-i}): v(p_i, R, \bar{p}_{-i}) \le \bar{v}\}$ при $\forall\, \alpha \in [0,1]$, а это и означает выпуклость множества $\{(p_i, R, \bar{p}_{-i}): v(p_i, R, \bar{p}_{-i}) \le \bar{v}\}$. Таким образом, косвенная функция полезности квазивыпукла по цене блага i и доходу.

(б) Выше, в пункте **(а)**, уже упоминалось, что согласно *утверждению 3.D.3* (*iii*), *MWG 3D* и *теореме 24* (*iv*), *БЖЦ 2.1* косвенная функция полезности квазивыпукла. Таким образом, ответ на поставленный вопрос известен: квазивогнутость функции полезности не является необходимым условием квазивыпуклости косвенной функции полезность. Для того чтобы это доказать, необходимо привести контрпример. Рассмотрим предпочтения, представимые функцией полезности $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2) = (x_1)^2 + (x_2)^2$. Множество $\{(x_1, x_2) : u(x_1, x_2) \geq \bar{u}\}$ не является выпуклым, так как найдутся две точки, принадлежащие множеству, такие, что не все точки отрезка, соединяющего их, принадлежат множеству $\{(x_1, x_2) : u(x_1, x_2) \geq \bar{u}\}$. Это означает, что функция не является квазивогнутой (рис. **14.**1).

В задаче **13** для заданной функции найдены маршаллианский спрос и соответствующая косвенная функция полезности:

$$v(p_1, p_2, R) = \max\left\{\left(\frac{R}{p_1}\right)^2, \left(\frac{R}{p_2}\right)^2\right\}.$$

Эта функция является квазивыпуклой по (p_1, p_2, R) (доказательство остается в качестве упражнения). В пространстве цен линии уровня косвенной функции полезности выглядят следующим образом (рис. **14.**2).

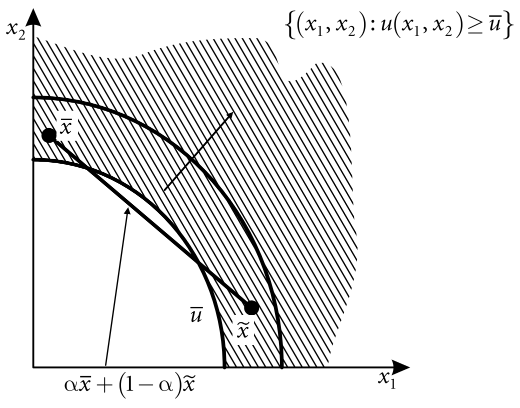

Рис. **14.**1

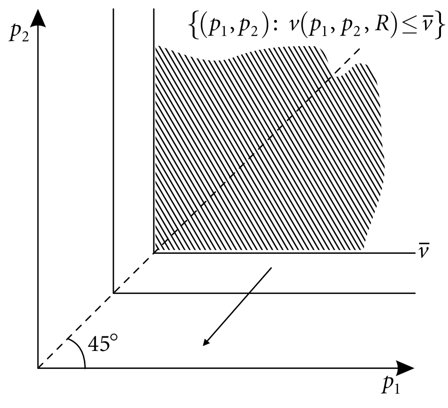

Рис. **14.**2

15. Пусть в экономике N благ и функция полезности потребителя дифференцируема и имеет вид: $u(x) = x_1 + f(x_2, ..., x_N)$, причем f — возрастающая, строго вогнутая функция. Пусть $p_1 = 1$. Верно ли, что в данной экономике при достаточно большом доходе потребителя косвенная функция полезности потребителя может быть представлена в виде: $v(p, R) = R + \varphi(p)$?

Решение.

Задача потребителя:

$$\begin{cases} f(x_2, ..., x_N) + x_1 \to \max\limits_{x_1, ..., x_N \ge 0} \\ x_1 + \sum\limits_{i=2}^{N} p_i x_i \le R. \end{cases}$$

Заметим, что при достаточно большом доходе потребитель будет потреблять все блага в положительном количестве (см. **13(б)**). Тогда, поскольку по условию f — возрастающая функция и функция полезности возрастает по первому благу, то бюджетное ограничение будет выполняться как равенство: $x_1 + \sum\limits_{i=2}^{N} p_i x_i = R$.

Тогда, выразив x_1 из бюджетного ограничения и подставив в функцию полезности, перейдем к задаче на безусловный экстремум:

$$f(x_2, ..., x_N) + R - \sum_{i=2}^{N} p_i x_i \to \max_{x_2, ..., x_N \ge 0}.$$

Поскольку R — константа, эта задача эквивалентна следующей:

$$f(x_2, ..., x_N) - \sum_{i=2}^{N} p_i x_i \to \max_{x_2, ..., x_N \ge 0}.$$

Таким образом, очевидно, что спрос на блага $x_2, ..., x_N$, получаемый как решение последней задачи, не будет зависеть от дохода: $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(p)$, $i = 2, ..., N$.

Из бюджетного ограничения найдем маршаллианский спрос на первое благо: $\tilde{x}_1(p, R) = R - \sum\limits_{i=2}^{N} p_i \tilde{x}_i(p)$. Тогда косвенная функция полезности имеет вид:

$$v(p, R) = \left(R - \sum_{i=2}^{N} p_i \tilde{x}_i(p) \right) + f(\tilde{x}_2(p), ..., \tilde{x}_N(p)) =$$

$$= R - \left(\sum_{i=2}^{N} p_i \tilde{x}_i(p) - f(\tilde{x}_2(p), ..., \tilde{x}_N(p)) \right) \equiv R + \varphi(p),$$

где $\varphi(p) \equiv -\left(\sum\limits_{i=2}^{N} p_i \tilde{x}_i(p) - f(\tilde{x}_2(p), ..., \tilde{x}_N(p)) \right)$.

16[4]**.** Рассмотрите аддитивно-сепарабельную дважды дифференцируемую функцию полезности: $u(x)=\sum_{i=1}^{N} u_i(x_i)$, где для всех i выполнено $u_i'(x_i)>0$. Пусть потребитель обладает доходом $R>0$, а цены товаров заданы вектором $p>>0$. Известно, что $x(p, R)>>0$.

(**а**) Покажите, что если для одного товара предельная полезность в $x(p, R)$ возрастает, то предельная полезность всех остальных товаров в $x(p, R)$ убывает.

(**б**) Покажите, что если предельная полезность по всем товарам убывает, то все товары являются нормальными.

(**в**) Покажите, что если вся предельная полезность по всем товарам убывает, то предельная полезность дохода убывает по доходу.

Решение.

(**а**) Спрос $x(p, R)$ находится из решения задачи:

$$\begin{cases} u(x_1, \dots, x_N) \to \max\limits_{x_1, \dots, x_n \geq 0} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} p_i x_i \leq R \end{cases} \tag{16.1}$$

Поскольку в точке решения $x(p, R)$ выполнены условия второго порядка, то:

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 \\ -p_1 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -p_2 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ -p_1 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -p_2 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -p_3 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} < 0$$

и т. д.

[4] По мотивам задачи 3.G.4, MWG 3 и задачи 1.54: Jehle G. A., Reny P. J. Advanced Microeconomic Theory. Addison Wesley, 2001.

Поскольку функция полезности имеет вид: $u(x)=\sum\limits_{i=1}^{N} u_i(x_i)$, то $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=0$, если $i\neq j$, и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=u_i''$, если $i=j$.

Рассмотрим определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -p_2 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 \\ -p_1 & u_1'' & 0 \\ -p_2 & 0 & u_2'' \end{vmatrix} = -p_1^2 u_2'' - p_2^2 u_1'' > 0.$$

По условию предельная полезность одного товара возрастает, без потери общности пусть это будет первый товар. Тогда $u_1''>0$. Для того чтобы выполнялось условие $-p_1^2 u_2'' - p_2^2 u_1'' > 0$, необходимо, чтобы $u_2''<0$.

Заметим, что условие $-p_1^2 u_j'' - p_j^2 u_j'' > 0$ должно выполняться для всех $j=2,\ldots,N$, поскольку не имеет значения, как нумеруются переменные.

(б) В задаче нужно показать, что спрос на все блага растет по доходу при неизменных ценах.

1-й способ. Так как $u_i'(x)>0$ для $i=1,\ldots,N$, то предпочтения строго монотонны, следовательно, локально ненасыщаемы. Согласно *утверждению 3.D.2* (*ii*), *MWG 3D* и *теореме 23* (*v*), *БЖЦ 2.1* если предпочтения локально ненасыщаемы, то бюджетное ограничение в задаче потребителя выполнено как равенство.

Продифференцировав бюджетное ограничение, которое в решении выполнено как тождество, по R, получим:

$$1=\sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial x_i}{\partial R}. \qquad (\mathbf{16}.2)$$

Так как решение по условию внутреннее, то условия первого порядка выполнены как равенства.

Продифференцируем условия первого порядка $u_i'(x_i(p,R))=\lambda p_i$ по R:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}\cdot\frac{\partial x_i(p,R)}{\partial R}=\frac{\partial \lambda}{\partial R} p_i. \qquad (\mathbf{16}.3)$$

Замечание. Обращаем внимание на то, что λ — множитель Лагранжа при бюджетном ограничении — не константа!

Выразим из (**16**.3) $\dfrac{\partial x_i}{\partial R}$ и подставим в (**16**.2):

$$1=\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{u_i''}\right)\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial R}.$$

Заметим, что так как $u_i''<0$ для любого $i=1,\ldots,N,\ p>>0$, то $\left(\sum_{i=1}^{N}\dfrac{p_i^2}{u_i''}\right)<0$, следовательно, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial R}<0$ (так как в левой части стоит положительная величина — число 1).

Таким образом, из (**16**.3) следует, что если $u_i''<0$, то $\dfrac{\partial x_i}{\partial R}>0$ для любого $i=1,\ldots,N$, т. е. все блага являются нормальными.

2-й способ. Поскольку по условию $u_i'(x)>0$ для $i=1,\ldots,N$, то предпочтения строго монотонны, а значит, в решении выполнено $px(p,R)=R$. Таким образом, если доход вырос, то спрос по крайней мере на одно благо также должен увеличиться. Обозначим это благо j.

Из условий первого порядка $\underbrace{u_i'(x_i(p,R))}_{>0}=\underbrace{\lambda p_i}_{>0}$, для всех $i=1,\ldots,N$, следует, что $u_i'(x_i(p,R))=\dfrac{p_i}{p_j}u_j'\big(x_j(p,R)\big)$ для всех $i=1,\ldots,N$. Так как $u_i''(x)<0$, то функции $u_i'(x)$ убывают. Следовательно, если спрос на благо j возрос, цены остались неизменны, то правая часть тождества уменьшилась. Следовательно, и левая часть уменьшилась. Это означает, что спрос на благо i, $x_i(p,R)$, возрос. Таким образом, благо i нормальное, и это выполнено для всех $i=1,\ldots,N$.

(в) В предыдущем пункте было показано, что $\dfrac{\partial\lambda(x(p,R))}{\partial R}<0$. Это означает, что предельная полезность убывает по доходу. Однако доказать утверждение можно и не используя экономический смысл множителя Лагранжа.

Для этого необходимо выяснить знак $\dfrac{\partial^2 v(p,R)}{\partial R^2}$. В рассматриваемой задаче $\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial R}=\sum_{i=1}^{N}\dfrac{\partial u_i(x(p,R))}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i(p,R)}{\partial R}$. Тогда

$$\frac{\partial^2 v(p,R)}{\partial R^2}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u_i(x(p,R))}{\partial x_i^2}\left(\frac{\partial x_i(p,R)}{\partial R}\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u_i(x(p,R))}{\partial x_i}\frac{\partial^2 x_i(p,R)}{\partial R^2}. \quad (\mathbf{16}.4)$$

По условию $\frac{\partial^2 u_i(x(p,R))}{\partial x_i^2}<0$ (предельные полезности по всем благам убывают). Так как $\left(\frac{\partial x_i(p,R)}{\partial R}\right)^2>0$, то первые N слагаемых в (**16**.4) отрицательны.

Продифференцируем дважды бюджетное ограничение:

$$\sum_{i=1}^{N}p_i\frac{\partial^2 x_i(p,R)}{\partial R^2}=0. \quad (\mathbf{16}.5)$$

Из условий первого порядка $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=\lambda p_i$ выразим цены $p_i=\frac{\lambda}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}$ и подставим в (**16**.5), откуда $\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial^2 x_i(p,R)}{\partial R^2}=0$, что означает, что сумма последних N слагаемых в (**16**.4) равна нулю. Таким образом, $\frac{\partial^2 v(p,R)}{\partial R^2}<0$, т. е. предельная полезность дохода убывает по доходу.

17. Пусть предпочтения потребителя локально ненасыщаемы и непрерывны. Выполнены все предпосылки *теоремы 37*, *БЖЦ 2.А*. Предположим, в экономике два блага x_1 и есть три товара, спрос потребителя задается функциями $x_i(p_1,p_2,R)=\frac{\alpha_i R}{p_i}$, $i=1,2$, где $\alpha_i>0$ и $\alpha_1+\alpha_2=1$. Восстановите функцию расходов.

Решение.

Так как по условию предпочтения локально ненасыщаемы и непрерывны, можно воспользоваться всеми соотношениями двойственности. Тогда

$$x_i(p_1,p_2,e(p,u))=h_i(p_1,p_2,u),$$

где $h_i(p_1,p_2,u)$ — компенсированный (хиксианский) спрос.

По лемме Шепарда $\frac{\partial e(p_1,p_2,u)}{\partial p_i}=h_i(p_1,p_2,u)$.

Следовательно, $\dfrac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_i} = x_i(p_1, p_2, e(p, u))$, т. е. $\dfrac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_i} = \dfrac{\alpha_i e(p_1, p_2, u)}{p_i}$, $i = 1, 2$.

Решим полученное дифференциальное уравнение для $i = 1$. $\ln e(p, u) = \alpha_1 \ln p_1 + c_1(p_2, u)$, откуда $e(p, u) = p_1^{\alpha_1} \exp\{c_1(p_2, u)\}$. Подставим полученную функцию во второе дифференциальное уравнение:

$$p_1^{\alpha_1} \exp\{c_1(p_2, u)\} \frac{\partial c_1(p_2, u)}{\partial p_2} = \frac{\alpha_2 p_1^{\alpha_1} \exp\{c_1(p_2, u)\}}{p_2}, \text{ откуда } \frac{\partial c_1(p_2, u)}{\partial p_2} = \frac{\alpha_2}{p_2}.$$

Решая последнее уравнение, получим $c_1(p_2, u) = \alpha_2 \ln p_2 + \ln c_0(u)$. Следовательно, $e(p_1, p_2, u) = c_0(u) p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$.

Для того чтобы восстановить функцию расходов полностью, требуется задать начальные условия. Так как предпочтения непрерывны, представимы непрерывной функцией полезности (см. *MWG 3C*, *утверждение 3.C.1*). Следовательно, функция расходов возрастает по полезности (см. *MWG 3E, утверждение 3.E.2*(*ii*)), т. е. все, что мы можем сказать, — это то, что $c_0(u)$ возрастает.

18. **(а)** Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая строго выпуклые локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Пусть функция расходов $e(p, u)$ дважды непрерывно дифференцируемая. Покажите, что для матрицы замещения Слуцкого $S(p, R)$ выполнено:

$$S(p, R)p = 0.$$

(б)[5] Покажите, что если дифференцируемые функции $\{x_i(p, R)\}_{i=1}^N$ удовлетворяют $\sum_{i=1}^n p_i x_i = R$, однородности нулевой степени и слабой аксиоме выявленных предпочтений, то при любых ценах p и доходе R соответствующая матрица Слуцкого отрицательно полуопределена.

[5] См. *MWG 2F*, *утверждение 2.F.2.*

(в) Покажите, что если $\{x_i(p, R)\}_{i=1}^{N}$ удовлетворяет $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = R$, а матрица Слуцкого, построенная по этим функциям, симметрична, то $x(p, R)$ является однородным нулевой степени по p и R.

Решение.

(а) *1-й способ.* Прежде чем приступить к решению, распишем, что означает выражение $S(p, R)p = 0$.

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial p_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_N}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial p_N} \end{bmatrix}.$$

Соответственно $S(p, R)p = 0$ означает, что $\sum_{j=1}^{N} \dfrac{\partial h_i(p_1, ..., p_n, u)}{\partial p_j} p_j = 0$ для $i = 1, \dots, N$.

Напомним, что по лемме Шепарда $\dfrac{\partial e(p, u)}{\partial p_i} = h_i(p, u)$. Так как компенсированный спрос однороден нулевой степени по ценам (см. *MWG*, *утверждение 3.E.3* или *БЖЦ 2.1*, *теорема 25*), то для $\lambda > 0$

$$h_i(\lambda p, u) - h_i(p, u) = 0. \qquad (\mathbf{18}.1)$$

Продифференцировав (**18**.1) по p_j, получим:

$$\frac{\partial h_i(\lambda p_1, ..., \lambda p_N, u)}{\partial p_j} \lambda = \frac{\partial h_i(p_1, ..., p_N, u)}{\partial p_j},$$

что можем записать:

$$\frac{\partial h_i(\lambda p_1, ..., \lambda p_N, u)}{\partial p_j} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial h_i(p_1, ..., p_N, u)}{\partial p_j}. \qquad (\mathbf{18}.2)$$

Теперь продифференцируем (**18**.1) по λ:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial h_i(\lambda p_1, ..., \lambda p_N, u)}{\partial p_j} p_j = 0. \qquad (\mathbf{18}.3)$$

Воспользовавшись (**18**.2) для $\lambda = 1$, преобразуем (**18**.3) к следующему виду:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial h_i(p_1, ..., p_N, u)}{\partial p_j} p_j = 0.$$

Таким образом, $S(p, R)p = 0$.

2-й способ. Элемент s_{ij} матрицы Слуцкого имеет вид:

$$s_{ij} = \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial R} x_j(p, R) = \frac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j}.$$

Тогда j-я компонента вектора строки $pS(p, R)$ может быть записана в виде:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \left(\frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial R} x_j(p, R) \right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} + x_j(p, R) p_i \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial R}.$$

Поскольку в силу локальной ненасыщаемости для $x(p, R)$ выполнено $px(p, R) = R$, $\forall\ p, R$, то, продифференцировав это тождество по R, получим:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial R} = 1. \qquad (\mathbf{18}.4)$$

С другой стороны, продифференцировав по p_j, имеем:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} + x_j(p, R) = 0. \qquad (\mathbf{18}.5)$$

Тогда из (**18**.4) и (**18**.5) следует, что

$$pS(p, R) = \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} + x_j(p, R) \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial R} = 0.$$

(б) *Шаг 1.* Докажем, что из выполнения условий: $\{x_i(p, R)\}_{i=1}^{N}$ — однородны нулевой степени, $\sum_{i=1}^{N} p_i x_i = R$ и $\{x_i(p, R)\}_{i=1}^{N}$ удовлетворяют слабой аксиоме выявленных предпочтений[6], следует, что при любом компенсированном изменении цен от (p, R) до $(p', R') = (p', p' \cdot x(p, R))$ имеет место закон спроса:

[6] Напомним формулировку: функция $x(p, R)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, если $px(p', R') \le R$ и $x(p, R) \ne x(p', R')$ означает, что $p'x(p, R) > R'$ для любых (p, R) и (p', R').

$$(p' - p)(x(p', R') - x(p, R)) \leq 0,$$

причем неравенство будет строгим, если $x(p, R) \neq x(p', R')$.

Доказательство

Если $x(p, R) = x(p', R')$, то результат очевиден: $(p' - p)(x(p', R') - x(p, R)) = 0$. Пусть $x(p, R) \neq x(p', R')$. Тогда

$$(p' - p)(x(p', R') - x(p, R)) = p'(x(p', R') - x(p, R)) - p(x(p', R') - x(p, R)). \quad (\mathbf{18}.6)$$

Рассмотрим первое слагаемое выражения (**18**.6). Поскольку рассматривается компенсированное изменение цен от p до p', то $p' \cdot x(p, R) = R'$. Кроме того, по условию $p' x(p', R') = R'$, следовательно,

$$p'(x(p', R') - x(p, R)) = 0. \quad (\mathbf{18}.7)$$

Рассмотрим второе слагаемое выражения (**18**.6). Поскольку $p'x(p, R) = R'$, это означает, что набор $x(p, R)$ доступен при ценах p' и доходе R'. Тогда по слабой аксиоме выявленных предпочтений из этого следует, что набор $x(p', R')$ *не должен* быть доступен при ценах p и доходе R, т. е. $px(p', R') > R$. Кроме того, по условию $px(p, R) = R$, тогда

$$p'(x(p', R') - x(p, R)) > 0. \quad (\mathbf{18}.8)$$

Таким образом, из (**18**.7) и (**18**.8) следует, что

$$(p' - p)(x(p', R') - x(p, R)) = p'(x(p', R') - x(p, R)) - p(x(p', R') - x(p, R)) < 0.$$

Шаг 2: Докажем, что матрица Слуцкого отрицательно полуопределена, воспользовавшись результатом первого шага.

Пусть первоначально имеем цены и доход (p, R). Рассмотрим дифференциально малое изменение цен dp при компенсированном изменении дохода $dR = dp \cdot x(p, R)^T$. Тогда результат, полученный на первом шаге, может быть записан в виде: $dp \cdot dx^T \leq 0$, где $dp = \begin{pmatrix} dp_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ dp_N \end{pmatrix}$ и $dx^T = (dx_1 \quad \cdots \quad dx_N)$, или в скалярной записи: $\sum_{i=1}^{N} dp_i dx_i \leq 0$. Поскольку $x_i(p, R) = x_i(p_1, ..., p_N, R)$, то дифференциально малое изменение спроса на i-й товар, вызванное компенсированным изменением цен, может быть представлено в виде:

$$dx_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial R} dR.$$

Представим изменение дохода в следующем виде: $dR = \sum_{j=1}^{N} dp_j x_j(p, R)$ и подставим в последнее соотношение: $dx_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial R} \sum_{j=1}^{N} dp_j x_j(p, R)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} dp_i dx_i = \sum_{i=1}^{N} dp_i \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial R} \sum_{j=1}^{N} dp_j x_j(p, R) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} dp_i \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial R} x_j(p, R) \right) dp_j \right) \leq 0,$$

поскольку $\frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial R} x_j(p, R) = s_{ij}$, отсюда можно сделать вывод, что матрица Слуцкого отрицательно полуопределена (по определению отрицательной полуопределенности).

(в) Продифференцируем бюджетное ограничение по ценам и доходу. Для $i = 1, \ldots, N$ выполнено:

$$\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial x_j(p, R)}{\partial p_i} = -x_i(p, R) \qquad (\mathbf{18}.9)$$

и

$$\sum_{j=1}^{N} p_j \frac{\partial x_j(p, R)}{\partial R} = 1. \qquad (\mathbf{18}.10)$$

Зафиксируем вектор цен p и доход R и положим $f_i(\alpha) = x_i(\alpha p, \alpha R)$ для всех $\alpha > 0$. Покажем, что функция $f_i(\alpha)$ является константой по α или что $f_i'(\alpha) = 0$ для всех $\alpha > 0$.

Продифференцируем f_i по α:

$$f_i'(\alpha)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial x_i(\alpha p,\alpha R)}{\partial p_j}p_j+\frac{\partial x_i(\alpha p,\alpha R)}{\partial R}R. \qquad (\mathbf{18}.11)$$

Из условия сбалансированности бюджета следует, что $\alpha p\cdot x(\alpha p,\alpha R)=\alpha R$, поэтому, разделив на $\alpha>0$, получим:

$$R=\sum_{j=1}^{N}p_jx_j(\alpha p,\alpha R). \qquad (\mathbf{18}.12)$$

Подставим R из (**18**.12) в (**18**.11) и после перестановки придем к следующему соотношению:

$$f_i'(\alpha)=\sum_{j=1}^{N}p_j\left[\frac{\partial x_i(\alpha p,\alpha R)}{\partial p_j}+\frac{\partial x_i(\alpha p,\alpha R)}{\partial R}x_j(\alpha p,\alpha R)\right].$$

Заметим, что в квадратных скобках стоит ij-й элемент матрицы Слуцкого, которая симметрична по определению. Поэтому внутри скобок мы можем поменять i и j местами, сохраняя при этом равенство. Отсюда

$$f_i'(\alpha)=\sum_{j=1}^{N}p_j\left[\frac{\partial x_j(\alpha p,\alpha R)}{\partial p_i}+\frac{\partial x_j(\alpha p,\alpha R)}{\partial R}x_i(\alpha p,\alpha R)\right]=$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{N}p_j\,\frac{\partial x_j(\alpha p,\alpha R)}{\partial p_i}\right]+x_i(\alpha p,\alpha R)\left[\sum_{j=1}^{N}p_j\,\frac{\partial x_j(\alpha p,\alpha R)}{\partial R}\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left[\sum_{j=1}^{N}\alpha p_j\,\frac{\partial x_j(\alpha p,\alpha R)}{\partial p_i}\right]+x_i(\alpha p,\alpha R)\,\frac{1}{\alpha}\left[\sum_{j=1}^{N}\alpha p_j\,\frac{\partial x_j(\alpha p,\alpha R)}{\partial R}\right]=$$

$$=\frac{1}{\alpha}[-x_i(\alpha p,\alpha R)]+x_i(\alpha p,\alpha R)\frac{1}{\alpha}[1]=0,$$

где предпоследнее равенство следует из (**18**.9) и (**18**.10), вычисленных в точке $(\alpha p,\alpha R)$. Таким образом, было показано, что функции $f_i(\alpha)=x_i(\alpha p,\alpha R)$ являются константой по $\alpha>0$, а значит, $x_i(p,R)$ являются однородными нулевой степени по p и R.

19. Пусть предпочтения потребителя на множестве $X=R_+^2$ описываются функцией полезности вида $u(x,y)=\ln(x+1)+\ln(y+2)$, где x, y — блага.

Выпишите матрицу Слуцкого, подсчитанную при ценах $p_x = 2$, $p_y = 4$ и доходе $R = 14$.

Решение.

Найдем маршаллианский спрос как решение задачи потребителя:

$$\max_{x,y\geq 0} \ln(x+1) + \ln(y+2)$$
$$p_x x + p_y y \leq R.$$

1. Найдем внутреннее решение: $x > 0$, $y > 0$. Тогда из условий Куна—Таккера получим следующее соотношение: $\frac{y+2}{x+1} = \frac{p_x}{p_y}$ и, использовав бюджетное ограничение, которое в силу строгой монотонности функции полезности будет выполняться как равенство, найдем $x\left(p_x, p_y, R\right) = \frac{R + 2p_y - p_x}{2p_x}$ при $p_x = 2$, $p_y = 4$ и доходе $R = 14$; $x = \frac{14+8-2}{4} = 5$, и $y\left(p_x, p_y, R\right) = \frac{R + p_x - 2p_y}{2p_y}$ при $p_x = 2$, $p_y = 4$ и доходе $R = 14$ равный $y = \frac{14+2-8}{8} = 1$. Тогда значение функции полезности на этом наборе составит $u_1 = \ln 6 + \ln 3 \approx 2{,}89$.

2. Если $x > 0$, $y = 0$, то $x = \frac{R}{p_x} = 7$, тогда значение функции полезности на этом наборе составит $u_2 = \ln 8 + \ln 2 \approx 2{,}77$.

3. Если $y > 0$, $x = 0$, то $y = \frac{R}{p_y} = 3{,}5$, $u_3 = \ln 1 + \ln 6{,}5 = \ln 6{,}5 \approx 1{,}87$.

4. Если $x = 0$, $y = 0$, то $u_4 = \ln 1 + \ln 2 \approx 0{,}69$.

Таким образом, при $p_x = 2$, $p_y = 4$ и $R = 14$ решением задачи будет первый случай: $x > 0$, $y > 0$. Функции маршаллианского спроса будут следующими:

$$x\left(p_x, p_y, R\right) = \frac{R + 2p_y - p_x}{2p_x},\ y\left(p_x, p_y, R\right) = \frac{R + p_x - 2p_y}{2p_y}.$$

Элемент матрицы Слуцкого может быть представлен в виде:

$$s_{ij} = \frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} + x_j(p, R)\frac{\partial x_i(p, R)}{\partial R}.$$

Тогда

$$s_{11}=\frac{\partial x(p,R)}{\partial p_x}+x(p,R)\frac{\partial x(p,R)}{\partial R}=\left(-\frac{1}{2p_x}-\frac{R+2p_y-p_x}{2p_x^2}\right)+\frac{R+2p_y-p_x}{2p_x}\left(\frac{1}{2p_x}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2p_x}-\frac{R+2p_y-p_x}{4p_x^2}\bigg|_{p_x=2,\,p_y=4,\,R=14}=-\frac{3}{2}.$$

Аналогично находим: $s_{22}=-\frac{3}{8}$, $s_{12}=s_{21}=\frac{3}{4}$. Таким образом, матрица Слуцкого будет следующей:

$$S=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{8}\end{pmatrix}.$$

20. Пусть предпочтения потребителя на множестве потребительских наборов $X=R_+^n$ представимы положительно однородной первой степени функцией полезности $u(\lambda x)=\lambda u(x)$ для любого $\lambda>0$.

(а) Покажите, что компенсированный (хиксианский) спрос положительно однороден первой степени по полезности, т. е. $h(p,\lambda u)=\lambda h(p,u)$ для любых $\lambda>0$.

(б) Покажите, что функция расходов может быть представлена в виде $e(p,u)=u\cdot f(p)$, где функция $f(\cdot)$ положительно однородна первой степени по ценам.

Решение.

(а) Обозначим $h(p,u)$ множество решений задачи

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{N} p_i x_i \to \min\limits_{x_1,\ldots,x_N\ge 0}\\ u(x_1,\ldots,x_N)\ge \overline{u}.\end{cases}$$

Покажем, что если функция полезности однородна первой степени, то компенсированный спрос однороден первой степени по уровню полезности, т. е. если множество $h(p,\overline{u})$ не пусто, то множество $h(p,\lambda\overline{u})$ также не пусто и $\lambda h(p,u)=h(p,\lambda\overline{u})$, $\lambda>0$.

(1) Покажем сначала, что $\lambda h(p,\bar{u}) \subset h(p,\lambda\bar{u})$, $\forall\ \lambda > 0$.

Пусть это не так, т. е. существует $x' \in h(p,\bar{u})$ такой, что $\lambda x' \notin h(p,\lambda\bar{u})$.

Так как x' — решение задачи минимизации расходов, то он удовлетворяет ограничению задачи и, следовательно, $u(x') \geq \bar{u}$, откуда $\lambda u(x') \geq \lambda\bar{u}$, $\lambda > 0$. В силу однородности первой степени функции полезности $u(\lambda x') = \lambda u(x') \geq \lambda\bar{u}$, т. е. $\lambda x'$ допустим в задаче минимизации расходов при уровне полезности $\lambda\bar{u}$. Так как $\lambda x' \notin h(p,\lambda\bar{u})$, то найдется $x'' \in h(p,\lambda\bar{u})$ такой, что выполнено $px'' < p\lambda x'$, откуда получаем $p\dfrac{x''}{\lambda} < px'$.

Так как $u(x'') \geq \lambda\bar{u}$ и функция полезности однородна первой степени, то $u\left(\dfrac{x''}{\lambda}\right) = \dfrac{u(x'')}{\lambda} \geq \dfrac{\lambda\bar{u}}{\lambda} = \bar{u}$, т. е. x'' допустим в задаче минимизации расходов при уровне полезности $\bar{u}$ и дает меньшее значение целевой функции, чем x'. Значит, $x' \notin h(p,\bar{u})$. Получили противоречие. Таким образом, $\lambda h(p,\bar{u}) \subset h(p,\lambda\bar{u})$, $\lambda > 0$.

(2) Покажем теперь, что $h(p,\lambda\bar{u}) \subset \lambda h(p,\bar{u})$, $\forall\ \lambda > 0$.

Рассмотрим $x'' \in h(p,\lambda\bar{u})$. Выше было показано, что $\lambda h(p,\bar{u}) \subset h(p,\lambda\bar{u})$, а значит, $px'' = p\lambda x'$ для $x' \in \lambda h(p,\bar{u})$, т. е. $p\dfrac{x''}{\lambda} = px'$, $\lambda \neq 0$. Так как $u\left(\dfrac{x''}{\lambda}\right) \geq \bar{u}$, то $\dfrac{x''}{\lambda} \in h(p,\bar{u})$. Тогда $x'' \in \lambda h(p,\bar{u})$. Таким образом, $h(p,\lambda\bar{u}) \subset \lambda h(p,\bar{u})$, $\forall\ \lambda > 0$.

Следовательно, $h(p,\lambda\bar{u}) = \lambda h(p,\bar{u})$, $\forall\ \lambda > 0$.

(б) Воспользовавшись результатом пункта **(а)**, получим $e(p,u) = ph(p,u) = puh(p,1)$, и положив $f(p) \equiv ph(p,1)$, получим $e(p,u) = u \cdot f(p)$.

Покажем, что функция $f(\cdot)$ положительно однородна первой степени по ценам.

Поскольку компенсированный спрос положительно однороден нулевой степени по ценам, то для любого $\lambda > 0$: $f(\lambda p) = \lambda p \cdot h(\lambda p,1) = \lambda p \cdot h(p,1) = \lambda f(p)$, т. е. функция $f(\cdot)$ положительно однородна первой степени по ценам.

21. При каких условиях на $z(p_1, p_2)$ функция $e(p,u) = z(p_1, p_2)p_3^{\frac{1}{3}}u$ при $p >> 0$, $u > 0$, удовлетворяет свойствам функции расходов?

Решение.

1. Функция расходов не убывает по ценам, следовательно, функция $z(p_1, p_2)$ должна также не убывать по ценам.

2. Функция расходов положительно однородна первой степени по ценам: $e(\lambda p, u) = z(\lambda p_1, \lambda p_2)(\lambda p_3)^{\frac{1}{3}} u = \lambda e(p, u)$, следовательно, функция $z(p_1, p_2)$ должна быть положительно однородна степени $\frac{2}{3}$ по ценам: $z(\lambda p_1, \lambda p_2) = \lambda^{\frac{2}{3}} z(p_1, p_2)$.

3. Функция расходов вогнута по ценам, покажем, что тогда функция $z(p_1, p_2)$ должна быть также вогнута по ценам.

Вычислим вторые производные функции $e(p, u) = z(p_1, p_2) p_3^{1/3} u$ и составим матрицу Гессе.

$$H_e = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} p_3^{\frac{1}{3}} u & \dfrac{\partial^2 z}{\partial p_1 p_2} p_3^{\frac{1}{3}} u & \dfrac{1}{3} p_3^{-\frac{2}{3}} \dfrac{\partial z}{\partial p_1} u \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial p_1 p_2} p_3^{\frac{1}{3}} u & \dfrac{\partial^2 z}{\partial p_2^2} p_3^{\frac{1}{3}} u & \dfrac{1}{3} p_3^{-\frac{2}{3}} \dfrac{\partial z}{\partial p_2} u \\ \dfrac{1}{3} p_3^{-\frac{2}{3}} \dfrac{\partial z}{\partial p_1} u & \dfrac{1}{3} p_3^{-\frac{2}{3}} \dfrac{\partial z}{\partial p_2} u & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку функция расходов вогнута по ценам, то матрица Гессе должна быть отрицательно полуопределена:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} p_3^{\frac{1}{3}} u \le 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} \le 0, \text{ так как } p_3 > 0,\ u > 0 \qquad (\mathbf{21}.1)$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} p_3^{\frac{1}{3}} u \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial p_2^2} p_3^{\frac{1}{3}} u - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial p_1 \partial p_2}\right)^2 \left(p_3^{\frac{1}{3}} u\right)^2 =$$

$$= \left(p_3^{\frac{1}{3}} u\right)^2 \left[\frac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial p_2^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial p_1 \partial p_2}\right)\right] \ge 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial p_2^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial p_1 \partial p_2}\right)\right] \ge 0. \qquad (\mathbf{21}.2)$$

Таким образом, матрица Гессе для функции $z(p_1, p_2)$ будет также отрицательно полуопределенной:

$$H_z = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial p_1 \partial p_2} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial p_2 \partial p_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial p_2^2} \end{pmatrix}.$$

$\Delta_1 = \dfrac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} \le 0$ по (**21**.1), $\Delta_2 = \dfrac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial p_2^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial p_1 \partial p_2}\right)^2 \ge 0$ по (**21**.2), следовательно, функция $z(p_1, p_2)$ вогнута.

22. На рис. **22.**1 изображена типичная линия уровня функции расходов в пространстве цен, т. е.: $\{(p_1, p_2) \in R^2_{++} : e(p_1, p_2, \overline{u}) = \overline{R}\}$. Предпочтения локально ненасыщаемы и непрерывны.

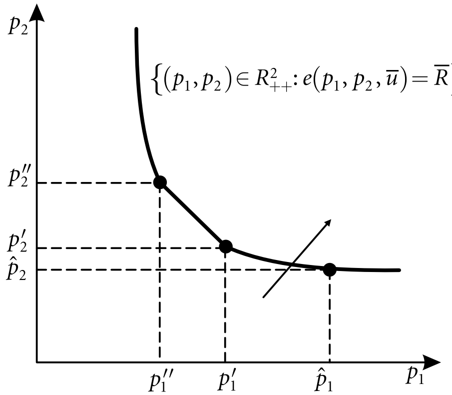

Рис. **22.**1

(а) Изобразите в пространстве цен линию уровня косвенной функции полезности, соответствующую уровню полезности $\overline{u}$.

(б) Вычислите наклон линии уровня функции расходов в точке $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$.

(в) Вычислите наклон линии уровня косвенной функции полезности в точке $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$.

(г) Схематично изобразите в пространстве двух товаров линию уровня функции полезности $u(x_1, x_2)$, которая могла бы соответствовать полученной в пункте **(а)** линии уровня косвенной функции полезности.

Решение.

(а) Так как по условию предпочтения непрерывны, то они представимы непрерывной функцией полезности (см. *MWG 3.C*, *утверждение 3.C.1*). Поскольку по условию предпочтения локально ненасыщаемы и представимы непрерывной функцией полезности, то выполнены все соотношения двойственности, в том числе: $e(p_1, p_2, v(p_1, p_2, \overline{R})) = \overline{R}$ и $v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \overline{u})) = \overline{u}$, т. е. если цены p_1 и p_2 таковы, что $e(p_1, p_2, \overline{u}) = \overline{R}$, то $v(p_1, p_2, \overline{R}) = \overline{u}$. И обратно, если цены удовлетворяют $v(p_1, p_2, \overline{R}) = \overline{u}$, то $e(p_1, p_2, \overline{u}) = \overline{R}$. Таким образом, линия уровня косвенной функции полезности имеет тот же вид, что и линия уровня функции расходов.

Распишем более подробно.

Покажем, что если $(p_1', p_2') \in \{(p_1, p_2) \in R^2_{++} : e(p_1, p_2, \overline{u}) = \overline{R}\}$, то $(p_1', p_2') \in$ $\in \{(p_1, p_2) \in R^2_{++} : v(p_1, p_2, \overline{R}) = \overline{u}\}$, т. е. на линии уровня функции расходов нет точек, не принадлежащих линии уровня косвенной функции полезности. Воспользуемся соотношением двойственности: $v(p_1', p_2', e(p_1', p_2', \overline{u})) = \overline{u}$. Так как $e(p_1', p_2', \overline{u}) = \overline{R}$, то $v(p_1', p_2', \overline{R}) = \overline{u}$, значит, $(p_1', p_2') \in \{(p_1, p_2) \in$ $R^2_{++} : v(p_1, p_2, \overline{R}) = \overline{u}\}$.

Покажем теперь, что если $(p_1', p_2') \in \{(p_1, p_2) \in R^2_{++} : v(p_1, p_2, \overline{R}) = \overline{u}\}$, то $(p_1', p_2') \in \{(p_1, p_2) \in R^2_{++} : e(p_1, p_2, \overline{u}) = \overline{R}\}$. Воспользуемся соотношениями двойственности: $e(p_1, p_2, v(p_1, p_2, \overline{R})) = \overline{R}$, т. е. и для цен (p_1', p_2') выполнено $e(p_1', p_2', v(p_1', p_2', \overline{R})) = \overline{R}$. Но так как $(p_1', p_2') \in \{(p_1, p_2) \in R^2_{++} : e(p_1, p_2, \overline{u}) = \overline{R}\}$, $v(p_1', p_2', \overline{R}) = \overline{u}$, а значит, $e(p_1', p_2', \overline{u}) = \overline{R}$. Это и означает, что $(p_1', p_2') \in$ $\in \{(p_1, p_2) \in R^2_{++} : e(p_1, p_2, \overline{u}) = \overline{R}\}$.

Следовательно, линия уровня функции расходов имеет тот же вид, что и линия уровня косвенной функции полезности.

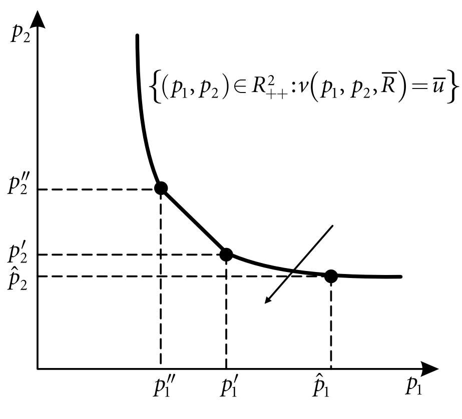

Рис. **22.**2

Рассмотрим пример. Рассмотрим функцию полезности $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. Косвенная функция полезности для этой функции полезности $v(p_1, p_2, R) =$

$=\dfrac{R}{p_1+p_2}$, функция расходов $e(p_1, p_2, u) = u(p_1 + p_2)$, т. е. линии уровня и функции расходов, и косвенной функции полезности в пространстве цен $p_1 + p_2 = \text{const}$. Однако функция расходов не убывает по ценам, тогда как косвенная функция не возрастает (см. *MWG 3.D, утверждение 3.D.3* (*ii*) и *MWG 3.E, утверждение 3.E.2*). Предпосылки — непрерывность функции полезности и локальная ненасыщаемость предпочтений (в задаче выполнены).

Таким образом, линия уровня косвенной функции полезности имеет вид (см. рис. **22.**2).

(**б**) Уравнение $e(p_1, p_2, \bar{u}) = \overline{R}$ задает неявным образом зависимость p_2 от p_1, т. е. $e(p_1, p_2, \bar{u}) = \overline{R}$ — неявная функция. Цены $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ принадлежат гладкому участку линии уровня функции расходов. Тогда в соответствии с правилом дифференцирования неявной функции наклон линии уровня функции расходов в точке $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$:

$$\left.\frac{dp_2}{dp_1}\right|_{\substack{p_1=\hat{p}_1\\ p_2=\hat{p}_2}} = -\left.\frac{\left.\dfrac{\partial e(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_1}\right|}{\left.\dfrac{\partial e(p_1, p_2, \bar{u})}{\partial p_2}\right|}\right|_{\substack{p_1=\hat{p}_1\\ p_2=\hat{p}_2}}.$$

По лемме Шепарда $\dfrac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_i} = h_i(p_1, p_2, u)$. Тогда $\left.\dfrac{dp_2}{dp_1}\right|_{\substack{p_1=\hat{p}_1\\ p_2=\hat{p}_2}} =$ $= -\dfrac{h_1(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \bar{u})}{h_2(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \bar{u})}$.

(**в**) Уравнение $v(p_1, p_2, \overline{R}) = \bar{u}$ задает неявным образом зависимость p_2 от p_1. Наклон линии уровня косвенной функции полезности в точке $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ в соответствии с правилом дифференцирования неявной функции:

$$\left.\frac{dp_2}{dp_1}\right|_{\substack{p_1=\hat{p}_1\\ p_2=\hat{p}_2}} = -\left.\frac{\left.\dfrac{\partial v(p_1, p_2, R)}{\partial p_1}\right|}{\left.\dfrac{\partial v(p_1, p_2, R)}{\partial p_2}\right|}\right|_{\substack{p_1=\hat{p}_1\\ p_2=\hat{p}_2}}.$$

Предпочтения локально ненасыщаемы, представимы непрерывной функцией полезности и $(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ принадлежат гладкому участку линии уровня косвенной функции полезности.

Замечание. В предпосылках *утверждения 3.G.4, MWG 3.G* (в котором доказывается тождество Роя), кроме непрерывности функции полезности и локальной ненасыщаемости указана строгая выпуклость предпочтений. Строгая выпуклость гарантирует единственность решения задачи максимизации, следовательно, и то, что маршаллианский спрос — функция. Однако тождество Роя выполнено и для предпочтений, которые не являются выпуклыми, так как это «локальное» свойство.

По тождеству Роя: $x_i(p_1, p_2, R) = -\dfrac{\dfrac{\partial v(p_1, p_2, R)}{\partial p_i}}{\dfrac{\partial v(p_1, p_2, R)}{\partial R}}$. Тогда $\left.\dfrac{dp_2}{dp_1}\right|_{\substack{p_1=\hat{p}_1\\ p_2=\hat{p}_2}} =$

$$= -\frac{x_1(\hat{p}_1, \hat{p}_2, R)}{x_2(\hat{p}_1, \hat{p}_2, R)}.$$

(г) Изобразим схематично в пространстве двух товаров линию уровня функции полезности $u(x_1, x_2)$, которая могла бы соответствовать кривым безразличия косвенной функции полезности, полученной в пункте **(а)**. Для этого обсудим, как связаны две кривые. Так как в задании просят изобразить линию уровня схематично, для простоты предположим дифференцируемость функции полезности, а также то, что решение задачи максимизации полезности внутреннее. Тогда при каждом векторе цен для внутреннего решения:

$$\left.\frac{\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}}\right|_{\substack{x_1=\hat{x}_1\\ x_2=x_2}} = MRS_{1,2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2} \ \Big(\hat{p}_2 > 0,\ \left.\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{\substack{x_1=\hat{x}_1\\ x_2=\hat{x}_2}} \neq 0\Big).$$

В то же время, так как $\left.\dfrac{dx_2}{dx_1}\right|_{\substack{x_1=\hat{x}_1\\ x_2=x_2}} = = -\left.\dfrac{\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}}\right|_{\substack{x_1=\hat{x}_1\\ x_2=x_2}}$, то $\left.\dfrac{dx_2}{dx_1}\right|_{\substack{x_1=\hat{x}_1\\ x_2=x_2}} = = -\dfrac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2}$.

Воспользовавшись тем, что $\left.\dfrac{dp_2}{dp_1}\right|_{\substack{p_1=\hat{p}_1\\ p_2=\hat{p}_2}} = -\dfrac{x_1(\hat{p}_1, \hat{p}_2, R)}{x_2(\hat{p}_1, \hat{p}_2, R)}$, сделаем вывод, что наклон кривой безразличия дает отношение цен, тогда как наклон линии уровня косвенной функции полезности дает отношение величин спроса, вычисленных при этих ценах (рис. **22.**3).

Таким образом, гладким участкам косвенной функции полезности соответствуют гладкие участки кривой безразличия, на которых решение задачи максимизации полезности (при соответствующих ценах) единственно (рис. **22.**4).

В любой точке, принадлежащей гладкому участку, наклон линии уровня косвенной функции полезности будет одинаковым, т. е. множеству цен соответствует единственная точка $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ (рис. **22.**5).

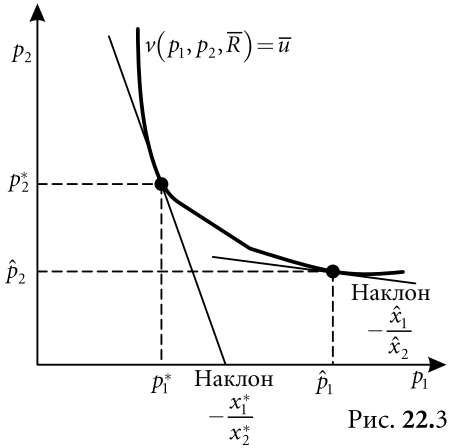

Рис. **22.**3

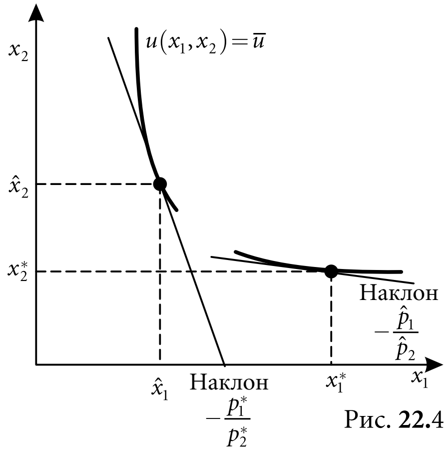

Рис. **22.**4

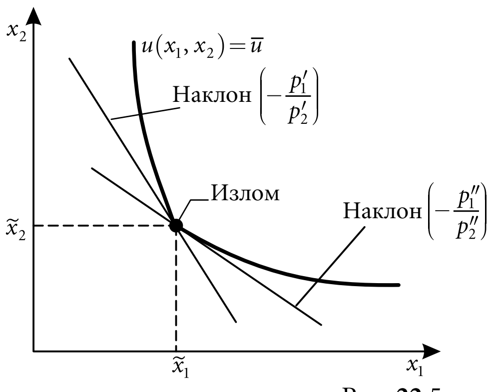

Рис. **22.**5

23. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Пусть цены всех товаров, кроме i-го товара, который является малоценным (инфериорным), фиксированы. Рассмотрите повышение цены на i-й товар, вызванное введением налога, т. е. если p_i^0 цена i-го товара до введения налога, то $p_i^1 = p_i^0 + t$ — цена после введения налога. Пусть потребитель покупает i-й товар как до введения налога, так и после него. Верно ли, что выигрыш потребителя, измеренный с помощью потребительского излишка, будет недооценен по сравнению с выигрышем потребителя, измеренным с помощью эквивалентной вариации?

Решение.

Зафиксируем все цены, кроме i-й, на уровне $\overline{p}_{-i}$ и рассмотрим увеличение цены i-го товара от p_i^0 до $p_i^1 = p_i^0 + t$. Для того чтобы ответить на поставленный в задаче вопрос, мы должны сравнить $\Delta CS = \int\limits_{p_i^1}^{p_i^0} x_i(p_i, \overline{p}_{-i}, R)dp_i$ и $EV = \int\limits_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(p_i, \overline{p}_{-i}, u^1)dp_i$.

По соотношениям двойственности $h_i(p_i', \overline{p}_{-i}, u^1) = x_i(p_i', \overline{p}_{-i}, e(p_i', \overline{p}_{-i}, u^1))$ для заданного уровня u^1. Кроме того, отметим, что $R = e(p_i^1, \overline{p}_{-i}, u^1)$. Таким образом, мы должны сравнить $x_i(p_i', \overline{p}_{-i}, e(p', \overline{p}_{-i}, u^1))$ и $x_i(p_i', \overline{p}_{-i}, e(p_i^1, \overline{p}_{-i}, u^1))$ для $p_i' \in [p_i^0, p_i^1]$.

Функция расходов не убывает по ценам. То есть с ростом цены i-го товара, если индивидуум потребляет его в положительном количестве, $e(p_i, \overline{p}_{-i}, u^1)$ будет расти. Тогда $e(p_i', \overline{p}_{-i}, u^1) < e(p_i^1, \overline{p}_{-i}, u^1)$ для $p_i' \in [p_i^0, p_i^1)$ и $e(p_i', \overline{p}_{-i}, u^1) = e(p_i^1, \overline{p}_{-i}, u^1)$ для $p_i' = p_i^1$.

Тогда так как благо инфериорное: $x_i(p_i', \overline{p}_{-i}, e(p_i', \overline{p}_{-i}, u^1)) > x_i(p_i', \overline{p}_{-i}, R)$ для $p_i' \in [p_i^0, p_i^1)$.

Таким образом, приходим к выводу, что

$$\Delta CS = \left| \int\limits_{p_i^1}^{p_i^0} x_i(p_i, \overline{p}_{-i}, R)dp_i \right| < \left| \int\limits_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(p_i, \overline{p}_{-i}, u^1)dp_i \right| = EV.$$

24. Пусть предпочтения потребителя локально ненасыщаемы и непрерывны. Известно, что спрос потребителя на первые два блага задан следующим образом: $x_1(p_1, p_2) = \frac{1}{\sqrt{p_1^3 p_2}}$ и $x_2(p_1, p_2) = \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2^3}}$.

Рассмотрите экономическую политику, повлекшую изменение цен с уровня (p_1°, p_2°) до уровня (p_1', p_2'). Выведите формулы для оценки изменения благосостояния потребителя.

Решение.

Поскольку предпочтения потребителя локально ненасыщаемы и непрерывны, то выполнены все соотношения двойственности. Тогда для $i = 1, 2$ выполнено $x_i(p_1, p_2, p_3, e(p, \tilde{u})) = h_i(p_1, p_2, p_3, \tilde{u})$ и $x_i\left(p_1, p_2, p_3, e\left(p, \tilde{\tilde{u}}\right)\right) = h_i\left(p_1, p_2, p_3, \tilde{\tilde{u}}\right)$ для $\tilde{u} \neq \tilde{\tilde{u}}$. Так как $x_i\left(p_1, p_2, p_3, e\left(p, \tilde{\tilde{u}}\right)\right) = x_i(p_1, p_2, p_3, e(p, \tilde{u}))$, то $h_i\left(p_1, p_2, p_3, \tilde{\tilde{u}}\right) = h_i(p_1, p_2, p_3, \tilde{u})$. Таким образом, можем сделать вывод, что $h_1(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{\sqrt{p_1^3 p_2}}$ и $h_2(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2^3}}$.

В качестве оценки меры благосостояния используются эквивалентная и компенсирующая вариации. Выведем формулу для оценки эквивалентной вариации (для компенсирующей вывод аналогичен).

По определению при изменении цен с уровня $p^\circ = (p_1^\circ, p_2^\circ)$ до уровня $p' = (p_1', p_2')$ эквивалентная вариация определяется как $EV(p^\circ, p', R) = e(p^\circ, v(p', R)) - e(p^\circ, v(p^\circ, R)) = e(p^\circ, u^1) - e(p^\circ, u^\circ)$.

Поскольку $e(p', u^1) = e(p^\circ, u^\circ)$, то

$$EV(p^\circ, p', R) = e(p^o, u^1) - e(p', u^1). \qquad (\mathbf{24}.1)$$

Обозначим через $\overline{p}$ вектор (p_1^o, p_2', p_3). В правой части выражения (24.1) добавим и вычтем величину $e(\overline{p}, u^1)$, т. е. $EV(p^\circ, p', R) = e(p^\circ, u^1) - e(\overline{p}, u^1) + e(\overline{p}, u^1) - e(p', u^1)$.

Поскольку по лемме Шепарда $h_i(p, u) = \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_i}$, то $e(p^\circ, u^1) - e(\overline{p}, u^1) = \int\limits_{p_2'}^{p_2^\circ} h_2(p_1^\circ, p_2, p_3, u^1) dp_2$, $e(\overline{p}, u^1) - e(p', u^1) = \int\limits_{p_1'}^{p_1^\circ} h_1(p_1, p_2', p_3, u^1) dp_1$.

Следовательно, эквивалентную вариацию можно представить как сумму двух интегралов: $EV(p^\circ, p', R) = \int\limits_{p_2'}^{p_2^\circ} h_2(p_1^\circ, p_2, p_3, u^1)dp_2 + \int\limits_{p_1'}^{p_1^\circ} h_1(p_1, p_2', p_3, u^1)dp_1$. Поскольку, как показано выше, компенсированный и маршалианский спросы на товары 1 и 2 в данной задаче совпадают, у нас есть все необходимые для расчета функции. Следовательно, мы получили формулу расчета для эквивалентной вариации при изменении цен с уровня p° до уровня p'.

В общем случае нельзя интерпретировать эту формулу как представление эквивалентной вариации в виде суммы двух эквивалентных вариаций, одна из которых оценивает изменение благосостояния при изменении цен с уровня p° до уровня $\bar{p}$, а вторая — при изменении цен с уровня $\bar{p}$ до уровня p', так как разница $e(p^\circ, u^1) - e(\bar{p}, u^1)$ не является определением соответствующей эквивалентной вариации. По определению эквивалентная вариация при изменении цен с уровня p° до уровня $\bar{p}$:

$$EV(p^\circ, \bar{p}, R) = e(p^\circ, \bar{u}) - e(p^\circ, u^\circ) = e(p^\circ, \bar{u}) - e(\bar{p}, \bar{u}),$$

где $\bar{u}$ — полезность потребителя при ценах $\bar{p}$ и доходе R.

Однако для рассматриваемого случая, когда маршаллианский спрос не зависит от дохода, а следовательно, компенсированный (хиксианский) спрос не зависит от u, эквивалентная вариация при изменении цен с (p_1°, p_2°) до (p_1', p_2') равна сумме эквивалентных вариаций при изменении цен с (p_1°, p_2°) до (p_1°, p_2') и с (p_1°, p_2') до (p_1', p_2') или при изменении цен с (p_1°, p_2°) до (p_1', p_2°) и с (p_1', p_2°) до (p_1', p_2').

То же верно и для компенсирующей вариации.

25. Приведите пример, показывающий, что агрегированный спрос не всегда удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

Решение.

Рассмотрите экономику с двумя благами и двумя потребителями (A и B), предпочтения которых представимы функциями полезности: $u^A(x_1^A, x_2^A) = \min\{2x_1^A + 39, 2x_2^A\}$ и $u^B(x_1^B, x_2^B) = \min\{9x_1^B, 2x_2^B + 72\}$, $R = 100$, $p = (10, 20)$ и $p' = (20, 10)$. Проверьте самостоятельно нарушение слабой аксиомы выявленных предпочтений.

26. (а) Докажите или опровергните следующее утверждение. Если предпочтения всех потребителей удовлетворяют свойству локальной ненасыщаемости, то при некоторых ценах и распределении доходов сумма стоимости совокупного спроса всех потребителей по всем благам будет строго меньше совокупного дохода этих домохозяйств.

(б) Предположим, что цены на все товары возросли в λ раз, что сопровождалось ростом дохода каждого потребителя в λ раз. Как изменится совокупный спрос? Изменится ли ваш ответ, если известно, что рост цен в λ раз сопровождался ростом совокупного дохода всех потребителей в λ?

Решение.

(а) Известно, предпочтения всех потребителей удовлетворяют свойству локальной ненасыщаемости. Тогда для каждого потребителя выполнено $\sum_{i=1}^{N} p_i x_i^k(p, R^k) = R^k$. Просуммируем по всем потребителям: $\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} p_i x_i^k(p, R^k) = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i^1(p, R^1) + \ldots + \sum_{i=1}^{N} p_i x_i^M(p, R^M) = \sum_{i=1}^{N} p_i \sum_{k=1}^{M} x_i^k(p, R^k)$. Так как $\sum_{k=1}^{M} x_i^k(p, R^k) = x_i(p, R^1, \ldots, R^M)$, то $\sum_{i=1}^{N} p_i \sum_{k=1}^{M} x_i^k(p, R^k) = \sum_{i=1}^{N} p_i x_i(p, R^1, \ldots, R^M)$. Таким образом, $\sum_{i=1}^{N} p_i x_i(p, R^1, \ldots, R^M) = \sum_{k=1}^{M} R^k$. А значит, утверждение неверно.

(б) Индивидуальные спросы однородны нулевой степени по ценам и доходу: $x_i^k(\lambda p, \lambda R^k) = x_i^k(p, R^k)$, для $\lambda > 0$. Тогда $x_i(\lambda p, \lambda R^1, \ldots, \lambda R^M) = \sum_{k=1}^{M} x_i^k(\lambda p, \lambda R^k) = \sum_{k=1}^{M} x_i^k(p, R^k) = x_i(p, R^1, \ldots, R^M)$.

Если же в λ раз изменится совокупный доход, то ответ может измениться. Для иллюстрации необходимо привести контрпример.

27. Рассмотрите двухпериодную модель потребления. Пусть доход потребителя в текущем периоде составляет M_0, а будущем периоде — M_1; $M_0, M_1 > 200$.

Пусть потребитель имеет возможность занимать и сберегать по одинаковой ставке процента r.

(а) Выведите бюджетное ограничение потребителя.

Предположим теперь, что ставка процента равна 25%. Что можно сказать о том, как изменится потребление в каждом периоде если:

(б) доход потребителя в текущем периоде увеличится на 160 д. е., а в следующем периоде сократится на 200 д. е.?

(в) доход потребителя в текущем периоде увеличится на 160 д. е., а в следующем периоде сократится на 160 д. е.?

(г) Предположим теперь, что потребитель испытывает ограничение ликвидности, т. е. он имеет возможность сберегать, но не может брать взаймы. Пусть потребителю предлагается выбор между двумя схемами изменения дохода: получение 40 д. е. в текущем периоде и отсутствие каких-либо поступлений в следующем; получение 20 д. е. в текущем периоде и 25 д. е. в следующем. Какую схему предпочтет потребитель?

Решение.

(а) Выведем бюджетное ограничение потребителя в модели межпериодного выбора при условии, что он имеет возможность сберегать и занимать по одинаковой фиксированной ставке процента r. Предположим, что потребитель решает делать сбережения, так что величина его потребления в текущем периоде c_0 меньше дохода текущего периода M_0. В этом случае он получает процент на сберегаемую им сумму $(M_0 - c_0)$ согласно ставке процента r. Тогда сумма, которую индивид может израсходовать на потребление в будущем периоде, составит

$$c_1 = M_1 + (M_0 - c_0) + r(M_0 - c_0) = M_1 + (1+r)(M_0 - c_0).$$

Другими словами, будучи кредитором в текущем периоде, в будущем периоде потребитель может потратить на потребление сумму, состоящую из его дохода будущего периода, суммы сбережений и процентного дохода, полученного от сделанных сбережений.

Предположим теперь, что потребитель является заемщиком, т. е. его потребление в текущем периоде превышает его доход этого периода: $c_0 > M_0$. Выступая заемщиком в текущем периоде, потребитель должен будет в следующем периоде вернуть занятые средства $(c_0 - M_0)$ и заплатить процент за полученный кредит $r(M_0 - c_0)$. Следовательно, сумма, которую потребитель может израсходовать на потребление в будущем периоде, составит:

$$c_1 = M_1 - r(c_0 - M_0) - (c_0 - M_0) = M_1 + (1+r)(M_0 - c_0),$$

что в точности совпадает с условием, полученным ранее.

Последнее выражение можно преобразовать следующим образом: $c_0 + \frac{c_1}{1+r} = M_0 + \frac{M_1}{1+r}$, получив бюджетное ограничение, выраженное через текущую стоимость. Бюджетное ограничение также можно записать в терминах будущей стоимости: $c_0(1+r) + c_1 = M_0(1+r) + M_1$.

Оба бюджетных ограничения могут быть представлены в виде: $p_0 c_0 + p_1 c_1 = p_0 M_0 + p_1 M_1$, где $p_0 = 1$ и $p_1 = \frac{1}{1+r}$ для бюджетного ограничения, выраженного через текущую стоимость, и $p_0 = 1+r$, $p_1 = 1$ — для бюджетного ограничения, записанного через будущую стоимость. Таким образом, межпериодный выбор потребителя описывается таким же образом, как и выбор потребителя, имеющего первоначальный запас.

При графическом изображении бюджетной линии в пространстве, где по оси абсцисс c_0, а по оси ординат c_1, следует учитывать, что она проходит через точку первоначального запаса $(c_0 = M_0, c_1 = M_1)$, наклон ее равен $-(1+r)$, а точки пересечения с осями координат будут следующими: $\left(c_0 = M_0 + \frac{M_1}{1+r}, c_1 = 0\right)$ (по оси абсцисс текущая стоимость первоначального дохода потребителя) и $c_0 = 0, c_1 = M_0(1+r) + M_1$ (по оси ординат будущая стоимость первоначального дохода потребителя).

(б) Если доход потребителя в текущем периоде увеличится на 160 д. е., а в следующем периоде сократится на 200 д. е. и ставка процента $r = 0{,}25$, то в итоге текущая стоимость первоначального запаса потребителя составит:

$$M_0 + 160 + \frac{M_1}{1+r} - \frac{200}{1{,}25} = M_0 + 160 + \frac{M_1}{1+r} - 160 = M_0 + \frac{M_1}{1+r}.$$

Таким образом, такое изменение дохода потребителя никак не отразится на его бюджетном множестве, следовательно, потребление в обоих периодах также не изменится.

(**в**) Если доход потребителя в текущем периоде увеличится на 160 д. е., а в следующем периоде сократится на 160 д. е. и ставка процента $r = 0{,}25$, то в итоге текущая стоимость первоначального дохода потребителя составит:

$$M_0 + 160 + \frac{M_1}{1+r} - \frac{160}{1{,}25} = M_0 + \frac{M_1}{1+r} + 160 - 128 = M_0 + \frac{M_1}{1+r} + 32.$$

Таким образом, в силу увеличения текущей стоимости первоначального запаса потребителя бюджетная линия параллельно «старой» сдвинется вправо вверх, следовательно, множество доступных потребителю наборов увеличится. Тогда, в предположении нормальности обоих благ (что вполне естественно, поскольку c_0 и c_1 — агрегированное потребление в текущем и будущем периодах, соответственно), получим, что потребление в обоих периодах возрастет. На рис. **27.**1 изображен возможный выбор индивида.

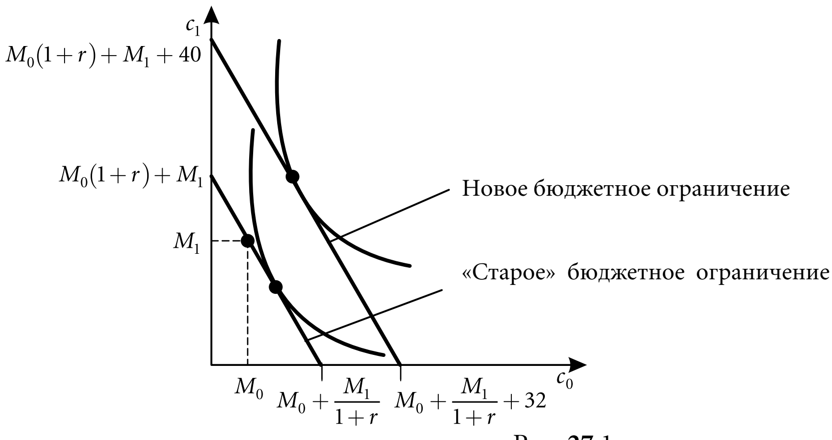

Рис. **27.**1

(**г**) Согласно первой схеме текущая стоимость первоначального запаса потребителя составит:

$$M_0 + 40 + \frac{M_1}{1+r} = M_0 + 40 + \frac{M_1}{1{,}25}.$$

Таким образом, бюджетное ограничение потребителя будет иметь вид:

$$c_0 + \frac{c_1}{1{,}25} = M_0 + 40 + \frac{M_1}{1{,}25},$$

где $c_0 \le M_0 + 40$, поскольку имеет место ограничение ликвидности.

Согласно второй схеме текущая стоимость первоначального запаса потребителя составит:

$$M_0 + 20 + \frac{M_1}{1{,}25} + \frac{25}{1{,}25} = M_0 + 40 + \frac{M_1}{1{,}25}.$$

Таким образом, при второй схеме бюджетное ограничение имеет вид:

$$c_0 + \frac{c_1}{1{,}25} = M_0 + 40 + \frac{M_1}{1{,}25},$$

где $c_0 \le M_0 + 20$.

Следовательно, при первой схеме множество наборов, доступных потребителю, будет больше, значит, он, вообще говоря, предпочтет именно эту схему (рис. **27.**2). Следует также отметить, если выбор потребителя таков, что $c_0 \in [M_0 + 20, M_0 + 40]$, то обе схемы для него эквивалентны.

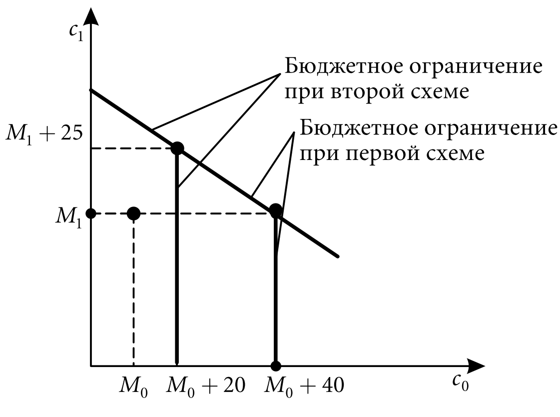

Рис. **27.**2

28. Рассмотрите межпериодную модель потребления. Пусть предпочтения потребителя описываются функцией полезности вида:

$$u(x_1, x_2) = u(c_0) + \beta u(c_1),\ u'(\cdot) > 0,\ u''(\cdot) < 0,$$

где β — дисконтный фактор; c_0 и c_1 — потребление в текущем и будущем периодах соответственно.

Доход потребителя в текущем периоде составляет M_0, а в будущем — M_1. Будем считать, что потребитель имеет возможность сберегать и занимать по фиксированной ставке процента r.

(а) Выпишите задачу потребителя и охарактеризуйте (внутреннее) решение.

(б) Как изменится уровень потребления в текущем и будущем периодах при малом увеличении дохода текущего периода?

В пунктах **(в)**—**(г)** считайте, что $\beta = \dfrac{1}{1+r}$.

(в) Предположим, что вводится налог на доход $0 < \tau_M < 1$ с каждой единицы дохода. Найдите (внутренний) уровень потребления в каждом периоде.

(г) Предположим теперь, что вводится налог на потребление $0 < \tau_c < 1$ с каждой единицы расходов на потребление. Найдите (внутренний) уровень потребления в каждом периоде.

(д) При каком условии политики налогообложения, описанные в пунктах (**г**) и (**д**), для потребителя эквивалентны?

Предположим теперь, что потребитель испытывает ограничение ликвидности: он имеет возможность сберегать, но не может брать взаймы.

(е) Пусть вводится налог на процентный доход $0 < \tau_r < 1$ (т. е. налог на доход от инвестиций). Охарактеризуйте (внутренний) уровень потребления в каждом периоде. Как соотносится потребление в текущем и будущем периодах?

(ж) Что можно сказать о том, как изменится уровень потребления в текущем периоде при малом увеличении налога на процентный доход? Можно ли ответить на этот вопрос, не производя дополнительных вычислений?

Решение.

(а) Задача потребителя в рассматриваемой модели имеет вид:

$$\begin{cases} u(c_0)+\beta u(c_1)\to \max\limits_{c_0,c_1\geq 0} \\ c_0+\dfrac{c_1}{1+r}=M_0+\dfrac{M_1}{1+r}. \end{cases}$$

Найдем характеристику внутреннего решения задачи, перейдя к задаче на безусловный экстремум, выразив $c_1(c_0)=M_1+(1+r)(M_0-c_0)$ и подставив в целевую функцию.

Тогда условие первого порядка (для внутреннего решения) будет иметь вид:

$$u'(c_0)+\beta u'(c_1(c_0))\frac{\partial c_1}{\partial c_0}=0.$$

Поскольку из бюджетного ограничения имеем: $\dfrac{\partial c_1}{\partial c_0}=-(1+r)$ (наклон бюджетного ограничения), окончательно получаем следующую характеристику внутреннего оптимума потребителя:

$$u'(c_0)=\beta(1+r)u'(c_1(c_0)).$$

(б) Рассмотрим функцию $F(c_0,M_0)\equiv u'(c_0)-\beta(1+r)u'\big(M_1+(1+r)(M_0-c_0)\big)$. По условию первого порядка $F(c_0,M_0)=0$. Тогда по правилу дифференцирования неявной функции $\dfrac{\partial c_0}{\partial M_0}=-\dfrac{F'_{M_0}}{F'_{c_0}}$. Заметим, что $F'_{c_0}=u''(c_0)+\beta(1+r)^2u''(c_1)<0$ по условию второго порядка. Таким образом, знак производной $\dfrac{\partial c_0}{\partial M_0}$ определяется знаком числителя, производной F'_{M_0}. $F'_{M_0}=-\beta(1+r)^2u''(c_1)>0$, поскольку функция полезности строго вогнута. Таким образом, $\dfrac{\partial c_0}{\partial M_0}=-\dfrac{F'_{M_0}}{F'_{c_0}}>0$, т. е. с ростом дохода текущего периода потребление в этом периоде возрастает.

Теперь рассмотрим, как изменится оптимальное потребление в будущем периоде с ростом дохода текущего периода. Поскольку $c_1(c_0)=M_1+$ $+(1+r)(M_0-c_0)$, то

$$\frac{\partial c_1}{\partial M_0}=(1+r)\left(1-\frac{\partial c_0}{\partial M_0}\right)=(1+r)\left(\frac{-u''(c_0)-\beta(1+r)^2u''(c_1)}{-u''(c_0)-\beta(1+r)^2u''(c_1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{-\beta(1+r)^2u''(c_1)}{-u''(c_0)-\beta(1+r)^2u''(c_1)}\right)=(1+r)\frac{-u''(c_0)}{-u''(c_0)-\beta(1+r)^2u''(c_1)}>0.$$

Таким образом, с ростом дохода текущего периода возрастает потребление в обоих периодах, т. е. блага являются нормальными.

(в) Рассмотрим сначала введение налога на доход — τ_M (т. е. государство забирает τ_M с каждой единицы дохода).

Введение налога на доход изменит бюджетное ограничение потребителя, и задача максимизации полезности в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{cases} u(c_0)+\beta u(c_1)\to \max\limits_{c_0,\,c_1\geq 0} \\ c_0+\dfrac{c_1}{1+r}=(1-\tau_M)M_0+\dfrac{M_1(1-\tau_M)}{1+r}. \end{cases}$$

Условия первого порядка этой задачи (для внутреннего решения), где λ — множитель Лагранжа, будут следующими:

$$u'(c_0)=\lambda,$$

$$u'(c_1)=\frac{1}{\beta(1+r)}\lambda \text{ или } u'(c_1)=\lambda, \text{ поскольку по условию } \beta=\frac{1}{1+r}.$$

Таким образом, получаем следующую характеристику внутреннего решения задачи потребителя:

$$u'(c_0)=u'(c_1),$$

а поскольку функция полезности является строго вогнутой, то из этого следует, что $c_0=c_1$, т. е. уровень потребления в обоих периодах будет одинаков. Подставляя полученное соотношение в бюджетное ограничение, получим:

$$c_0=c_1=\left(\frac{1+r}{2+r}\right)\left((1-\tau_M)M_0+\frac{M_1(1-\tau_M)}{1+r}\right).$$

(г) Рассмотрим теперь введение налога на потребление — τ_c, что эквивалентно увеличению расходов на потребление. В этом случае задача потребителя будет иметь вид:

$$\begin{cases} u(c_0)+\beta u(c_1) \to \max\limits_{c_0, c_1 \geq 0} \\ (1+\tau_c)c_0 + \dfrac{(1+\tau_c)c_1}{1+r} = M_0 + \dfrac{M_1}{1+r}. \end{cases}$$

Условия первого порядка этой задачи (для внутреннего решения), где λ — множитель Лагранжа, будут следующими:

$$u'(c_0) = \lambda(1+\tau_c),$$

$$u'(c_1) = \lambda(1+\tau_c) \text{ (с учетом } \beta = \frac{1}{1+r}),$$

откуда получаем следующую характеристику внутреннего решения задачи потребителя:

$$u'(c_0) = u'(c_1).$$

Поскольку функция полезности является строго вогнутой, из этого следует, что $c_0 = c_1$, т. е. уровень потребления в обоих периодах будет одинаков, как и при введении налога на доход. Подставляя полученное соотношение в бюджетное ограничение, получим:

$$c_0 = c_1 = \left(\frac{1+r}{2+r}\right)\left(\frac{M_0}{1+\tau_c} + \frac{M_1}{(1+r)(1+\tau_c)}\right).$$

(д) Сравнивая найденные уровни потребления при введении налога на доход и налога на потребление, заметим, что уровень потребления в обоих случаях будет одинаковым при $1-\tau_M = \dfrac{1}{1+\tau_c}$.

(е) Рассмотрим влияние введения налога на процентный доход — τ_i. Поскольку потребитель имеет возможность только сберегать, то введение такого налога эквивалентно снижению процентной ставки.

В этом случае задача потребителя будет иметь вид:

$$\begin{cases} u(c_0)+\beta u(c_1) \to \max\limits_{c_0, c_1 \geq 0} \\ c_0 + \dfrac{c_1}{1+r(1-\tau_i)} = M_0 + \dfrac{M_1}{1+r(1-\tau_i)} \\ c_0 < M_0. \end{cases}$$

Условия первого порядка этой задачи (для внутреннего решения), где λ — множитель Лагранжа, будут следующими:

$$u'(c_0)=\lambda,$$

$$\beta u'(c_1)=\lambda\frac{1}{1+r(1-\tau_i)},$$

откуда получаем дифференциальную характеристику решения задачи потребителя:

$$\frac{u'(c_0)}{\beta u'(c_1)}=1+r(1-\tau_i)\text{ или } u'(c_0)=\left(1-\frac{r\tau_i}{1+r}\right)u'(c_1).$$

Поскольку величина в круглых скобках в последнем выражении меньше 1, то $u'(c_0)<u'(c_1)$, откуда в силу строгой вогнутости функции полезности имеем: $c_0>c_1$.

(ж) Для оценки изменения потребления в текущем периоде при изменении ставки процента можно воспользоваться уравнением Слуцкого, разложив влияние изменения ставки процента на эффект замещения и эффект дохода (с учетом эффекта первоначального запаса):

$$\frac{\partial c_0}{\partial p_0}=\frac{\partial h_0}{\partial p_0}+(M_0-c_0)\frac{\partial c_0}{\partial M},\text{ где } p_0=1+r.$$

Поскольку введение налога на процентный доход эквивалентно снижению процентной ставки и потребитель по условию является инвестором (кредитором), то эффект замещения будет отрицательным, а эффект дохода — положительным (поскольку по условию потребитель является кредитором, $M_0>c_0$). Действительно, падение ставки процента, с одной стороны, заставляет потребителя замещать c_1 на c_0 (больше потреблять в текущем периоде) в силу уменьшения относительной цены будущего периода, а с другой — снижает реальный доход, следовательно, заставляет потреблять меньше как в текущем, так и в будущем периоде. Таким образом, нельзя однозначно сказать, как изменится потребление в текущем периоде с ростом налога.

Покажем это формально. Введем следующее обозначение: $s=M_0-c_0$ и представим бюджетное ограничение в виде $c_1=M_1+s(1+r(1-\tau_i))$. Тогда дифференциальная характеристика внутреннего решения задачи потребителя, полученная в пункте **(е)**, может быть записана следующим образом:

$$u'(M_0 - s(\tau_i)) = \left(1 - \frac{r\tau_i}{1+r}\right) u'(M_1 + s(\tau_i)[1 + r(1 - \tau_i)]).$$

Воспользовавшись правилом дифференцирования неявной функции, аналогично тому, как это было проделано в пункте (**б**), получим:

$$\frac{ds}{d\tau_i} = \frac{-u''(c_1) rs(\tau_i)\left[2 - \frac{r\tau_i}{1+r}\right] - \frac{r}{1+r} u'(c_1)}{-u''(c_0) - u''(c_1)[(1 + r(1-\tau_i)) - rs(\tau_i)]\left[2 - \frac{r\tau_i}{1+r}\right]}.$$

Величина, находящаяся в знаменателе полученного выражения, положительна, поскольку по условию $u''(\cdot) < 0$, тогда как знак числителя не определен, поскольку первое слагаемое положительно, а второе — отрицательно. Осталось заметить, что $\frac{dc_0}{d\tau_i} = -\frac{ds}{d\tau_i}$, а следовательно, знак $\frac{dc_0}{d\tau_i}$ также не определен.